Geschichte

der reinen Mathematik

von

A. Arneth.

Die Geschichte

der reinen Mathematik

in ihrer Beziehung

zur

Geschichte

der

Entwickelung des menschlichen Geistes

von

A. Arneth,
Professor in Heidelberg.

Stuttgart.
Franckh'sche Verlagshandlung.
1852.

Vorrede.

Im Anfange der Zwanziger-Jahre war mir ein Band von Playfairs miscellaneous works in die Hände gekommen, welcher eine Abhandlung über die Mathematik der Inder enthielt, und ich lernte daraus zum ersten Male die große Verschiedenheit zwischen griechischer und indischer Mathematik kennen. Ich habe das Buch seitdem nicht wieder erhalten können, aber der Gegenstand beschäftigte mich fortwährend lebhaft, und veranlaßte mich zu einer Reihe Studien, welche zuletzt in keinem Zusammenhange mehr mit demselben zu stehen schienen. Ich verfolgte die Sache nämlich keineswegs vorsätzlich und planmäßig, und ließ mich mehr von dem leiten, was gerade mein Interesse erregte, fand zuletzt aber immer, daß ich für mein Ziel Etwas gewonnen hatte. Ich sah bald ein, daß auf dem Gebiete der Mathematik allein ein genügender Aufschluß nicht zu erlangen war, und suchte daher in Allem mich zu unterrichten, was im Geistesleben der Menschen mir besonders hervorragend schien. Auf diese Art entstanden eine Menge Aufsätze und Bemerkungen, welche durchaus nicht die Bestimmung hatten, veröffentlicht zu werden, und die als Resultate meiner Studien nur mir selbst als Anhaltspunkte dienen sollten. Diese Aufsätze, welche ich ohne vorgefaßte Meinung ausgearbeitet hatte — da ich keinen äußeren Zweck damit erreichen wollte — gewährten mir manchen überraschenden Aufschluß, aber den Zusammenhang, den Faden, welcher durch das Ganze hindurch geht, den Dualismus im Menschengeschlechte erkannte ich erst, als ich Röths Geschichte der Philosophie studirt hatte. Jetzt erst wurden mir die verschiedenen Richtungen klar und der Einfluß deutlich, welchen sie auf die Gestaltung der Mathematik ausgeübt haben. Die ganze Entwickelung lag jetzt so unverkennbar vor, daß, wenn ich vorgefaßte Ansichten hätte hineinlegen wollen, ich nur auf Widersprüche gekommen wäre, während nach dem thatsächlichen Verlaufe jede Erscheinung mit Nothwendigkeit sich ergab.

Als mir der Auftrag zu der gegenwärtigen Arbeit geworden, war ich anfänglich unschlüssig, sie zu übernehmen, aus verschiedenen Gründen. Einmal wußte ich sehr wohl, daß meine Arbeit nicht nach dem Geschmacke mancher Leute sein würde, obgleich ich nichts Neues gemacht und, wie ich glaube, nur die Thatsachen auf eine natürliche Weise verknüpft habe; denn je weiter ich in meinen Studien gekommen bin, desto mehr habe ich erfahren, wie selten das Neue ist, und daß das Alte, zur festeren Begründung, immer wieder reproducirt wird. Ein größeres Bedenken war für mich die Schwierigkeit einer günstigen Ausführung des Unternehmens. Eine Geschichte der Mathematik für einen größeren Leserkreis zu schreiben, ist immer eine mißliche Sache, sie kann den Mathematiker nicht befriedigen, und für den Nichtmathematiker ist auch das

Wenige, was über die Sache angeführt werden muß, zu viel. Die Verbindung der Mathematik mit der allgemeinen geistigen Entwicklung gibt dem Gegenstande zwar ein höheres Interesse, aber hier war der beschränkte Raum für mich ein bedeutendes Hinderniß. Meine Vorarbeiten konnte ich nur unvollkommen benützen, statt eine Sache zu entwickeln und zu begründen, und die Begründung zu belegen, mußte ich mich oft begnügen, nur eine Andeutung von ihr zu geben, oder eine Bemerkung einfließen zu lassen, was mich dann wieder nöthigte, Hauptpunkte, des Verständnisses wegen, zu wiederholen. Ich fühle wohl, daß die Darstellung hierunter gelitten hat und daß man meiner Arbeit sehr anmerkt, wie sie aus Einzelnem erwachsen ist, doch glaube ich, daß die Idee, welche dem Ganzen zum Grunde liegt, hierunter nicht gelitten hat. Wenn ich nun dennoch mit meiner Arbeit hervorgetreten bin, so geschah es, weil ich es für die Pflicht eines jeden Menschen halte, jeder in seiner Sphäre und nach seinen Kräften, die Wahrheit nach bestem Wissen und Gewissen zu verbreiten, da durch sie allein die Entwickelung unserer geistigen Zustände gefördert werden kann, und in der Hoffnung, daß man, am Wesen der Sache festhaltend, die Mängel des Unwesentlichen übersehen werde.

Wenn bei verwandten Richtungen meine Arbeit Anklang findet und sie zur Mithülfe an dem Ausbau dieser Grundzüge anregt, wenn Andere in den dargelegten Gesetzen die ewig waltende Macht erkennen, von welcher sie ausfließen und damit Alles, was aus ihnen für das Menschenleben hervorgeht, so würde ich mich hinreichend belohnt fühlen. Aber auch der Gegner soll mir nicht unwillkommen sein, wenn es ihm ehrlich um die Sache zu thun ist, da nur aus dem Kampfe der Gegensätze die Wahrheit unverfälscht hervorgehen kann.

Daß ich meine Vorgänger und die Quellen, soweit sie in meinem Bereiche waren, benutzt habe, versteht sich von selbst; da ich aber nie die Absicht hatte, Etwas für mich in Anspruch zu nehmen, so überhob mich dieß der Citate, die dem Zwecke des Werkes nicht entsprochen haben würden und für welche ich außerdem keinen Raum hatte. Für die Angaben über die Lebensumstände des Pythagoras muß ich den Leser, der sich dafür interessirt, auf den demnächst erscheinenden 2ten Band der Geschichte der Philosophie des Herrn Professor Röth verweisen.

Die unterdessen bekannt gewordenen babylonischen Inschriften bieten größere Zahlen dar, sie weichen aber von den persischen nicht ab. Das Zeichen für 100 ist 𒈨, das für 1000 = 10.100 = 𒌋𒈨. Die Zahl 50 wird durch eine fünfmalige Wiederholung von 𒌋, aber 60 durch 𒁹𒌋 ausgedrückt; eben so ist 70 = 𒁹𒌋𒌋 u. s. w. Die Zahl 6560 ist 𒐋 𒌋𒈨 𒐊 𒈨 𒁹𒌋.

Inhaltsverzeichniß.

Dritter Theil.

Entwickelungsgeschichte der Mathematik bei den neueren Völkern bis in den Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts.

Einleitung.

Ueber die Auffassungsweisen der Geschichte der Mathematik.

Die Geschichte der Mathematik kann auf zwei, wesentlich sehr verschiedene, Arten erzählt werden. Die eine Art besteht in der Erforschung und wahrheitsgetreuen Darstellung der Thatsachen, wann, wie und durch wen, einzelne Sätze oder ganze Theile in diese Wissenschaft eingeführt worden sind, womit man die Erzählung der wichtigsten Lebensumstände der um die Mathematik verdienten Personen verbindet. Tritt hiebei die Hauptsache, das wissenschaftliche Element, in den Vordergrund, so hat die Erzählung mehr Werth für den eigentlichen Mathematiker, der allein die wissenschaftlichen Auseinandersetzungen verstehen kann. Bei der Darstellung für einen größeren Leserkreis hingegen werden mehr die Personen hervorgehoben, ihre Lebensumstände mit Anekdoten gemischt und so das Ganze, so weit es der Gegenstand zuläßt, in eine mehr unterhaltende Form gebracht. Auf diese Art ist bisher vorzugsweise die Geschichte der Mathematik behandelt worden. Man ist nur bemüht gewesen zu zeigen, **wie** sich die Mathematik auf ihren jetzigen Stand erhoben, und hat beinahe gänzlich außer Acht gelassen, nach dem **Warum**, nach den **Gründen** zu forschen, welche ihr, bei den verschiedenen großen Völkergruppen, eine eigenthümliche Entwickelung gegeben haben.

Wie bei allen Wissenschaften sind auch in der Mathematik die ersten Anfänge in tiefes Dunkel gehüllt, aber auch aus späteren Zeiten, wo ein verhältnißmäßig hoher Kulturzustand der Völker eine entsprechende Entwickelung dieser Wissenschaft anzunehmen gestattet, fehlen uns sichere Nachrichten, und es lassen einzelne dürftige Ueberlieferungen zahlreichen Vermuthungen freien Spielraum. Von der Mathematik der Aegypter, des sicherlich ältesten Kulturvolkes, wissen wir so gut wie gar nichts, und obgleich uns hier noch nicht alle Hoffnung abgeschnitten ist, mehr zu erfahren, müssen wir doch vorerst auf ganz anderen, als den bisher betretenen, Wegen die allgemeine Gestaltung derselben zu erforschen suchen. Ganz eben so verhält es sich bei den Kulturvölkern am Euphrat. Die Ruinen seit Jahrtausenden verschütteter Städte und Palläste

werden aufgedeckt, merkwürdige Bauwerke zu Tage gefördert, deren Wände mit Sculpturen und Inschriften gleichsam bedeckt sind; mit dem größten Scharfsinne sind eine Reihe wichtiger Sprachdenkmäler entziffert worden, bei anderen steht uns dies in Kurzem bevor, alles vereiniget sich, das Dunkel aufzuhellen, in welches diese Gegenden für immer begraben schienen. Allein von diesen Entdeckungen wird wohl nur die politische Geschichte und die Kulturgeschichte zunächst bereichert werden, wir werden jedoch auch erfahren, welchen Völkergruppen die Bewohner dieser Gegenden angehörten und in welchen Beziehungen sie zu einander und zu entfernteren Völkern gestanden haben. Verstehen wir es nun, die Geistesrichtung, die Ideenkreise der Hauptvölker richtig aufzufassen, so wird uns hieraus, in Verbindung mit den dürftigen Nachrichten, welche auf uns gekommen, wenigstens eine allgemeine Einsicht in das wissenschaftliche Leben gestattet, da dieses nur das Produkt der ganzen Anschauungsweise eines Volkes sein kann. Dieser Grundsatz gilt hauptsächlich für jene frühesten Zeiten, in welchen die verschiedenen Völker sich noch in ihrer ganzen Eigenthümlichkeit gegenüberstanden und wo jene Durchdringung noch nicht stattgefunden hatte, welche unsere heutigen Zustände, besonders im wissenschaftlichen Leben, charakterisirt.

Aehnlich ist das Verhältniß in Ost- und Südasien. Erst in der neuesten Zeit sind uns ältere chinesische Werke in kurzen Auszügen und Inhaltsangaben durch Uebersetzungen zugänglich gemacht worden. Ein ungleich reicheres Material haben wir schon früher aus Indien erhalten, zwar nur wenige Werke, aber von unschätzbarem Werthe für die Geschichte der Mathematik, nicht bloß für dieses Land, sondern für die Geschichte dieser Wissenschaft im Allgemeinen.

Ein reiches Erbe ist uns aus Griechenland geblieben, wenn gleich Vieles für uns, wahrscheinlich unwiederbringlich, verloren ist. Die Mathematik war bei diesem Volke so verbreitet und die Erzeugnisse in dieser Wissenschaft waren so zahlreich, daß schon früher eine Geschichte derselben wiederholt bearbeitet werden konnte. Als ersten Schriftsteller nennt man einen gewissen Perigenes, der über die Mathematik der Chaldäer geschrieben haben soll. Sicherer als diese Angabe ist, daß Theophrastus von Lesbos eine Geschichte der Geometrie in vier Büchern und eine solche der Arithmetik in einem Buche geschrieben haben soll. Eben so hat Eudemus aus Rhodus eine Geschichte der Geometrie geschrieben; beide waren Schüler des Aristoteles. Ein Zeitgenosse der beiden Vorigen, Xenokrates, wird gleichfalls als Verfasser einer Geschichte der Geometrie in fünf Büchern genannt. Alle diese Werke sind verloren gegangen, sie umfaßten die früheste Zeit bis auf einen gewissen Philippus von Medma, einen Schüler Plato's. Aus späteren Zeiten können mit Sicherheit keine Geschichtswerke über die Mathematik mehr nachgewiesen werden, und wir würden in völliger Unwissenheit hierüber sein, wenn nicht zuerst Diogenes von Laerte in Kilikien (210 v. Ch.), in seinen Nachrichten über die älteren Philosophen, manches hierher Gehörige mitgetheilt hätte, was jedoch nur mit Vorsicht benützt werden darf. Die späteren Erklärer älterer Schriftsteller haben viel Schätzbares geliefert; besonders wichtig sind des Pappus aus Alexandrien Auszüge aus mathematischen Schriften, und von Proklos haben wir eine Uebersicht über die berühmtesten Mathematiker bis auf Euklides. Dieses sind die Hauptquellen für die Mathematik der Griechen. Einiges findet sich noch in verschiedenen Schriften zerstreut. Bei all dem herrscht gerade über die interessanteste Zeit, bis auf Euklides, große Ungewißheit und die spärlichen und unsicheren Nachrichten gestatten uns keine klare Einsicht über den Gang der Entwickelung der Mathematik bei den Griechen während dieser Zeit. Von Euklides an verhält sich die Sache

günstiger, von jetzt an sind uns ein Folge ausgezeichneter Werke verblieben, welche ein reiches Material für die Geschichte liefern.

Bedenkt man das eben Angeführte, so wird es klar werden, wie schwierig hier die Feststellung der Thatsachen wird und wie leicht große Irrthümer aufkommen konnten. Dazu kommt noch, daß seit der Zeit der sogenannten Wiederherstellung der Wissenschaften die Gelehrten, die sich mit dem klassischen Alterthume beschäftigten, bemüht gewesen sind, für die Griechen Alles in Anspruch zu nehmen. Es ist noch nicht lange her, wo man es für die gröbste Unwissenheit gehalten haben würde, zu behaupten, die griechische Kultur sei nur eine Fortsetzung früherer Kulturen, welche auf griechischen Boden verpflanzt, dort eine eigenthümliche Richtung und Ausbildung erhalten haben. Man hatte sich so sehr daran gewöhnt, alles geistige Leben von Griechenland ausgehen zu lassen, daß, als man endlich erkannte und durch unabweisbare Thatsachen genöthigt war, auch anderen Völkern geistige Regsamkeit einzuräumen, man dieß griechischem Einflusse zuzuschreiben suchte.

Unter solchen Vorurtheilen sind die meisten Geschichtswerke über die Mathematik entstanden; es verstand sich gewissermaßen von selbst, daß Alles, was wir von den Griechen empfangen haben, ihr unveräußerliches Eigenthum, ihr geistiges Erzeugniß sein müsse. Hiermit im Widerspruche trat eine entgegengesetzte Richtung auf, als man in der neueren Zeit die Entdeckung gemacht hatte, daß auch von andern Völkern die Mathematik mit Glück und Erfolg kultivirt worden war. Jetzt fing man an, eben so die Leistungen dieser andern Völker zu überschätzen, und es ist zu verwundern, wie sonst geistreiche Männer im Stande waren, sublime Dinge da zu finden, wo ganz einfache Verhältnisse vorlagen; man fand sie eben da, wo man sie gerne finden wollte. So führt leicht der Eifer für eine historische Forschung zur Selbsttäuschung und diese zur Entstellung geschichtlicher Wahrheiten. Es wird somit klar sein, daß, wenn so wie hier, für die früheste Geschichte der Mathematik, welche gerade den belehrendsten und interessantesten Theil bildet, bestimmte Nachrichten fehlen, diese nicht durch willkührliche Annahmen ergänzt werden dürfen, daß diese vielmehr aus bestimmten Gesetzen gefolgert werden müssen, welche der ganzen geistigen Entwickelung eines Volkes zu entnehmen sind. Zu demselben Resultate führen noch andere Betrachtungen, welche in dem Gegenstande selbst, um welchen es sich hier handelt, ihre Begründung haben.

Bei den Griechen hieß μανθάνω (manthano) ich lerne, nach der Urbedeutung des Wortes aber ich lerne durch Nachdenken, im Gegensatze des Lernens durch die Erfahrung. Die Mathematik war der Inbegriff dessen, was aus dem reinen Denken hervorgegangen war und woran die Erfahrung durchaus keinen Theil hatte. Die sinnlichen Wahrnehmungen führen zu Vorstellungen; sie sind aber nur die Erreger. Wir können den ganz gleichgültigen Gegenstand fallen lassen und bloß den Act der Vorstellung festhalten. Jede Vorstellung für sich als rein geistige Thätigkeit ohne bestimmten Gegenstand ist Eins, wir können diese Einheit in uns so oft wiedererzeugen, als wir wollen und gelangen dadurch zur Vorstellung der Vielheit und einer bestimmten Vielheit, der Zahl.

Der Gegenstand, welcher von uns wahrgenommen werden soll, muß im Raume, enthalten also ausgedehnt sein. Die Eigenschaft der Ausdehnung ist eine nothwendige Bedingung für jede sinnliche Wahrnehmung; aber auch hier gibt die Außenwelt bloß die Anregung; der Erreger fällt; die Art des Seins im Raume, die Form bleibt der Vorstellung. Zahl und Form bilden nun die Grundlagen der Mathematik, die Gegenstände unseres reinen Denkens; sie sind das von vorne herein Gegebene, Nothwendige. Neben diesen auf gleicher

Stufe, aber nie in den Bereich der reinen Mathematik gezogen, steht die Thätigkeit; sie ist eben so von vorne herein gegeben und nothwendig, als die andern. Zahl, Form und Thätigkeit bilden eine untrennbare Dreiheit; keine ist ohne die andere, und ohne irgend eine von den dreien ist jedes Sein unmöglich. Die Zahl hat nur ein Merkmal: Größe; die Form hat zwei: Größe und Richtung; die Thätigkeit hat drei Merkmale. Man erklärt daher gewöhnlich die Mathematik für die „Wissenschaft der Größen", welche zerfallen in discrete, getrennte, Zahlen und in continuirliche, Raumgrößen; hiernach zerfällt die Mathematik in die Zahlenlehre, Arithmetik und in die Raum- oder Formenlehre, Geometrie.

Man begreift leicht, daß diese Anschauung der Sache nicht der Ausgangspunkt für die Menschen war, wohl aber das Ziel, welchem sie sich zu nähern suchten.

Die abstrakte Wissenschaft entstand erst am Ende eines sehr langen Zeitabschnittes, während welchem die Mathematik nur Beziehung zur Wirklichkeit hatte. Von der Wirklichkeit gingen die Menschen aus und erhoben sich schwer und langsam zur Abstraktion. Hätten wir nun eine vollständige Geschichte der Mathematik, so hätten wir eine Geschichte des reinen Denkens oder vielmehr eine Darstellung der Bemühungen der Menschen, sich zum reinen Denken zu erheben. Eine solche Geschichte ist aber im Grunde nichts Anderes, als eine Geschichte der Entwickelung des menschlichen Geistes, und sie spricht sich aus im ganzen Leben eines Volkes, in der geistigen und materiellen Kultur, den öffentlichen und häuslichen Zuständen, besonders aber in seiner religiösen Anschauungsweise, welche die Grundlage für alles Andere bildet. Wo also Ueberlieferungen aus dem Gebiete der Mathematik fehlen, da wird man nur aus der Gesammtheit aller Erscheinungen im Leben eines Volkes Schlüsse zur Erklärung späterer Produktionen ziehen können und man wird so mit der größten Wahrscheinlichkeit die Lücken auszufüllen vermögen, um ein gleichartiges Ganzes herzustellen.

Noch ein anderer, sehr bemerkenswerther Umstand tritt uns aber hier entgegen. Wie mannigfaltig ist die Entwickelung des Menschengeschlechtes in seinen verschiedenen Völkergruppen; was ist die Ursache dieser so sehr abweichenden Wirkungen? — Die Frage ist oft gestellt und sehr verschieden beantwortet worden, aber vielleicht bei keiner anderen haben tief gewurzelte Vorurtheile den Blick so sehr getrübt, als hier. Wir besitzen große Werke über diesen Gegenstand, mit Fleiß und Scharfsinn ausgearbeitet, sie zeigen aber nur, daß ihre Verfasser die Frage schon von vorne herein entschieden hatten, daß ihre Arbeiten bestimmt waren, nur diejenigen Thatsachen zu sammeln, welche ihre Ansicht begründen und beweisen könnten. Solchen Vorurtheilen ist um so schwerer zu begegnen, als sie gewöhnlich ihren Grund in religiösen Anschauungen haben, wie diese auch beschaffen sein mögen, und es ist bekannt, daß solchen Vorurtheilen auch mit den entscheidendsten Beweisen nicht beizukommen ist. So sind die Vertheidiger der Einheit des Menschengeschlechtes genöthiget, entweder ein göttliches Einschreiten anzunehmen, um diese Einheit wieder aufzuheben, oder sie schreiben die bestehende Verschiedenheit lediglich örtlichen Einflüssen zu. Bei diesem Verfahren zeigt sich nun besonders die Schwäche ihrer Beweisführung und die Unhaltbarkeit ihrer ganzen Ansicht; denn sie sind gezwungen, aus denselben Ursachen ganz entgegengesetzte Wirkungen herzuleiten oder zuletzt den Satz aufzustellen, daß die Eigenthümlichkeiten leiblicher und geistiger Art der Bewohner eines Ortes von der Beschaffenheit desselben abhängen. So etwas nimmt sich komisch genug aus, neben den tausend Beispielen vom Gegentheil;

ohne gerade die örtlichen Einflüsse zu läugnen, darf man sie jedoch nicht überschätzen. Die Chinesen z. B. sind in ihren verschiedenen Niederlassungen durch Jahrhunderte dieselben geblieben, die Holländer des Caps sind heute noch Holländer und die Engländer haben stets in allen Welttheilen ihre Eigenthümlichkeiten bewahrt. Zu ähnlichen Resultaten wird man immer kommen, wenn willkürliche, in nichts begründete Vordersätze zur Grundlage genommen werden. Nur auf wissenschaftlich begründeten Thatsachen können sichere Resultate gewonnen werden und hier sind vor allen Dingen die Naturwissenschaften zu berathen; ohne Beachtung derjenigen Gesetze, welche sie ermittelt haben, gibt es keine Wahrheit.

Der Mensch gehört nämlich, wenigstens mit einem Theile, der physischen Welt an. Dieser Satz wird wohl von keiner Seite her bestritten werden können; sein Körper unterliegt den Gesetzen der natürlichen Dinge. Der Geist äußert sich aber nur durch den Körper, welcher sein Organ ist, und ist von ihm abhängig, folgt also auch hier, wenigstens theilweise, physischen Gesetzen. Um jedoch nicht vorzugreifen, soll diesem Satze vorerst keine weitere Ausdehnung gegeben werden; es scheint aber in der Verschiedenheit der physischen Bildung auch eine verschiedene Geistesrichtung zu liegen, wie dies der Kulturgang der Rassen genugsam zu erkennen gibt, was jedoch erst weiter unten ausgeführt werden wird. Einer der Faktoren zur Erkenntniß der Gesetze der geistigen Entwickelung des Menschengeschlechts ist daher die Kenntniß der Naturgesetze, aus welchen ein höchstes Gesetz für den ganzen Weltprozeß hervorgeht und an dem also auch der Geist, insofern er an den Körper gebunden ist, Theil nimmt. Hierdurch erlangt man einen Standpunkt, von welchem aus die Aeußerungen des geistigen Lebens sich leichter und sicherer beurtheilen lassen; man erkennt, indem man sich immer an die Wirklichkeit anschließt, daß jenes allgemeine Gesetz auch das geistige Leben umfaßt.

Durch die bisherigen Betrachtungen ergibt sich nun die zweite Auffassungsweise für die Geschichte der Mathematik. Als Geschichte des reinen Denkens, besonders in seinen Anfängen, darf sie nicht getrennt werden von der Entwickelungsgeschichte des menschlichen Geistes, also von der allgemeinen Kulturgeschichte, welche selbst wieder ihre Grundlagen in Gesetzen hat, welche die Natur und den Menschen beherrschen.

Die vorurtheilsfreie Betrachtung des Naturganzen, wenn auch nur in seinen Hauptmomenten, durch die Verbindung wissenschaftlich ermittelter Thatsachen, läßt schon die allgemeinen Gesetze und Bedingungen für das Weltleben erkennen. Mit diesem Hülfsmittel gewinnt man einen Ausgangspunkt für das Menschengeschlecht; die abentheuerlichen Bilder, welche man so oft gezeichnet, verschwinden; die Widersprüche lösen sich; die Erscheinungen bleiben getrennt, weil man ihre nothwendige Grundlage kennt; die verschiedenen geistigen Richtungen lassen sich leicht erkennen und mit ihnen die Ideenkreise der Völker, ihr religiöses, wissenschaftliches und staatliches Leben. Damit ist dann die Hauptsache gewonnen und man wird einsehen können, warum eine bestimmte Richtung von einem Volke eingehalten wurde und was sein Eigenthum sein **kann**.

Libri, in seiner Geschichte der mathematischen Wissenschaften in Italien, hat wohl zuerst einen ähnlichen Weg betreten, indem er alle wichtigen Erscheinungen im Gebiete des geistigen Lebens damit verknüpfte. Gewiß hat er dadurch seinem Werke eine höhere Bedeutung gegeben und das Verständniß der Sache wesentlich gefördert. Denn nie stehen die Erzeugnisse in besonderen Wissenschaften vereinzelt, die Fortschritte in andern füllen die scheinbaren Lücken in der einen aus und bilden den Uebergang, oft die Bedingungen zu neuen Schöpfungen.

Der eben angedeutete Weg soll nun in dem Folgenden betreten werden, und wenn die nachfolgenden Gemälde, welche vorher nothwendig entworfen werden müssen, auf einen Umweg zu führen scheinen, so möge doch der Leser sein Urtheil zurückhalten, bis er die Resultate ersehen und erkannt hat, wozu sie dienen; er wird wahrnehmen, daß sie auch noch für andere Dinge, als die Geschichte der Mathematik nützlich sind und überhaupt nur dem Bestreben hren Ursprung verdanken, die Wahrheit darzustellen und dazu die nöthigen Hülfsmittel zu entwickeln.

Erster Theil.

Darlegung des Gesetzes der Entwickelung des Weltlebens.

Die Entwickelung der Körperwelt.

Bei den Menschen, die gewohnt sind, ihre Ueberzeugungen nur aus Thatsachen zu schöpfen, welche wissenschaftliche Forschungen an das Licht gezogen haben, herrscht jetzt wohl allgemein die Ansicht, daß unsere Erde aus der dunstförmig ausgebreiteten Sonnenmasse sich abgelöst und anfänglich selbst in feurig flüssigem Zustande sich befunden habe. Von dem Augenblicke ihrer Selbstständigkeit an gestaltete sie sich, nach bekannten Gesetzen, zu einem Sphäroide und erzeugte wieder aus sich den Mond auf dieselbe Weise, wie sie aus der Sonne hervorgegangen war. Die flüssige, von einer großen Dunsthülle umgebene Erde, war von jetzt an der Schauplatz eines ungeheuren chemischen Prozesses. Durch Abkühlung im kälteren Weltraume erfolgte eine allgemeine Krystallbildung derjenigen Stoffe, welche wir als die am schwersten schmelzbaren kennen. Es bildete sich an der Oberfläche der Erde ein Meer von Krystallen verschiedenartiger Stoffe. Aus diesen kleinen Körperchen erwuchsen dann allmälig größere, feste Massen und endlich überzog sich die Erde mit einer festen Kruste. Es ist klar, daß bei diesem Vorgange eine Schichtung stattfinden mußte, indem immer andere Stoffe in den festen Zustand übergingen, aber diese Schichten wurden oft wieder durchbrochen und zerstört, überhaupt in ihren Lagenverhältnissen beträchtlich verändert. Von dieser ganzen Periode läßt sich nur Weniges und Allgemeines sagen; sie umfaßt gewiß den längsten Zeitraum in der Bildungsgeschichte; aus ihr ging die Erde hervor, als flüssiger Kern mit fester Schale von unbedeutenden Unebenheiten und noch umgeben von einer dichten und sehr beträchtlichen Dunsthülle. Man kann diese Zeit als die Periode der Festbildung der Erde bezeichnen.

In der zweiten Periode setzte sich die Festbildung fort; zugleich gingen aber wichtige Veränderungen in dem Dunstkreise vor sich. Sauerstoff und

Wasserstoff vereinigten sich schon bei hoher Temperatur zu Wasserdämpfen, welche aber in der dichten Atmosphäre aufgelöst blieben. Unter bedeutendem Drucke konnten diese Dämpfe eine große Wärme behalten, welche sie fähig machte, viele Stoffe als Lösungen aufzunehmen, so daß das atmosphärische Wasser die mannigfachsten Bestandtheile aufzuweisen hatte. An der Oberfläche der Erde bildeten sich nun nach und nach heiße, schlammige Niederschläge, welche theilweise wieder verdunsteten, theilweise aber als feste Massen, verändert durch die Einwirkung der Erdwärme, zurückblieben. — So entstanden oder wurden isolirt jene Körper, welche man gewöhnlich zum unorganischen Reiche zählt, die man aber mehr als Mittelstufen zwischen beiden Reichen ansehen sollte, Sauerstoff, Stickstoff, Wasser, Kohlensäure u. a. m. Hierzu darf man auch das Ammoniak rechnen, nachdem die Bildung desselben ohne Mitwirkung organischer Substanzen nachgewiesen worden ist, und die äußeren Verhältnisse einer solchen Bildung durchaus günstig waren. Der Wasserbildung folgten unmittelbar gewaltige Veränderungen der Erdoberfläche. Die Bedeckung durch das Wasser war allgemein, da nur geringe Erhabenheiten vorhanden waren, aber auch auf die freien, erhabenen Felsmassen wirkten die heißen Dämpfe wieder zersetzend ein. Das Wasser drang allmälig in die Tiefe und die nunmehr sich bildenden Dämpfe spalteten und hoben die feste Decke, aus dem flüssigen Innern ergossen sich mächtige Massen über die Oberfläche, wo sie Ablagerungen bildeten und in einen festen Zustand übergingen. Durch solche Revolutionen wurde die Erdfläche beträchtlich verändert und zahlreiche Inseln entstanden als erste Andeutungen der späteren Continente. Von jetzt an konnte man Meer und festes Land unterscheiden, das erste hatte aber nur eine unbeträchtliche Tiefe, das letzte war von geringer Ausdehnung und nur kahler Felsboden, oft bedeckt von den Trümmern der vorhergegangenen Revolutionen. Solche Vorgänge müssen sich oft im Verlaufe ungeheurer Zeiträume und stets verändert wiederholt haben; die Atmosphäre wurde dadurch immer mehr von den in ihr enthaltenen Stoffen befreit, gelichtet, die Sonnenstrahlen konnten sie mehr und mehr durchdringen und endlich mit ihren belebenden Wirkungen die Oberfläche der Erde erreichen. Am Ende dieses zweiten Zeitraumes, welchen man als Uebergangsperiode bezeichnen kann, waren die Atmosphäre und das Urmeer geschwängert mit den eben angeführten Uebergangsstoffen zum organischen Reiche, die Festbildung war fortgesetzt worden; zugleich war aber auch schon ein neuer Prozeß, die Zersetzung, eingeleitet, welche der dritten Periode ihre Eigenthümlichkeit aufdrückt.

Gewöhnlich nimmt man die einfache Zelle als erstes Glied des organischen Reiches, weil wir ihre Entstehung beobachten können, und alle etwa vorausgegangenen Prozesse sich unserer Wahrnehmung bisher entzogen haben. Allen Analogien nach gehen aber sicher dieser Bildung eine ganze Reihe anderer Bildungen vorher, und es findet hier, wie überall in der Natur, keine scharfe Grenze statt; das unorganische Reich geht allmälig in das organische über und die Zelle ist eben nur die erste Bildung, welche unserer Beobachtung anheim fällt. Diese Vorläufer des organischen Reiches, welche wir „Uebergangsstoffe" genannt haben, waren in der dritten Periode so allgemein verbreitet, daß sich überall die Bedingungen für das organische Leben, Wasser, Kohlen- und Stickstoffverbindungen vorfanden. Das Wesen des Urzeugungsactes scheint aber in Folgendem zu bestehen: Auf eine Flüssigkeit, welche einen solchen Uebergangsstoff gelöst enthält, welcher nothwendig aus Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlenstoff zusammengesetzt sein muß, wirkt ein anderer ein, welcher als wesentlichen Bestandtheil noch Stickstoff enthält. Der erste bildet die Grundlage, von dem andern geht die gestaltende Thätigkeit aus. Von der Beschaffenheit

beider Stoffe hängt es nun ab, ob sie auf einander wirken und wie sie es thun, sie sind die Faktoren und die Zelle, welche aus ihnen hervorgeht, ihr Produkt, richtet sich nach jenen. Die Natur mag Hunderte von Verbindungen geschaffen haben, ehe diejenigen zum Vorschein kamen, welche die Bedingungen zur Bildung des ersten lebenden Wesens in sich schlossen, aber endlich erreichten sie auch diese Höhe und aus ihrer Verbindung ging die erste Zelle hervor. Die Zelle bedarf ferner eines Mediums, welches ihr assimilirbare Stoffe zu ihrer Entwickelung darbietet: dieses Medium ist der dritte Faktor und von allen drei Faktoren hängt die Beschaffenheit des ausgebildeten Organismus ab. In der dritten Periode der Erdbildung zeigte nun die Oberfläche durchaus die günstigsten Verhältnisse zur Erzeugung lebender Wesen, seichte, getheilte Meere mit vielen Inseln, die Luft und die Gewässer angefüllt mit den Uebergangsstoffen, die letzteren außerdem noch mit mannigfachen Lösungen; die drei Potenzen Licht, Wärme und Elektrizität konnten ungehindert wirken, alle Bedingungen vereinigten sich, die Erdoberfläche zu einem großen Behälter organischer Thätigkeit umzuschaffen.

Die ersten Geschöpfe, von der einfachsten Beschaffenheit, traten zugleich in unnennbarer Anzahl auf und griffen jetzt ihrerseits wieder, auf eine neue Weise, in die Erdbildung ein. Ihre Lebenszeit war von kurzer Dauer, aber während derselben bedeckten sie ihren kleinen Körper mit einem Kalk- oder Kieselpanzer, aus der im Wasser aufgelösten Kalk- oder Kieselerde, und nach ihrem Tode blieben diese unzersetzt zurück und bedeckten bald, bei der ungeheuren Menge dieser Geschöpfe, den Meeresboden mit einer beträchtlichen Schichte dieser Reste. Die ersten Organismen, auf der Grenzscheide beider Reiche stehend, nahmen noch an den Thätigkeiten beider Theil, und während sie die erste Quelle der eigentlichen organischen Materie wurden, trugen sie zugleich die Festbildung der Erde weiter. Man hat diese Thätigkeit der ersten Wesen häufig nicht hinreichend beachtet; diese Kalk- und Kieselreste bilden aber gewaltige Massen der Erdrinde, welche, obgleich vielfach verändert und wieder zusammengebacken, doch eine gewisse Löslichkeit behalten haben, welche sie geeignet macht, wieder in andere Organismen überzugehen.

Noch ein anderes neues Verhältniß trat nunmehr ein. Die Fähigkeit der Erde zur Urerzeugung bestimmter Wesen mag durch lange Zeiträume fortgedauert haben, aber endlich mußten die Verhältnisse sich doch so ändern, daß dieselbe aufgehoben wurde. Die Natur hat nun die bei der Urerzeugung thätigen Kräfte gleichsam in die erzeugten Individuen eingeschlossen; in ihnen leben sie fort und wiederholen sich bei der Fortpflanzung derselben. Die Untersuchungen über die Fortpflanzung und Entwickelung der Organismen sind besonders dadurch wichtig, daß sie uns in die Acte der Urerzeugung einführen und uns Licht über jene Vorgänge verschaffen. Einer jeden Zeugung und Entwickelung eines Organismus entspricht genau ein gleicher Vorgang bei der Urerzeugung, und wir lernen z. B. hierdurch, daß, wenn ein Organismus, während seiner Entwickelung, durch äußere Ursachen in verschiedene Medien versetzt wurde, diese eben so oft eine andere Richtung nahm, vorausgesetzt, daß die Medien von geeigneter Beschaffenheit waren, um das Leben weiter führen zu können.

Die Erde erzeugte nun fort und fort die organische Materie, während zugleich auch die geschaffnen Organismen dieselbe Fähigkeit besaßen. Der Lebensprozeß, in so ferne er auf die Ausbildung und Erhaltung des Körpers gerichtet ist, ist ein ununterbrochener chemischer Act, welcher dem Körper stets neue Stoffe zuführt und die alten verbrauchten ausscheidet. Dieser Stoffwechsel wiederholt sich aber nie auf ganz gleiche Weise, und das Individuum

wird stets ein anderes, woraus die Veränderung in den verschiedenen Lebensaltern hervorgeht. Das lebende Wesen ist es nun, das diesen chemischen Prozeß einleitet und unterhält; es zieht die Uebergangsstoffe an sich und verarbeitet sie zu neuen Verbindungen, und diese neue Kraft war es, welche die dritte Periode der Erdbildung auszeichnete. Mit dem Tode des Individuums zersetzen sich die organischen Verbindungen, welche es erzeugt hat und sie zerfallen wieder in die Uebergangsstoffe; aber auch hier müssen wir uns eine Progression denken und ein allmäliges Aufsteigen dieser Stoffe bis zu einer gewissen Grenze. Das Urmeer und die Atmosphäre nahmen diese Zersetzungsstoffe auf und erhielten dadurch eine andere, höhere Beschaffenheit; die drei Faktoren änderten sich und durch Urerzeugung gingen höhere Schöpfungsreihen hervor, neben welchen auch die früheren, wenn auch in etwas veränderter Form, durch Fortpflanzung sich erhielten.

Bisher ist immer vorausgesetzt worden, die kleinen Geschöpfe seien in Bezug auf ihre Ernährung bloß auf die Uebergangsstoffe beschränkt gewesen; nun lassen sich aber bei Organismen verschiedener Art leicht Umstände denken, wo eine Art genöthigt war, neben dem gewöhnlichen Wege ihre Nahrung auch dadurch aufzunehmen, daß sie die Körper anderer, vor ihrer Zersetzung, sich assimilirte. Die Entwickelung ging nun auch in dieser Richtung weiter und es wurden zuletzt Geschöpfe hervorgerufen, die mit ihrer Nahrung allein auf andere Organismen angewiesen waren. Das organische Reich spaltete sich hierdurch in zwei Theile: der eine schöpfte fortwährend seine Nahrung aus den Uebergangs- und den Zersetzungsstoffen, der andere aber aus denjenigen Verbindungen, welche der erste Theil durch seinen Lebensprozeß erzeugte. Wir nennen den ersten Theil das Pflanzenreich und den anderen das Thierreich. Hieraus geht schon hervor, daß man eben so wenig eine strenge Grenze ziehen kann zwischen Pflanzen- und Thierreich, als dieses zwischen unorganischem und organischem Reiche möglich ist; denn überall finden die Uebergänge in Abstufungen und unmerklich Statt.

Die dritte Periode zeichnete sich durch eine große Zahl beträchtlicher Umwälzungen der Erdoberfläche aus, wodurch die Erde nach und nach ihre gegenwärtige Gestalt erhielt. Große Ländermassen wurden aus dem Meere emporgehoben, andere sanken in die Tiefe und bildeten ausgedehnte Becken, in welche das Wasser einströmte und so wurden Meer und festes Land geschieden. Eben so stiegen in großen Zwischenräumen die Gebirge empor und noch jetzt beobachtet man allmälige Erhebungen und Senkungen. Jede Umwälzung bezeichnete eine Schöpfungsepoche und mit jeder traten neue Pflanzen- und Thiergattungen hervor. Diese Revolutionen erscheinen wie Verjüngungsacte der Naturkraft, oder vielmehr durch die vorausgegangenen Zustände wurden allmälig Ereignisse vorbereitet, welche dann plötzlich hervortraten, und in deren Folge die Urzeugung mit erneuter Kraft thätig war. Eine neue Schöpfungsreihe war nur auf dem Grunde der vorhergehenden möglich, welche das Material für jene liefern mußte, und aus höher organisirtem Stoffe schuf die Natur immer höhere Wesen. Jede Schöpfungsreihe entsprach vollkommen dem Zustande der Erde zur Zeit ihres Werdens, da sie der Ausdruck, der Inbegriff der in derselben thätigen Kräfte war. So waren die ersten Pflanzen ausschließlich Wasserpflanzen, dann folgten Sumpf- und Uferpflanzen, zuletzt die Landpflanzen, ganz entsprechend der jedesmaligen Beschaffenheit der Erde. Das feste Land war aber kahler Felsboden und, wo er dem Meere entstiegen, bedeckt mit den Resten untergegangener Organismen, in welchen die Pflanze schon ihre Nahrung finden konnte. Aber auch die Felsen erhielten Anflüge von Flechten und Pilzen, die zuletzt den festen

Boden zersetzten und hieraus, sowie aus ihren Resten, eine Decke bildeten, in welcher wieder höhere Pflanzen gedeihen konnten. Der feste Boden wurde überall durch den Einfluß der organischen Materie wie durch die Uebergangsstoffe aufgelöst, die abgetrennten Theile wurden vom Regen den tieferen Gegenden zugeführt, wodurch jene Uferränder und Flußgebiete entstanden, welche sich in der sogenannten Steinkohlenperiode mit einer unglaublichen Vegetation bedeckten. So weit die Steinkohlenlager bis jetzt erforscht sind, weisen sie schon auf eine ungeheuere Menge durch den Vegetationsprozeß abgelagerter Kohlen hin, und man muß, selbst unter Berücksichtigung der damals herrschenden günstigen Verhältnisse, der hohen Temperatur und des noch reichen Gehaltes der Luft an Kohlensäure, annehmen, daß derselbe durch Millionen von Jahren hindurch angedauert habe. Diese Vegetation liegt jetzt tief in der Erde begraben, bedeckt von vielen Schichten späterer Entstehung; aber die Menschen fördern sie wieder zu Tage, geben die Kohle der Atmosphäre zurück, welche sie ihrerseits wieder an neue Pflanzengenerationen abgibt. So erhob sich allmälig das Pflanzenreich zu seiner gegenwärtigen Höhe; durch Urerzeugung wurden stets neue Gattungen geschaffen, neben welchen viele der früheren bestehen blieben, andere aber gänzlich untergingen.

Entsprechend waren die Verhältnisse im Thierreiche. Die erste Thierschöpfung war vollständig auf das Wasser angewiesen. Von hier aus veränderte sich der Organismus; er erlangte nach und nach immer mehr die Eigenschaft, sich in der Luft aufhalten zu können und es entstanden zuletzt die Luftathmer. Die Form veränderte sich; von dem einfachen Bläschen, welches noch keine andere Unterscheidung zuließ, als die zwischen Hülle und Inhalt, ging sie über zu einer Mundöffnung, dann zu einer Verbindung derselben mit einem Schlauche oder Darme, mit einer späteren Erweiterung desselben zu einem Magen und einer zweiten Oeffnung, dem After; zuletzt entstanden Gefäße und Andeutungen zu einem Nervensysteme. Was auf die Ernährung Bezug hatte, trat zuerst hervor, alsdann das, was zur Fortpflanzung gehört; Säftebewegung, Athmungswerkzeuge und Sinnesorgane folgten. Bewegungsorgane zur Ortsveränderung und zur Ergreifung der Nahrung kamen schon frühe zum Vorschein, die erstern waren anfänglich bestimmt, im Wasser zu wirken und veränderten sich von hier aus nach zwei Richtungen. Der Körper hatte zuerst nur einen gallertartigen Ueberzug, welcher allmälig in eine lederartige Haut überging und schloß sich meistentheils in Kalkgehäuse ein. Auf höherer Stufe entstand ein knorpeliges Gerüste, an welches die weichen Theile angeheftet waren; aber auch hier war der Körper noch mit festen Schildern bedeckt oder von einer Kalkschale umgeben. Auf der letzten Stufe verschwand die harte Umhüllung und der Kalk derselben wurde nach innen zur Knochenbildung verwendet, woraus die höchste Körperbildung mit Knochengerüste hervorging. Besonders merkwürdig ist die fortschreitende Bildung der Ergreifungs-, Bewegungs- und Anheftungsorgane, indem sie uns vorzugsweise in die Beschaffenheit der Erdoberfläche einzuführen vermögen. Schon während der Steinkohlenperiode, aber besonders am Ende und nach derselben, machte die Natur die ersten Versuche, ihre Geschöpfe aus dem Wasser in die Luft zu versetzen. Die Schwimmorgane erweiterten sich daher, um dem Thiere die Möglichkeit zu verschaffen, zuerst kurze, dann längere Zeit auf dem festen Lande oder in der Luft zubringen zu können. Durch den riesenartigen Vegetationsprozeß wurde eine unglaubliche Menge Kohle aus der Luft abgeschieden und durch Bedeckungen der Circulation überhaupt entzogen. Im Wasser veranlaßten die Thiere eine eben so großartige Ablagerung von kohlensaurem Kalke und eine Vermehrung und Umänderung der organischen Materie.

Allmälig wurden die drei Faktoren der Urerzeugung verändert und es entstanden neue Geschöpfe, die diesen veränderten Verhältnissen genau entsprachen, indem sie die wirkliche Darstellung derselben waren. So waren denn auch ganz sachgemäß spätere Bildungen schon früher in Andeutungen vorhanden; wir besitzen Fischreste mit Schnäbeln, wie sie die Wasservögel haben, und andere Reste, in welchen die Fisch-, Amphibien- und Vogelnatur gleichsam verschmolzen ist. Wenn man die Grundlagen berücksichtiget, auf welchen diese Thiere entstanden sind, so wird man nicht leicht versucht werden, sie für höher organisirte Thiere anzusehen, als sie die Gegenwart aufzuweisen hat. Diese Thiere von unvollkommner Bildung zerfielen und theilten sich bei entsprechender Veränderung der Erde in eben so viele Klassen, als in ihnen vereinigt erscheinen. Nach und nach ging nun die Erde in ihre gegenwärtige Beschaffenheit über, und nach einer letzten Umwälzung der Erdrinde entstieg auch der Mensch dem Schooße der Erde.

Die Dauer einzelner Schöpfungsperioden vermag man annähernd zu schätzen und kann daraus auf die Zeit des ganzen Bildungsprozesses der Erde einen muthmaßlichen Schluß ziehen. Nimmt man aber eine Million Jahre als Zeiteinheit an, so gehören sehr viele solcher Einheiten dazu, diese Dauer zu bezeichnen, und wahrscheinlich bleiben noch alle unsere Schätzungen hinter der Wirklichkeit zurück. Wenn nun aber auch diese Dauer so groß ist, daß wir uns keine rechte Vorstellung mehr von ihr machen können, so ist sie doch keine Ewigkeit; die Schöpfung hat einen Anfang gehabt, als die ersten Molecüle sich zu einem Ganzen vereinigten; sie ist von da an immer fortgeschritten in immer steigender Erhebung, bis sie fähig war, das erste vernünftige Wesen, den Menschen, hervor zu bringen. Die Schöpfung des Menschen eröffnet die vierte Periode, in welcher die Erde in einen ganz neuen Zustand eintritt.

Die Bedeutung der dritten Periode läßt sich nun erst ganz übersehen. Nachdem in der ersten Periode die Festbildung vorgeherrscht und ihr Maximum erreicht hatte, entwickelten sich in der zweiten neben ihr, in ununterbrochener Folge, eine Reihe Stoffe, welchen umgekehrt eine lösende Kraft innewohnte, wie sie auch selbst immer mehr eine größere Wandelbarkeit erlangten. Aus diesen Stoffen ging zuletzt die organische Materie und das Leben im engern Sinne hervor. Neben der Festbildung entfaltete sich also allmälig eine andere Kraft, welche ihr entgegenwirkte und sie aufzuheben strebte. Die zuerst entstandenen Verbindungen waren am starrsten und festesten, die späteren leichter aufzuheben und löslicher. Beide Kräfte lagen im Kampfe, wirkten sich entgegen, suchten sich aufzuheben und aus diesem Kampf ging die Erde und ihre Bewohner hervor. Zwischen der ersten Verbindung und der organischen Materie liegt eine ununterbrochene Reihe anderer Verbindungen, in welcher jedes folgende Glied weniger Beständigkeit hat, als das vorhergehende. Die organische Materie selbst ist höchst wandelbar: kaum hat man sie in einer Form angefaßt, so ist sie schon durch äußere Einflüsse in eine andere übergegangen; diese Beweglichkeit ist ihre erste Eigenschaft. Die Organismen vertreten nun diese lösende Kraft in immer höherer Entfaltung, sie wirken zerstörend auf das unorganische Reich ein, sie heben es auf, indem sie es in sich aufnehmen; was durch den Organismus gegangen ist, wird nie wieder in derselben Form und Beschaffenheit der Erde zurückgegeben. Die dritte Periode ist daher die der organischen Thätigkeit, der Auflösung des unorganischen Reiches und dessen Umgestaltung in das organische.

Die Vorgänge dieser Periode gestatten uns erst eine Einsicht in das Wirken der Naturkräfte. Zu irgend einer Zeit bildeten alle Geschöpfe, alle Zustände und Verhältnisse auf der Erde eine Totalkraft, welche auf die Erzeugung neuer Wesen derselben Art gerichtet war. Nach den nothwendigen Uebergängen und

Vorbereitungen trat diese Zeugung plötzlich, und oft mit bedeutenden Veränderungen verknüpft, ein. Die erzeugten Wesen standen zu den erzeugenden Kräften in demselben Verhältnisse, wie die Kinder zu den Aeltern. Der neue Organismus hatte aber eine doppelte Bestimmung, einmal mußte er durch seine Thätigkeit eine neue Zeit mit neuen Verhältnissen mitbilden helfen, sodann mußte er aber auch die Kräfte, welche ihn gebildet, festhalten, weil die Erde immer nur theilweise in den neuen Zustand überging und das Zurückbleibende der alten Kraft zu seinem Uebergange bedürftig blieb. Die Erhaltung aller Kräfte, welche die Natur je entwickelt, ist eine eiserne Nothwendigkeit, wenn die Fortentwickelung keine Unterbrechung erleiden soll. Die Gegenwart besitzt daher Repräsentanten aus allen Pflanzen- und Thiergattungen, welche die Erde je erzeugt hat, in derjenigen Ausdehnung, wie sie ihrer noch bedürftig ist, wenn auch nicht in allen Formen, doch solche von gleicher Thätigkeit. Pflanzen und Thiere sind in ungeheurer Anzahl bei den vielen Erdrevolutionen untergegangen, und gerade aus den Trümmern dieser lebenskräftigen Wesen scheinen neue Organismen hervorgegangen zu sein; niemals aber ist die ganze vorhergegangene Schöpfung untergegangen oder auch nur eine nothwendige Uebergangsstufe gänzlich vernichtet worden. Man hat vielfach die Behauptung aufgestellt, aus dem ersten Bläschen sei durch allmälige Umänderungen, verursacht durch die veränderte Beschaffenheit der Erde, das ganze Thier- und Pflanzenreich hervorgegangen, und dabei angeführt, daß so Etwas in vielen Millionen Jahren wohl denkbar sei. Dabei läßt sich aber nur Eines nicht begreifen, nämlich, warum die Organismen eine so verschiedene Entwickelung genommen haben und nicht aus allen Bläschen Menschen geworden sind, da ja die gleichen Kräfte für alle thätig waren. Man könnte freilich hierbei noch annehmen, die Urerzeugung der Bläschen dauere immer fort und die verschiedenen Glieder des organischen Reiches seien bloß verschiedene Stufen der Entwickelung derselben, aber auch hierdurch würde die Trennung in Pflanzen- und Thierreich nicht erklärt werden, und außerdem würde man annehmen, daß die Erde stets andere Wirkungen hervorbringe und doch auch wieder stets dasselbe erzeuge. Es bleibt sonach nichts übrig, als die Urerzeugung der bestehenden Organismen und ihre Erhaltung anzunehmen und nur solche Veränderungen durch äußere Einflüsse als möglich gelten zu lassen, durch welche das Wesen und die Bestimmung eines Organismus nicht aufgehoben werden.

Mit dem Menschen ist aber die Bildungsgeschichte der Erde nicht abgeschlossen, sie ist nur in ein neues Stadium eingetreten. Jede Pflanze, jedes Thier war eine Vermehrung und Erhöhung der Naturkraft, aber der Mensch, mit seiner freien, bewußten Thätigkeit, ist der wichtigste Zuwachs derselben geworden, denn er greift mit Plan und Absicht mächtig in das Naturleben ein und weist der Entwickelung neue Wege. Die Entwickelung geht fort und zwar nach denselben Gesetzen wie früher, nur gehoben durch eine bis hierher nicht gekannte Thätigkeit. — Wenn wir die Erde seit der historischen Zeit so wenig sich haben verändern sehen, und wenn wir darauf den Schluß gründen wollten, daß Alles in so ruhiger Entwickelung wie bisher fortgehen würde, so müssen wir doch bedenken, daß die ganze Dauer des Menschengeschlechtes nur ein Augenblick in der Geschichte der Schöpfung ist, und daß diese wie bisher fortgehen wird, bis ihr großes Ziel erreicht ist. Gewöhnlich nimmt man an, die Erde habe, bei einer anfänglich sehr hohen Temperatur, einen gleichmäßigen Wärmeverlust erlitten und sei dadurch in ihren jetzigen Zustand eingetreten, welcher als der Zustand des Gleichgewichts der Temperatur angesehen wird. Hieraus schließt man nun weiter, daß, weil die mächtigste Kraft, die Wärme,

nunmehr immer in gleicher Weise wirke, auch alle übrigen Verhältnisse keine großen Veränderungen mehr erleiden könnten. So verhält sich die Sache jedoch nicht, vielmehr liegen Andeutungen vor, und es folgt auch aus allgemeinen Gründen, daß die Erde keine beständige Abnahme der Wärme, wohl aber einen öfteren Temperaturwechsel erlitten hat, so daß diese bald höher, bald niedriger war, als in der Gegenwart. In diesem Wechsel haben die Erdrevolutionen und die verschiedenen Epochen der Schöpfung ihre Begründung; die Erde war es aber selbst, welche denselben durch ihre verschiedenartige und ungleiche Thätigkeit nach bestimmten Gesetzen hervorgerufen hat.

Alle diese Vorgänge waren nur Wirkungen der vernunftlosen Pflanzen- und Thierwelt; welche Stelle nimmt aber der Mensch in der Entwickelungsgeschichte der Erde ein? — Hat er nur den Beruf der Geschöpfe vor ihm, die angefangene Entwickelung in derselben Weise weiter zu führen? Offenbar nicht, denn dazu bedurfte es keiner neuen wesentlichen Eigenschaft. Die Natur hat nie ohne Zweck geschaffen; so wie er das Anfangsglied einer neuen Reihe ist, so ist auch seine Bestimmung eine andere.

Die hier entworfene Skizze, nach den wirklichen Vorgängen in der Natur gezeichnet, führt uns nun zwei Kräfte vor, eine b i n d e n d e und eine l ö s e n d e. Unter dem Einflusse der erstern würde die Natur erstarren und dem ewigen Tode anheim fallen, daher bekämpft und besiegt denselben die andere, sie ist das Leben selbst, welches vom Anfang an thätig war, aber in der Materie gebunden nur allmälig durch den Weltbildungsprozeß zur Freiheit gelangt. Das Leben entfaltet sich von Stufe zu Stufe, gelangt aber erst im Menschen wieder zur freien Selbstbestimmung. Das unorganische Reich gestaltet sich nur unter äußeren Einflüssen, das organische zugleich durch einen innern Prozeß. Im Thierreich zeigt sich zuerst wieder Sensibilität und ein Wille, aber bedingt durch äußere Verhältnisse und unzweifelhaft auch durch Erfahrung. Beim Menschen allein aber unterliegt der Wille zugleich der Vernunftbestimmung. Nach der Entwickelungsgeschichte der Erde ist also die Materie das freiwillig entäußerte, gefesselte Leben, die bindende Kraft, der eigentliche Tod. Aus sich selbst und durch sich selbst vermag die Materie nichts, sie zieht Alles mit sich in den gleichen Zustand, sie bindet und vernichtet das Leben. Hierdurch jedoch geschieht es, daß sie, im Augenblicke ihres Werdens, wo sie das freie Leben zu vernichten strebt, dieses an sich bindet, ohne es ganz aufheben oder vernichten zu können. Die Weltenbildung und die Lebensentfaltung wird durch diese Verbindung allein möglich, sie schafft aus dem starren Atome das bewegliche Molecül, aus welchem die Erde aufgebaut ist. Da aber die im Molecül liegenden Kräfte in einem bestimmten Größenverhältnisse zu einander stehen, so können auch alle Erscheinungen nur nach bestimmten Gesetzen vor sich gehen und diese Gesetze sind die Naturgesetze. Mit der Schöpfung der Materie ist zugleich das Molecül gesetzt und die ganze Reihe der Naturereignisse bis herauf zum Menschen. Das freie Leben trägt aber die Welten in seinem Schooße und bleibt nicht müßiger Zuschauer bei ihrer Entwickelung, es tritt in ihre Prozesse ein, aber auch hier nur nach bestimmten Gesetzen, welche von der Art und Weise abhängen, wie diese großen Schauplätze der Lebensentfaltung auf das freie Leben einwirken, nach dem Gesetze der G e g e n w i r k u n g. Bis zur Schöpfung des Menschen herauf war nun die Wirkung der Erde auf das freie Leben eine bedingte, also war auch die Gegenwirkung eine bedingte. — Mit dem Auftreten der Vernunftwesen ändert sich dieses Verhältniß; der freie Geist ist nicht mehr an die Schranken der Nothwendigkeitsgesetze gebunden und seine freie Thätigkeit ruft auch entsprechende Gegenwirkungen hervor. Die Natur-

prozesse hatten sämmtlich nur einen Zweck, nur ein Ziel, nämlich die Schöpfung vernünftiger Wesen; alles Andere war Vorbereitung. Die zahllosen Verbindungen von der ersten bis zu den Uebergangsstoffen, von der ungestalteten organischen Materie bis zum Menschen, waren alle nothwendig, um in diesem eine Kraft zu schaffen, welche fähig wäre, das gebundene Leben zu befreien, den Tod zu vernichten. Dem Menschen ist das schwerste, aber auch das schönste Loos gefallen, durch die Vernichtung der Materie aus eigener freier Kraft sich seinen Geist selbst zu schaffen.

Das allgemeine Leben ist der Geist, ist Gott; seine nothwendigen Attribute sind Unendlichkeit in Zeit und Raum. Der Geist, der nun nicht denkt, ist kein Geist, das Leben, das nicht schafft, kein Leben; Denken und Schaffen sind daher bei Gott, dem Geiste, Eins, und der Gedanke Gottes ist die Welt. Weil nun Gott nicht Gott sein kann, ohne zu denken, d. h. ohne zu schaffen, ist die Schöpfung ohne Anfang und ohne Ende. Gott hat aber die Welten geschaffen aus sich, aus Theilen seiner selbst, die er sich entgegengesetzt, um sie durch den Entwickelungsprozeß der Welten wieder an sich zu ziehen. Die Welt ist also wesentlich nicht Gott selbst, sondern etwas ihm Gegenständliches, was durch seine Hingebung an sie wieder zu ihm zurückkehrt. Hieraus geht hervor, daß in der ganzen Natur kein Entstehen stattfindet, sondern nur ein Werden, ein Uebergang aus einer niederen Form in eine höhere, und daß stete Annäherung an das höchste Wesen das Ziel alles Werdens ist. Zugleich ergibt sich ferner, daß auch der fesselfreie Geist, bei seiner Rückkehr in das allgemeine Leben, sein besonderes Bewußtsein nicht verlieren kann; dies kann nur dann eintreten, wenn er, von Neuem in der Materie gebunden, seine Freiheit wieder verliert. In der Natur waltet also nur ein höchstes Gesetz, in welchem alle besonderen Naturgesetze zusammenfließen, das Streben nach Freiheit, nach Entfesselung des Geistes; ihm huldigen die unbelebte wie die belebte Natur. Für den Menschen enthält dieses Gesetz die ganze Sittenlehre: wer diesem Gesetze folgt, wer die Freiheit in sich und seinen Mitmenschen fördert, folgt dem göttlichen Willen; wer ihm entgegenstrebt, ertödtet seinen eigenen Geist, entäußert sich seiner Bestimmung und fällt auf die Thierstufe zurück. Die Menschen, als freie Wesen, schaffen sich ihr Jenseits selbst, Gott lohnt und straft sie nicht, sie thun es selbst. In dem Streben nach Freiheit ist die fortschreitende Entwickelung der Erde begründet, es duldet keinen Stillstand, keinen Rückschritt. Die Bildungsgeschichte der Erde belehrt uns, daß, wenn die Thätigkeit zu ruhen schien, dies nur ein Ansammeln der Kräfte war, welche dann nur um so rascher und gewaltsamer die Fortentwickelung beförderten. Die irdischen Verhältnisse dulden keine feststehenden Formen, weil sie der Ausdruck des Stillstandes sind; diesem müßte die Vernichtung folgen, als gegen das göttliche Gesetz gerichtet. Die Menschen, in ihrer Gesammtheit, huldigen daher dem Fortschritte, denn wenn dieses nicht so wäre, so würde die Schöpfung derselben ihrem Zwecke nicht entsprochen haben, die Schöpfung kennt aber keine Mißgriffe. Individuen, ja Völkergruppen können dem göttlichen Gesetze widerstreben, sie fördern aber dadurch nur ihren eigenen Untergang; denn keine Macht der Erde vermag das höchste Gesetz zu brechen. Aus dem Kampfe der widerstreitenden Kräfte ist die physische Welt hervorgegangen; derselbe Kampf der bindenden und lösenden Thätigkeiten geht auch durch die Geisteswelt der Menschen, aber der Sieg ist nicht zweifelhaft, er führt uns endlich zur Freiheit.

Zu dieser Anschauung gelangt man mit Nothwendigkeit, wenn man ohne vorgefaßte Meinung die Naturerscheinungen prüft und besonders keine ohne genügende Ursache an sich vorübergehen läßt. Ihre Grundlage ist ein höchstes

Wesen, Gott als höchste Intelligenz, neben dem es nichts Anderes geben kann, was nicht aus ihm und durch ihn hervorgegangen ist. Was aber auf diese Art aus ihm herausgetreten, ist nicht mehr Er selbst, sondern ein Gegensätzliches, das jedoch in der Weltentwickelung diese Eigenschaft immer mehr verliert und endlich wieder zu Gott zurückkehrt. Das Weltleben ist der große Prozeß, durch welchen diese Rückkehr geschieht. Jede vorurtheilsfreie Naturforschung führt auf dieses Prinzip in der Welt: es ist das Prinzip der lösenden Kraft.

Um das Ziel der ganzen bisherigen Darstellung zu erreichen, wird es nöthig, noch eines anderen Systemes zu gedenken, welches sich bei den Menschen neben dem ersten und noch früher als dieses entwickelt hat und überhaupt zu einer großen und ausgedehnten Geltung gelangt ist. Nach diesem Systeme ist die Materie das allein wirklich Seiende und außer ihr gibt es nichts. Sie ist von Ewigkeit her vorhanden, unvergänglich und mit gewissen Eigenschaften und Kräften ausgestattet. In Folge dieser Kräfte sind die materiellen Theilchen genöthiget, Verbindungen unter sich einzugehen und sich zu neuen Körpern zu vereinigen, welche auch neue und höhere Eigenschaften besitzen. So steigern sich in jeder neuen Verbindung die Eigenschaften immer höher, auf einer gewissen Stufe entsteht die organische Materie und das Leben. Durch diese wird die Entwickelung fortgesetzt bis zum Menschen, als Ziel dieses ganzen Prozesses. Das Leben ist ein bloßes Naturleben, eine Thätigkeitsäußerung der Materie. Was man Geist nennt, was in uns durch die Materie wirkt, aber doch als von dieser verschieden gedacht wird, gibt es nicht. Die Funktionen des sogenannten Geistes gehen von denjenigen Theilen der organischen Materie aus, welche man Gehirn und Nervensystem nennt. Wenn nun der Mensch stirbt, so zerfällt diese Materie wieder in ihre Bestandtheile und mit ihr der Geist, weil er eben nichts Anderes ist, als eine Kraftäußerung der Materie. In diesem Systeme ist Gott die Gesammtheit aller Menschengeister, der Einzelgeist vergeht, aber der Gesammtgeist, der stets wieder verjüngt wird, lebt ewig. Auch der Mensch ist unsterblich, in so fern als die Materie, welche seinen Körper bildet, unvergänglich ist und nach dem Tode immer wieder in andere Organismen eintritt.

Diese Ansicht, mit den mannigfachsten Veränderungen, aber doch mit der gleichen Grundlage, ist das Schooßkind unserer Zeit geworden, und sie ist bezeichnend für alle unsere Zustände ohne Ausnahme. Wer ihr nicht huldigt, läuft Gefahr, für einen Unwissenden oder doch mindestens für einen gutmüthigen Schwärmer gehalten zu werden. Daß uns die neuere Philosophie auf diesen Weg geführt hat, darüber wird sich derjenige nicht wundern, welchem das Verhältniß der Philosopheme zu den Naturwissenschaften nicht unbekannt ist. Aber auch die Empirie, die Hauptstütze der Naturwissenschaften, wenn sie aus ihren natürlichen Schranken heraustritt, kann uns auf diesen Weg bringen. Die Wage einerseits, das Messer und das Mikroskop andererseits, sind von unschätzbarem Werthe, sie werden uns immer mehr Aufschlüsse über die Vorgänge in der Natur gewähren, sie werden das Material vervielfältigen und fortwährend größere Sicherheit geben für den Bau, welchen zuletzt aber doch nur der Geist aufzuführen im Stande ist. Die Empirie ist mit Recht die Seele der heutigen Naturwissenschaften, aber über die letzten Dinge kann sie allein nicht entscheiden.

Diese zweite Ansicht, welche also gleichfalls von den Vorgängen in der Natur ausgeht, nur in anderer Auffassung, könnte man das Prinzip der Materie, der bindenden Kraft nennen. Sie geht von der Materie aus, und läßt aus ihr durch einen innern Prozeß die Welt entstehen. Sie setzt also

eine Selbststeigerung der Kräfte voraus, eine Wirkung ohne Ursache und somit eine Unmöglichkeit. Die Materie lebt nicht, denkt nicht, kommt aber doch in ihren Verbindungen zum Leben und Denken, erhebt sich also durch sich selbst bis zum Menschen. Bei diesem innern Widerspruch sind alle weiteren Bemerkungen überflüssig. Welch schöne Folgerungen man auch aus dieser Ansicht ziehen mag, so ist sie doch der reine Ausdruck, die Lehre der Selbstsucht; diese gebiert nothwendig die Unterdrückung, die Vernichtung der Freiheit, sie hemmt die Entwickelung des Geistes und sucht ihn zu vernichten. Wer einen Blick auf die Zustände unserer Tage wirft, sieht die Verfechter dieser Lehre, nur mit verschiedenen Masken vor, auf entgegengesetzten Seiten stehen und sich bekämpfen; — natürlich, denn ihr Streben geht nach dem gleichen Ziele. Je höher aber dieser Zustand steigt, desto rascher wird er seinem Untergange entgegen gehen. — Man vergleiche zuletzt noch den Standpunkt des Menschen nach den beiden verschiedenen Systemen. Dort ist der Mensch der Kämpfer Gottes und mit Gott der Schöpfer seiner Freiheit, seines Geistes; er wird sich einstens im Ganzen auch noch als Theil des Ganzen fühlen, je mehr er hier seine Bestimmung erreicht hat. Gelangt aber das Menschengeschlecht zu seiner wahren Bestimmung, so erreicht es auch zugleich seine höchste irdische Glückseligkeit. Auf dem zweiten Standpunkt dagegen ist der Mensch auf das Erdenleben allein angewiesen und die Genüsse dieses Lebens sind sein höchstes Ziel. Auf dieser Seite steht das ganze Heer der Leidenschaften, ungebändiget durch entgegenstehende Pflichten; alle Kultur hat nur einen Zweck, die Verfeinerung des Lebens und seiner Genüsse. Wenn wir dessenungeachtet so manchen Edeln finden, der sich zu dieser Richtung bekennt, so können wir mit Sicherheit annehmen, daß er es nicht auf dieser Grundlage sei, daß in ihm eine Ahnung des Wahren und Besseren noch immer die Oberhand habe und oft nur eine falsche Scham ihn abhalte, es offen zu bekennen. — Sehr leicht können Forschungen in einzelnen Theilen der Natur zu einer einseitigen Richtung führen, welcher man endlich mit Widerstreben sich hingibt; man stelle aber nur den Zusammenhang mit dem Naturganzen her, und die Täuschung wird sich leicht finden. Meistentheils beruhen aber solche Verirrungen auf wirklichem Mangel an umfassender Naturkenntniß, wozu noch kommt, daß man darin auf einer höheren Stufe zu stehen glaubt, als es wirklich der Fall ist. Man besitzt noch keine Theorie, welche alle Erscheinungen umfaßt, aber doch Theorien für die einzelnen Theile, welche bei näherer Prüfung unter sich in geradem Widerspruche stehen. Ueberhaupt ist es wunderbar, was in den Naturwissenschaften, auf welche die Menschen so stolz sind, alles vorgeht, und wie dem Einen eine Sache sehr natürlich erscheint, welche einem Andern unbegreiflich vorkommt, z. B. die Wirkung einer Kraft in die Ferne, ohne zwischenliegendes Medium, als Träger derselben; oder die Fortdauer einer Bewegung durch einen einmaligen Anstoß, welche in jedem Augenblicke aufgehoben wird, ohne daß man eine Kraft kennt, welche sie in jedem Augenblicke auch wieder erneuert. In der Philosophie der Natur werden wir so lange keine Fortschritte machen, als wir nicht einzusehen vermögen, daß jeder Thätigkeitsäußerung, von welcher Art sie auch sein mag, die Anregung dazu unmittelbar vorhergehen muß, und daß wir die Natur nicht mit einem Wagen vergleichen können, welcher, einmal in Bewegung gesetzt, eine Zeitlang von selbst fortläuft.

Bei der Darstellung dieser beiden Richtungen haben wir eigentlich schon in die vierte Periode, die der geistigen Thätigkeit, übergegriffen; da aber beide Prinzipien durch die Natur gehen, so müssen sie sich auch nothwendig in dem Naturprozesse der geistigen Thätigkeit wieder finden und ihre Kenntniß wird

das Verständniß der Erscheinungen auf diesem Gebiete erleichtern. Wir haben von andern Richtungen nicht gesprochen, weil, wie sie auch beschaffen sein mögen, sie auf eine von den beiden obigen zurückkommen; alle sind aber, wie die Folge zeigen wird, von der Natur, d. h. von der Wirklichkeit, ausgegangen. Es gibt aber noch einen sehr verbreiteten Zustand, von welchem hier gar nicht die Rede sein kann, weil er keine Vorstellungen der höchsten Dinge kennt, weil in ihm das Höchste mit dem Unbegreiflichen zusammenfällt. Wer nicht von der Trias, Vielheit, Räumlichkeit und Kraft, oder Zahl, Form und Thätigkeit ausgehen kann, wird nicht zur Wahrheit gelangen, weder in den sinnlichen, noch in den übersinnlichen Dingen.

Die Oberfläche der Erde.

Die Oberfläche der Erde bietet dem Beobachter ebenfalls eine Stufenfolge dar, welche uns über das relative Alter der Erdtheile einigen Aufschluß gibt. Am einfachsten und ganz ohne Gliederung stellt sich Afrika dar; die einförmig fortlaufenden Küsten erheben sich in Absätzen und steigen zu einem ausgedehnten Hochlande an. In seinem Umrisse den einfachsten Organismen vergleichbar, hat es zu seiner Ausdehnung, seiner Fläche den geringsten Umfang. Ganz eigenthümlich sind diesem Erdtheile die parallel mit den Gestaden aufsteigenden Terrassen mit ihren eben so fortlaufenden Erhebungen, welche häufig durchbrochen werden von den Wässern, welche sich nur durch wild zerrissene Schluchten zwischen steilen hohen Felswänden hindurch arbeiten. Solche Flußbecken sind ein Bild der Zerstörung, bedeckt mit den Trümmern der zerrissenen Gebirge, und nur da, wo die Flüsse den Bergen entlang sich hinziehen und bei geringem Gefälle in größere Breite sich ausdehnen, nehmen die Thäler eine freundlichere Gestalt an. Hier findet man nicht jene weiten fruchtbaren Tiefländer, jene ausgedehnten Flußgebiete, welche nur bei stärkerer Gliederung des Festlandes entstehen können und welche allein der Sitz des verfeinerten Lebens und der ersten Kultur geworden sind. Von dem Süd-Ende Afrika's in nordöstlicher Richtung zieht sich ein Hochland, dessen Beschaffenheit wir nicht kennen, und dehnt sich bis in das Alpenland Abyssinien aus. Dieses Hochland bildet die Wasserscheide, nach Osten zum indischen Ocean und nach Westen zum äthiopischen Meere. Der westliche Abhang dehnt sich zu einem großen Gebirgslande mit abwechselnden Plateau's aus, welches über ganz Guinea reicht und den allgemeinen Charakter der afrikanischen Gebirgsländer an sich trägt. Die größte Höhe scheint in der Nähe des Aequators zu liegen, wo auch der westliche Arm des Niles, der Bahr el Abiad, seinen Ursprung zu haben scheint. Nordwestlich von dieser Gegend vermuthet man ein anderes Hochland, welches seinen nördlichen Abfall gegen die große Wüste, den westlichen aber gegen den Busen von Guinea und den Niger hat. Der Niger unterbricht diese Gebirgsländer, aber nach Westen erhebt sich das Land von Neuem und die Kong-Gebirge ziehen in großer Ausdehnung in dieser Richtung fort. Im Norden verflacht sich Afrika gegen die große Wüste, und nur im Osten zieht sich das Bergland allmälig abfallend mit dem Nil gegen das mittelländische Meer. Die Wüste selbst ist durch Fezzan getheilt, im Osten die lybische Wüste und im Westen die Wüste Sahara mit ihrem Abfalle nach dem atlantischen Ocean. Die Nordküste Afrika's ragt inselartig aus dem Meere und der Sandwüste hervor, mit mehr europäischem, als afrikanischem Charakter. Im Osten über dem rothen Meere liegt die Halbinsel Arabien, welche, obschon zu Asien gerechnet und mehr

mit diesem Erdtheile als mit Afrika verbunden, doch ganz den Charakter eines afrikanischen Landes trägt. Hier finden sich ganz die gleichen Formen der Thäler, der Schluchten und der Erhebungen, der Mangel an Gliederung, dieselbe Zerrissenheit und Zerklüftung; höhere Berge fehlen jedoch und daher auch die davon-abhängige Bewässerung.

Die geschilderten Verhältnisse deuten darauf hin, daß Afrika der Erdtheil ist, welcher am frühesten dem Meere entstiegen. Gehoben in verschiedenen Perioden, hat sich seine Oberfläche immer vergrößert, und obgleich sie auch sonst den Einwirkungen der vulcanischen Kräfte des Erdinnern nicht entgangen ist, so haben diese doch keine wesentlichen Veränderungen des allgemeinen Charakters hervorrufen können. Die große Wüste ist gehobener Meeresboden, wahrscheinlich die letzte Erhebung, welche noch in die Zeit des Menschengeschlechtes gehören mag, und durch welche Nordwest-Afrika mit der Hauptmasse dieses Erdtheiles verbunden und vielleicht zugleich auch von Europa getrennt wurde. Eine andere wichtige Veränderung, von welcher sich die Sagen noch erhalten haben, betrifft die Verbindung mit Arabien. Durch das jetzige Nildelta stand früher das Mittelmeer mit dem rothen Meer in Verbindung, während die Halbinsel bei der Straße Bab-el-Mandeb mit Afrika verbunden war. Wie in Europa durch den Schlamm, welchen der Rhein mit sich führt, ganz Holland angesetzt wurde, so versumpften auch, noch in höherem Maaße, die Mündungen des Nil und stellten daselbst die Verbindung mit Asien her und das rothe Meer brach sich einen Ausweg an der genannten Stelle. — Afrika ist uns bis jetzt noch ein ziemlich unbekannter Erdtheil, besonders wissen wir von seinem Innern sehr wenig; es verdient jedoch hervorgehoben zu werden, daß das innere Hochland beträchtliche Binnenseen enthalten soll, was in neuerer Zeit auch theilweise schon nachgewiesen worden ist.

Auf zweiter Stufe, der Ausbildung und dem Alter nach, steht Asien. Während man hier und da noch an Afrika erinnert wird, tritt doch schon eine gewisse Mannigfaltigkeit hervor. Die Gliederung ist stärker vorgeschritten, das Verhältniß der Küstenlänge zum Flächengehalt stellt sich viel günstiger, 1 : 105; der Flächengehalt der Glieder (Halbinseln) zum Hauptstamm ist 1 : 4. Bei den Gliedern ist die Küstenlänge zum Inhalt wie beinahe 1 : 37. Der Kern des asiatischen Festlandes ist ein großes Hochland, seiner hohen Lage wegen kalt und unwirthlich. Der nördliche Theil bildet ein großes Becken, größtentheils Sand- und Steinmasse mit Salzboden und ist umgrenzt von hohen Bergen. Im Süden geht es in ein noch höheres Gebirgsland, Tübet, über, dessen Südgrenze der Himalaya bildet; hier nehmen die wichtigsten Flüsse Asiens ihren Ursprung. An diesen Kern schließen sich als Glieder an, im Norden das sibirische Tiefland nebst Turan, aus welchem sich das Uralgebirge inselartig erhebt. An dieses reiht sich südwestlich der Kaukasus, Kleinasien und das Plateau von Iran, welches wieder durch den Hindu-cho und Kuen-lün mit dem Hauptkörper zusammenhängt. Das Euphratgebiet vermittelt die Verbindung mit Arabien, das Indus- und Gangesgebiet mit der Halbinsel Dekan. Der Brahmaputur und der Indus schließen das System des Himalaya ab, aber das System des Hindu-cho und Kuen-lün geht in die Gebirge Hinter-Indiens und China's über. Vom östlichen Tübet gehen eine Menge Gebirgszüge aus, ein sehr verwickeltes System, durch welches große Flüsse gewaltsam sich Bahn gebrochen haben. Nordöstlich zieht sich das Hauptland Asiens in vielen Gebirgen bis zur Behringsstraße, und auf der südlichen Seite zieht sich eine Reihe zum Theil sehr großer Inseln hin.

Während die Hauptmasse des Hochlandes theils durch seine Lage, theils

durch seinen Boden nur ein unerfreuliches Bild gewährt und so auch die nördlich hiervon gelegenen Länder durch ihr Klima, sind dagegen die übrigen Glieder, mit Ausnahme eines Theiles von Iran, reich ausgestattet. Die Flußgebiete des Euphrat, Indus, Ganges, Yang-tse-kiang und Hoang-ho waren vor Jahrtausenden die Wiege der asiatischen Kultur und würden bei gehöriger Pflege noch heute zu den gesegnetesten Gegenden der Erde gerechnet werden müssen. Die frühere Beschaffenheit Asiens ist besonders hervorzuheben. Sibirien ist noch nicht so lange dem Meere abgewonnen, theils durch Anschwemmungen aus dem Hochlande, theils durch Hebung seines Bodens. Das Meer bespülte die Vorberge des Altai und des Wiljuiski, den Fuß des Kaukasus und die Nordterrasse Irans. Kleinasien und Iran bildeten eine lange Insel, mit Arabien nur an der äußersten Westspitze und mit dem Hauptkörper Asiens nur durch den Hindu-cho verbunden. Dekan war eine große Insel, und die Wüste Gobi ein großes Binnenmeer. Der Ural ragte als lange Insel aus dem Meer empor, dagegen scheinen die südlichen Inseln einen Theil des Festlandes ausgemacht zu haben. Auf gewöhnlichem Wege, durch Anschwemmungen, entstanden die späteren Flußgebiete, und während durch innere Kräfte die nördliche Hälfte gehoben wurde, fiel ein Theil des Südens unter den Meeresspiegel. Diese Veränderungen fallen zum Theil noch in die Zeit des Menschengeschlechtes; sie waren die Ursache der Entleerung des großen Binnenmeeres und einer großen Veränderung in dem Klima des Hochlandes.

Europa, jetzt ein bloßer Anhang von Asien, war früher nur eine Gruppe von Inseln. Ganz Rußland und Polen, das nördliche Deutschland und das westliche Frankreich, ein Theil von England und Schweden, bestehen aus später gehobenem Lande. Die Flußgebiete der Rhone, des Po und der Donau sind angeschwemmtes Land, welches die getrennten Gebirgsländer mit einander in Verbindung brachte. Europa nimmt die erste Stelle unter den Theilen der alten Welt ein und mag seine Hebung gleichzeitig mit der letzten Asiens erhalten haben. Das Verhältniß der Glieder zum Körper ist wie 1 : 3; das der Küstenlänge zum Inhalte wie 1 : 37 und in den Gliedern wie 1 : 15, welche Verhältnisse die günstigsten in der alten Welt sind. Unser Erdtheil besitzt viele schiffbare Flüsse, welche das Innere zugänglich machen, aber nicht jene weiten Stromgebiete, welche vorzugsweise eine frühe und großartige Kultur bedingten.

Wirft man zuletzt noch einen Blick auf die gesammte alte Welt, so erkennt man sogleich eine Ländergruppe, welche die verschiedenen Theile vermittelt und auf dem Landwege in Verbindung bringt, Arabien, Iran und Kleinasien; ihre Bedeutung muß späteren Betrachtungen vorbehalten bleiben. Europa stand durch den Seeweg in nächster Verbindung mit Afrika, während es durch unwirthliche Steppen und die Sümpfe des Aralsee's und des kaspischen Meeres von Asien abgeschlossen war. Aber auch zwischen Afrika und Asien war das Meer die früheste Vermittlerin, selbst bis nach China und den fernen Inseln des stillen Oceans.

Amerika ist von den Theilen der alten Welt wesentlich verschieden durch seine geringere Gliederung und durch seine mehr innere Organisation, wodurch es eine noch höhere Stufe einnimmt. Das Verhältniß der Küstenlänge zur Oberfläche ist nur 1 : 9⅓, aber die größten Ströme der Erde führen auch in die innersten Landestheile, mächtigen Circulationsgefäßen vergleichbar. Die Zukunft dieses Erdtheiles stellt sich daher am günstigsten, selbst dann noch, wenn man auch zugeben muß, daß in unsern Zeiten die Menschen die größten Hindernisse für den Verkehr glücklich zu beseitigen wissen.

Die Schöpfung der Menschen und ihre Ursitze.

Die Erde hat in den verschiedenen Epochen ihrer Ausbildung auch verschiedene, aber immer höhere Kräfte entwickelt, indem das früher Erzeugte das unmittelbar Folgende mitbilden half. Jeder höheren Thierschöpfung ging eine andere voraus, als nothwendige Grundlage, als vorbereitende vermittelnde Kraft. War die Zeit für eine neue Bildung reif geworden, so konnten die Bedingungen hierfür keine beschränkten, rein örtlichen gewesen sein, vielmehr muß man annehmen, daß sie ziemlich allgemein verbreitet waren und die neuen Geschöpfe gleich in vielen Individuen entstanden sind. Dies wird um so mehr Geltung haben, je weiter man in die Schöpfungsgeschichte hinaufgeht, wo die äußeren Verhältnisse fast durchgängig gleich waren; später, wo schon ein Unterschied des Klimas fühlbar wurde, war natürlich hierdurch eine Beschränkung gegeben. Das Entstehen von Landthieren setzt flache, ruhige, vielgetheilte Binnengewässer voraus als Medien für die Entwickelung. Die allgemeine Kraft war auf die Zeugung eines bestimmten Organismus gerichtet, welcher aber, je nach der Beschaffenheit der zusammenwirkenden drei Faktoren, eine mehr oder weniger abweichende Bildung erhielt. Die Natur zeigt uns heute noch, wie sie bei der Schöpfung thätig war: sie läßt viele tausend Keime aus einem Individuum hervorgehen, von denen aber nur die wenigsten ihre Bestimmung erreichen. Ist auch die Hauptsache geschehen, das befruchtete Ei vorhanden, so drohen demselben während seiner Entwickelung auch wieder zahllose Gefahren, und selbst von den jungen lebensfähigen Geschöpfen gehen die meisten zu Grunde, ehe sie die Zeit ihrer vollen Entwickelung erlangt haben. Bei der Urerzeugung mußten also zahllose Keime geschaffen werden, und die verschiedenen Thiergattungen entstanden in vielen Individuen zugleich. Dieselben Verhältnisse gelten auch für die Schöpfung des Menschengeschlechtes; eine höhere Thierwelt war ihm vorhergegangen und diente ihm als Grundlage; überall, wo die örtlichen Umstände den Bedingungen der Zeugung entsprachen, entstiegen die Menschen dem Schooße der Erde. Waren die Faktoren, welche zur Zeugung und Entwickelung zusammenwirken mußten, alle ganz gleich, so entstanden auch Menschen von vollkommener Aehnlichkeit; eine Abweichung derselben brachte auch eine größere oder kleinere Verschiedenheit bei den Produkten hervor. Im Allgemeinen kann man sagen, daß Menschen, die ungefähr zur selben Zeit und unter denselben äußeren Verhältnissen erzeugt wurden, auch eine gewisse Uebereinstimmung zeigen mußten und daß die später Gezeugten die früheren an Vollkommenheit übertrafen.

Blickt man nun nach den Punkten der Erde, welche nicht allein die äußeren Bedingungen für die Erzeugung, sondern auch für die Erhaltung der Menschen darboten, so kann man dafür nur Afrika und Asien erkennen. Die Hochlande dieser Erdtheile, in ihrer früheren Beschaffenheit, dürften ganz dem Bilde entsprochen haben, welches uns in alten Sagen von dem Paradiese überliefert worden ist. Die Gründe für diese Annahme liegen in den geographischen und geologischen Verhältnissen und finden sich in so günstiger Weise in keinem andern Erdtheile wieder, wobei man jedoch beachten muß, daß nach allen Erfahrungen über die Entwickelung des Menschengeschlechtes in einem Zeitraum von 6000 Jahren, dieses bei weitem älter geschätzt werden muß, als man im höchsten Falle anzunehmen gewohnt ist. In Afrika haben wir nicht fern vom Aequator, in Asien in der Nähe des 40. Breitegrades die Ursitze des Menschengeschlechtes zu suchen. Die Verschiedenheit der klimatischen Einflüsse beider Gegenden und

der dadurch bedingten übrigen Verhältnisse, nöthigt zu dem Schlusse, daß auch an beiden Orten die Menschen ungleich in ihren körperlichen und geistigen Anlagen aufgetreten sein müssen. Bei der Urerzeugung haben die äußeren Verhältnisse Alles gethan, um den zu schaffenden Wesen die durch sie bedingte und allein mögliche Form zu geben. Aber in dieser Form sind auch die Bedingungen, welche sie erzeugt, zugleich festgehalten, und spätere veränderte Einflüsse auf dieselbe konnten nicht im Stande sein, ihr ganzes Wesen wieder umzuändern. Klimatische Einflüsse bringen wohl Veränderungen hervor, nie aber vermögen sie eine Rasse in die andere überzuführen. Im Anfange der Schöpfung organischer Wesen war die Richtung der Schöpfungskraft eine vielfach getheilte, daher die Mannigfaltigkeit der geschaffnen Wesen. Später concentrirte sich dieselbe immer mehr; die Natur hatte ein Ziel zu erreichen, ein Vernunftwesen ins Dasein zu rufen. Zu diesem Zwecke flossen alle Kräfte zusammen, der Mensch trat ins Leben; aber überall, wo er entstand, nur als Mensch, eine Vielheit vernünftiger Wesen war unmöglich. Wie gering auch die Verschiedenheit zwischen Mensch und Mensch ursprünglich gewesen sein mag, so war sie doch groß genug für den Kampf der Herrschaft des einen über den andern; wäre sie noch größer gewesen, so hätte dieser Kampf ein Vernichtungskrieg werden müssen und die Natur wäre in Widerspruch mit sich selbst gekommen. Wir haben daher überall nur den Menschen und nur mit denjenigen körperlichen und geistigen Unterschieden, welche ihn zu dem großen Kampfe antreiben, der durch die ganze Natur geht, und der die Grundbedingung für jede höhere Entwickelung ist.

So wie Afrika der ältere Erdtheil ist, so scheinen auch die Menschen daselbst am frühesten ins Dasein getreten zu sein. Faßt man die Verhältnisse der Gegenwart ins Auge, so zeigt sie uns eine sehr verschiedene, aber durchweg farbige Bevölkerung, jede Abstufung vom lichten Braun bis zum dunkeln Schwarz. Ebenso lassen sich in der Gesichtsbildung die Uebergänge verfolgen von dem Ausdrucke des gewöhnlichen Negers der Niederungen bis zum schönen Profil mit der Adlernase. Der Haarwuchs, so charakteristisch für den Neger, ist durchaus nicht immer das Wollhaar, er geht auch ins gelockte und schlichte Haar über. Nimmt man hierzu noch die alten Aegypter mit ihrer helleren oder dunkleren rothbraunen Farbe, ihrem meistentheils schlichten Haare und ihrer vorspringenden Gesichtsbildung, so sieht man leicht ein, daß alle diese Verschiedenheiten nicht bloß Wirkungen verschiedener klimatischer Verhältnisse sein konnten. Hier bleibt nur die Annahme übrig, daß Afrika verschiedene Rassen hervorgebracht hat, welche bei aller Verschiedenheit dennoch ihren gemeinsamen Geburtsort nicht verläugnen können.

Ganz ähnlich stellen sich die Verhältnisse in Asien, welches der Ursitz der weißen Rassen gewesen ist. Man unterscheidet hier schon deutlicher zwei Rassen, mit ihren durch Vermischung hervorgerufenen Zwischenstufen, die eigentlich weiße oder kaukasische Rasse und die mongolische oder chinesische Rasse. Beide zeigen außer der ungefärbten Haut sonst noch manche Uebereinstimmung, besonders in den geistigen Anlagen.

Die Stammrassen sind übrigens im Laufe vieler Jahrtausende so durcheinander geworfen worden, es haben sich so viele Zwischenstufen gebildet, welche jetzt zum Theil als primitive Rassen angesehen werden, daß es sehr schwer fällt, die Wahrheit herauszufinden, und hierzu wird es nöthig, den Menschen nicht bloß nach seiner äußern Verschiedenheit, sondern auch nach seiner ganzen geistigen Richtung zu nehmen. Zuerst ist eine Thatsache festzuhalten: die Menschen sind an ihren beiden Entstehungsorten in doppelter Form aufgetreten, in einer höheren,

sowohl in körperlicher, als geistiger Hinsicht, und in einer andern oder mehrern andern, der ersten in jeder Beziehung nachstehend. Die höheren Rassen haben an beiden Orten ihre Ursitze verlassen, freiwillig oder von den andern verdrängt; sie sind hierdurch in unmittelbare Berührung getreten und haben den Anstoß zur höheren Form des Lebens gegeben. Wenn diese Verhältnisse schon die Unterscheidungen sehr erschweren, so kommt noch ferner dazu, daß auch die beiden andern Rassen zum Theil ihre frühere Heimath verlassen und in weiten Zügen sich verbreitet haben. So wie die Umstände liegen, bedarf es wahrlich keiner gekünstelten Erklärungen für das Auftreten der Rassen an oft weit entfernten Orten und für die Uebergänge aus der einen in die andere. Zur Bekräftigung der Wirkungen klimatischer Einflüsse hat man Beispiele angeführt, wo Stämme fremder Rassen mitten unter andern Völkern sich niedergelassen und schon nach einigen Jahrhunderten völlig umgewandelt worden waren. Die Ursache einer solchen Erscheinung ist nicht sehr ferne zu suchen, sie liegt einzig in der geschlechtlichen Vermischung, welche keine Maßregel zu verhindern, kein Vorurtheil zu besiegen vermag, und welche gerade da am meisten eintritt, wo die Gegensätze am stärksten sind.

Der Mensch, so wie er dem Schooße der Erde entstiegen war, brachte nichts mit, als die Anlage zum vernünftigen Wesen; was er werden sollte, mußte er durch sich selbst werden, zuerst im Kampfe mit der Natur und dann im Kampfe gegen sein eigenes Geschlecht. Nicht so hülflos bei seiner Geburt wie jetzt, stand er den Thieren nicht nach und brachte wie diese den Instinct mit auf die Welt, welchen ihm später die Kultur geraubt hat, und der ihn die Gefahren vermeiden und das Nöthige zur Erhaltung seines Daseins ergreifen lehrte. Der erste Mensch, in stetem Kampfe mit der Außenwelt, konnte nur sich allein eine Berechtigung zugestehen, und nur die Gefahr, die er selbst und allein nicht zu bewältigen vermochte, brachte ihn zur Verbindung mit seinen Nebenmenschen, zum ersten stillen Vertrage, zur ersten Beschränkung seiner ungezügelten Freiheit. Eine andere Schranke zogen auch die geschlechtlichen Verhältnisse, und so mußten sich bald die Menschen, die in unmittelbarer Nähe ihr Dasein erhalten hatten, zu einem größeren Verbande zusammen finden. Wenn nun schon die Glieder einer solchen größeren Familie unter sich nur wenig verschieden sein konnten, so mußten sich durch Vermischung auch diese kleinen Unterschiede völlig ausgleichen, und hieraus gingen erst die Rassen hervor, Menschen, gemacht wie aus einem Gusse.

Die Sprache.

Eine nothwendige Bedingung der Abstammung aus einer solchen Familie ist die Gleichheit der Sprache. Die Menschen haben auch nur die Sprachanlage mit zur Welt gebracht und sich nachher ihre Sprache selbst geschaffen, jede Gruppe nach ihrer eigenen und innerlichen Weise. Die lebendige Bedeutung der Wörter unserer Sprache ist uns gänzlich verloren gegangen; wir wissen nur, wie ein Gegenstand benannt wird, wir wissen aber nicht, welcher Sinn dem Namen unterliegt. In der Jugend der Sprache war dies ganz anders; mit jeder Benennung eines Gegenstandes trat zugleich die bezeichnendste Eigenschaft desselben vor die Seele. Daher die frühere Zähigkeit der Völker in der Festhaltung ihrer Sprache als der lebendige Ausdruck der Thätigkeit oder des Seins der natürlichen Dinge. Jedes angelernte fremde Wort blieb ein unverstandener, todter Laut, und so zeigt es sich, daß Völker Jahrhunderte neben

einander leben und theilweise in einander übergehen konnten, ohne daß man im Stande wäre, eine Mischsprache nachweisen zu können. Insofern nun aber eine solche Mischung immer auch eine Aenderung der geistigen Richtung mit sich führte, mußte diese wieder auf die Sprachbildung zurückwirken und die Sprache aus sich heraus allmälig eine neue Wendung nehmen; stets blieb sie aber der Ausdruck der ganzen Anschauungsweise eines solchen Volkes. Hierbei bleibt jedoch zu beachten, daß in einem solchen Falle das natürliche Leben der Sprache gestört wurde, und die neue Bildung mehr eine künstliche und daher auch beschränkte werden mußte.

Insbesondere änderte sich dieses Verhältniß mit dem erlöschenden Sprachgefühle. Man ist nun in unserer Zeit vielfach bemüht gewesen, auf die Urbedeutung unserer Wortstämme wieder zurück zu gehen, und sicher ist dies einer der schönsten Zweige der neuern Wissenschaft und in seiner hohen Bedeutung noch lange nicht erkannt; es werden uns dadurch höchst interessante und wichtige Aufschlüsse im Gebiete der Menschen- und Völkerkunde werden. Die Resultate sind theilweise noch unsicher, weil die aufgefundenen Gesetze, der Natur der Sache nach, häufige Ausnahmen darbieten und eine gewisse Willkür überhaupt nicht vermieden werden kann. Wenn man jedoch die Methode anwendet, welche die Naturforscher bei der Aufstellung der Naturgesetze befolgen, so kann man zu ziemlich sicheren Ergebnissen gelangen, welche uns nach und nach in die Jugend der Sprache zurückzuführen vermögen. Unter Bezugnahme auf den vielverzweigten Stamm der indo-germanischen Sprachfamilie betrachte man die Wurzeln der Wörter, welche gleiche Consonanten als An- und Auslaut haben, als verwandt und stelle so viele Wörter, als man in den verwandten Sprachen finden kann, zusammen; auf den Vokal, welchen beide Consonanten zwischen sich haben, kommt es vorerst nicht an. In diesem Verzeichnisse gruppire man nun die Wörter auf ungezwungene Weise nach ihrer Bedeutung und suche den gemeinsamen Inhalt. Alsdann lassen sich auch diese Gruppen wieder anschließen; man geht auf diesem Wege fort, zieht die Kreise immer enger und gelangt zuletzt zur Urbedeutung, aus welcher sodann umgekehrt, auf ungekünstelte Weise, wie Aeste und Zweige aus einem Stamme, die Einzelbedeutungen wieder ausfließen. Wenn man der Sache keinen Zwang anthut, so kann man sicher sein, daß fremde Wörter oder solche, welche durch Verschmelzungen oder Einschiebungen in die betrachtete Form sich eingedrängt haben, sich nicht gut einreihen lassen, wie auch bei der großen Zahl der gebrauchten Wörter ein Mißgriff nicht von bedeutendem Einflusse sein kann. Wenn man einmal den Kreis der vollständigen Wurzeln mit zwei Consonanten erforscht haben wird, so wird dieser benutzt werden können, um die allgemeinere Bedeutung der unvollständigen Wurzeln, mit nur einem Consonanten im An- oder Auslaute, zu erschließen; die Werthe der einzelnen Buchstaben werden erforscht sein und der ganze geistige Act der Sprachbildung wird offen vor uns liegen. Dies Ziel zu erreichen, ist möglich; es wird auch erreicht werden. Auf die angedeutete Weise läßt sich aber schon manches Allgemeine erkennen. Die Sprache war anfänglich von geringem Umfange; sie umfaßte nur Ausdrücke des Wohlbehagens, der Freude, der Angst, des Schreckens, der Furcht u. s. w. An diese schloßen sich zunächst Ausdrücke für Naturerscheinungen, von welchen die Menschen mehr als jetzt berührt wurden, weil sie häufiger, großartiger und ungewöhnlicher waren und sie sich nicht so gut gegen dieselben zu schützen vermochten. Man denke sich nur die Schrecken eines Erdbebens, eines ausbrechenden Vulkanes, eines verheerenden Sturmwindes oder eines tropischen Gewitters mit seinen zerstörenden Regengüssen. Solche Ereignisse wurden bezeichnet mit den aus dem innern

Wesen der Menschen hervorgehenden Lauten. Die Thierwelt war eine neue Quelle der Sprachentfaltung; wenn der Löwe seine Beute erlauert, im kühnen Sprunge ergreift, sie zerreißt und verschlingt; wenn die Schlange aufgerollt auf ihr Opfer schießt, es umschlingend zermalmt, mit Geifer überzieht und dann hinabwürgt, so waren dies Ereignisse, für welche der Mensch Worte suchte und fand. Wenn nun ein solcher Ausdruck gefunden war, so lag in ihm die Vorstellung der ganzen Erscheinung vom Anfange bis zum Ende, ungetrennt Alles umfassend. Der Mensch in seiner geistigen Thätigkeit ahmte hier die Natur nach, welche auch in ihren ersten Schöpfungen in eine Klasse zusammendrängte, was sie später in mehrere Klassen zerfallen ließ. Diese vielumfassenden Ausdrücke, in welchen eine ganze Folge von zusammengehörigen Erscheinungen noch ungesondert lagen, waren wahre Urwurzeln und als der Mensch bei fortschreitender geistigen Entwickelung nach Sonderung der Einzeltheile rang, wurden sie eine reiche Quelle neuer Bildungen, aber nie verlor hierbei der Sprachgeist seinen ursprünglichen Ausgangspunkt. Durch solche Untersuchungen gelangt man zu Eigenthümlichkeiten in der Anschauungsweise der Völker, welche oft sehr bezeichnend sind. So war dem Römer das Böse eigentlich das Reizende, Verführerische, Verlockende; dem Germanen dagegen war Bösewicht und Windbeutel gleichbedeutend. Es ist gut, daß die Begriffe sich geändert haben, seitdem auch bei uns die Unzuverläßigkeit und die Windmacherei mehr in Schwung gekommen sind und der alte Spruch „ein Mann ein Wort" seine allgemeine Geltung eingebüßt hat. Auch über die äußeren Verhältnisse wird dadurch mancher Aufschluß geboten; mit mons z. B. bezeichnete der Römer das aus der Erde Aufgestiegene, Emporgehobene, mit „Berg" der Germane das Zusammengetragene oder Geschwemmte, vielleicht mit dem weiteren Begriffe der darin enthaltenen und verborgenen Metallschätze. Hieraus scheint so viel hervorzugehen, daß das Römervolk in seiner Jugend die vulkanischen Erscheinungen mit angesehen hat, da es die Erhebung als das wesentliche Merkmal bezeichnete, während der Germane von der entgegengesetzten Ansicht ausging oder zum wenigsten eine andere Eigenschaft in den Vordergrund stellte.

Neben diesem bildsamen Stoffe entwickelte sich nun noch ein anderer von geringerem Umfange und Bildungsfähigkeit, die Nachahmungslaute. Zur weiteren Verarbeitung und Entfaltung des Sprachstoffes mußten ferner auch Mittel gefunden werden, um gewisse Beziehungen ausdrücken zu können. Das erste auf diesem Wege war wohl die Beziehung auf die Zeit, und das einfachste Mittel hierzu waren die Vokale. Das scharfe lebhafte i bezeichnete die Gegenwart, das ruhigere a die Vergangenheit der Erscheinung, eine Beziehung auf die Zukunft konnte auf dieser Stufe für den Menschen noch kein Bedürfniß sein. Eben so dienten die Vokale zuerst für sich und später in Verbindung mit einem Consonanten vom Sprachsinne zu diesem Zwecke ausgewählt, als Grundlage der Pronominalstämme. Auf diese Art war die Vermittlung zwischen Stoff und Beziehung angebahnt und diese erfolgte, indem ein vielumfassendes Stoffwort mit einem begrenzten Beziehungsworte verbunden ein Sprosse aus der Wurzel wurde. Im Anfange waren beide Ausdrücke blos angelehnt, allmälig aber schmolz der Beziehungslaut so mit der Wurzel zusammen, daß er seine Selbstständigkeit verlor und mit der Wurzel ein Ganzes, aber ein neues Ganzes ausmachte. Ableitung und Flexion im weitesten Sinne sind aus dieser Anbildung hervorgegangen, und die Sprache hat sich, durch die Scheidung des früher Vereinten und durch die Mannigfaltigkeit der Beziehungen, zu immer größerer Klarheit und äußerer Vollkommenheit erhoben. Die innere Veränderung der Wurzel durch den Wechsel des Vokales als Beziehung auf die Zeit erlangte

keine durchgreifende Anwendung und wurde selbst wieder aufgegeben, als die Sprache zu demselben Ziele durch die Anbildung gelangen konnte. Die Sprache verfolgte diese Richtung nicht weiter, aber die Spuren derselben sind überall noch vorhanden, dem Sprachsinne ist die Urbedeutung erloschen, und oft stehen solche Formen noch ohne Zweck, da dieser längst schon durch die Anbildung erreicht worden ist. Die germanischen Sprachen machen hier eine Ausnahme, der Ablaut ist ihnen als wesentliches Element geblieben, aber auch nicht auf anderem Wege ersetzt worden. In anderer Hinsicht hat jedoch diese Erscheinung eine große Bedeutung gehabt: sie hat zu einer Menge von Ableitungen geführt, neue Wortstämme geschaffen und den Vokalismus der Sprache festgestellt. Es läßt sich in dem indo-germanischen Sprachstamme ein wohlgegliederter bildsamer Organismus erkennen, der in seiner Anlage schon den Keim der Entwickelung trug, sich dem jeweiligen geistigen Bedürfnisse der Völker anzuschließen. Das Wesen desselben ist Einsylbigkeit der Wurzeln, welche durch einen, in seiner Grundbedeutung untergegangenen Vokalwechsel, besonders aber durch Anbildung verändert und begrenzt werden.

Ein zweiter asiatischer Sprachstamm ist der chinesische und in jeder Hinsicht von dem vorigen verschieden. Man nennt die hieher gehörigen Sprachen einsylbig nicht sowohl wegen der Einfachheit ihrer Wurzeln, als weil diese keinerlei Veränderungen weder durch Vokalwechsel, noch durch äußere Anfügung erleiden. Die Wurzeln enthalten nur den Stoff und eine Beziehung wird an ihnen auf keine Weise ausgedrückt, daher auch ihre ursprüngliche Einsylbigkeit durchgehends erhalten wurde. Die Beziehungen sind aber einer Sprache eben so nothwendig, wie der Stoff, und wenn sie nicht an der Wurzel selbst bezeichnet werden, so muß dies auf eine andere Weise geschehen. Im Chinesischen gibt es keine Redetheile, kein Nomen, keine Verba u. s. w., die einzelnen Wörter erhalten ihre Beziehung durch ihre gegenseitige Stellung im Satze. Man kann daher hier nicht von Wortstämmen sprechen, sondern nur von festbestimmten, scharf begrenzten Wurzeln, und wenn die gleiche Wurzel verschiedene Bedeutungen zu haben scheint, so sind diese doch geschieden durch eine künstliche Betonung. Die Menschen, durch welche der Sprachgeist auf solche Art gewirkt hat, müssen von den vorhergehenden körperlich und geistig durchaus verschieden sein. Zunächst ergibt sich, daß hier die Auffassung einer Erscheinung in ihrer Totalität und ihre Bezeichnung als Ganzes nicht möglich war, und sie nur als eine Folge von Einzelnvorgängen aufgenommen und so auch der Reihe nach lautlich ausgedrückt wurde. Wie viele Wiederholungen der Erscheinung hierzu nöthig waren, ist gleichgültig; sie wurde aber gleich von vorneherein zerlegt, analysirt und zur Klarheit der Vorstellung gebracht, als die Sprache sich ihrer völlig bemächtiget hatte. Der Unterschied gegen die vorige Sprachklasse ist höchst beträchtlich und folgereich. Dort gleicht die Sprache dem Saamenkorne, welches zur Pflanze sich entwickelt und in der Entwickelung immer neue Kräfte dazu sammelt; hier fehlt jeder eigentliche Sprachbau, wir haben blos lose Elemente, welche zu einer festen Gestaltung noch nicht haben gelangen können. Dort geht aus der anfänglichen Unbestimmtheit ein Ringen nach Klarheit hervor, welche den Geist hebt und stärkt, eine reiche Einbildungskraft, die Mutter der Poesie, erzeugt, die selbst wieder ein mächtiger Hebel wird zur Förderung der geistigen Entwickelung. Hier dagegen hat ein angeborener praktischer Sinn bald auf eine gewisse Stufe der Klarheit geführt, welche aber dann nicht mehr überschritten werden konnte; wie der Geist am Anfange thätig war, so ist er es jetzt noch, es ist nichts dazu gekommen. Hier ist kein Ringen nach Höherem möglich, die Phantasie fehlt gänzlich, und die hierher gehörigen Völker können

aus sich, weder Musik noch Poesie und Kunst, weder ein wissenschaftliches Streben, noch wahrhaft religiöse Gefühle entwickelt haben. So finden wir es auch in der That bei den Völkern des chinesischen Stammes; ihre alte gerühmte Kultur erstreckte sich von jeher blos auf eine verständige, ja scharfsinnige Auffassung der äußern Lebensverhältnisse und was damit zusammenhängt, sie sind gute Ackerleute, Gärtner, Fabrikanten, Handelsleute und Diplomaten, aber sonst nichts weiter.

Asien ist noch die Heimath einer dritten Sprachklasse, welche zwischen den beiden betrachteten die Mitte hält. Im Allgemeinen läßt sich nur sagen, daß ihr Hauptkennzeichen die Anfügung ist. Die Wurzel als Bedeutungslaut wird nämlich lose verbunden mit andern Wurzeln als Beziehungslaute, wobei kein Theil eine Veränderung erleidet; nur verlangen nach einem Lautgesetze gewisse Vokale der einen Sylbe ähnliche Vokale in der andern, was allerdings eine größere Annäherung bewirkt. Die Sprachen dieser Klasse zeigen viele Abstufungen und Uebergänge, auf der einen Grenze sind die Beziehungslaute zugleich noch Bedeutungslaute und werden nur zur Beziehung verwendet; dann entstehen eigene Beziehungssylben, indem sie ihren Werth als Bedeutungslaute aufgeben. Eben so folgt der Uebergang von der losen Anlehnung bis zur Verschmelzung mit der Wurzel, wodurch eine Art Beugung erzielt wird. Die hierher gehörigen Sprachen zerfallen in mehrere Reihen mit vermittelnden Uebergängen, und ihr Sprachschatz enthält gemeinschaftliche Wurzeln und selbst solche aus der ersten und zweiten Sprachklasse. Die Völker, die diese Sprachen sprechen, gehören mit den chinesischen Stämmen zu einer Rasse, zu der sogenannten mongolischen; dennoch findet man auch solche, die in die kaukasische Rasse übergegangen sind, so daß es den Anschein gewinnt, als ob dieselbe Sprache ursprüngliches Eigenthum von Menschen verschiedener Rassen gewesen sein könnte. Diese Ansicht widerlegt sich jedoch leicht, wenn man bedenkt, daß eben der Rassenunterschied nichts weiter ist, als der äußere Ausdruck der verschiedenen geistigen Richtung, und daß diese in der Sprache wieder sich ausprägt. Die Gleichheit der Sprache setzt nothwendig einen Verein von Menschen voraus, die durch ihr Zusammenleben zu einer Rasse sich verschmolzen haben, und wo nun ein jeder Einzelne nach der gleichen Richtung hin thätig war. Wenn nun, wie in Asien, zwei Rassen neben einander entstanden und anfänglich von einander getrennt, die Grundlagen ihrer Sprachen entwickelten, so kann man denn doch wohl nicht annehmen, daß sie bei ihrer Ausbreitung gar nicht sollten in Berührung gekommen sein. Hat aber ein solches Zusammentreffen stattgefunden, so konnte auch ein gegenseitiges Einwirken nicht ausbleiben und man braucht gar keine künstlichen, oft unnatürlichen Theorien, um so einfache Erscheinungen zu erklären. Hier gibt uns aber die Geschichte einen sichern Haltpunkt, sie zeigt uns, daß viele Jahrhunderte hindurch die beiden Rassen in steter Berührung waren, und die neuen Entdeckungen im Gebiete der alten Sprachen Asiens liefern dazu die glänzendsten Belege. Die Behauptungen, daß die Türken des osmanischen Reiches oder die Finnen in Ungarn und einem Theile Rußlands nur allein durch örtliche Einflüsse umgewandelt worden seien, bedürfen wohl kaum einer ernstlichen Widerlegung. Aber gerade bei diesen Stämmen kann man sehen, wie ihre Verbindung und Vermischung mit geistig höher stehenden Völkern veredelnd auf jede Sphäre, also auch auf ihre Sprache, eingewirkt haben, und dies würde noch in weit höherem Grade stattgefunden haben, wenn sie zu voller nationaler Entwickelung hätten gelangen können. Dabei kann und soll nicht geläugnet werden, daß die Ungunst der äußeren Verhältnisse, wie in der starren Polarzone, zerstörend auf die Entwickelung von Körper und Geist

einwirkt, so daß leicht der Samojede mit dem edlen Finnen vom gleichen Stamme sein kann.

Im Westen von diesem großen Sprachgebiete begegnet man einer Reihe anderer Sprachen, mehr oder weniger mit einander verwandt, aber gänzlich verschieden von den bisher betrachteten, den sogenannten semitischen Sprachen. Im Nordosten Afrika's und in Arabien herrschend, ziehen sie sich gleichfalls über Kleinasien hin, über den Euphrat zur persischen Grenze, aber ihr Einfluß reicht noch viel weiter. Gründliche Forschungen haben ferner so ziemlich außer Zweifel gestellt, daß auch die alt-ägyptische Sprache, so wie die Sprachen an der Nordküste Afrika's hierher gehören, und je mehr die Sprachen der Völkerschaften Afrika's bekannt und erforscht werden, desto mehr zeigt sich, daß sie von dem Einflusse der semitischen Ursprache nicht verschont geblieben sind.

Die Erzeuger dieser Ursprache haben sich aber sehr frühe getrennt, und von dieser Zeit an hat sie sich nach drei verschiedenen Richtungen ausgebildet, welche sehr von einander abweichen, und der Sprachschatz hat sich so weit verändert, daß es leicht scheinen könnte, als ob gar keine Verwandtschaft vorliege. Man hat jedoch den gemeinsamen Ausgang wieder erkannt und trotz der bedeutenden Abweichungen die unverkennbare Verwandtschaft eingesehen; es wird sich dies um so mehr herausstellen, je weiter man in vorurtheilsfreien Forschungen vorschreiten wird.

Die auffallendste Eigenthümlichkeit des östlichen Zweiges oder der eigentlichen semitischen Sprache ist, daß die Mehrzahl ihrer sogenannten Wurzeln drei Consonanten erfordern. Die drei Consonanten für sich machen eigentlich schon die Wurzel, denn so wie ein oder zwei Vokale zu einem lautlichen Gebilde dazutreten, ist damit zugleich eine Beziehung ausgedrückt. Wie man sich eine solche Sprachbildung erklären soll, ist schwer zu sagen; vergleicht man jedoch alle offenbar hierher gehörigen Sprachen, so ergibt sich etwa Folgendes: Die Wurzeln der Ursprache waren von geringem Umfange, aber einfach; sie wurden enger begrenzt durch Zusammensetzung, welche in förmliche Einverleibung überging und woraus die Bedeutungslaute mit drei Consonanten entsprangen. Diese erhielten ihre Beziehung durch die Vokale, und das Prinzip der Vokalverwendung wurde hier zur höchsten Vollendung gebracht, während das der Einverleibung in eine Art Flexionsbildung übergegangen ist. Der centrale Zweig in Afrika hat beide Prinzipien nicht weiter ausgebildet und ist eher wieder zur bloßen Anfügung zurückgekehrt. Dagegen hat der westliche, nach Europa übergegangene, Zweig das Prinzip der Einverleibung vorzugsweise angenommen. Man stößt hier auf einen mehr künstlichen als natürlichen Sprachbau, denn während im Indogermanischen eine beschränkte Anzahl Bedeutungslaute, in welchen die Beziehungen, die sie ausdrücken sollten, schon dem Werthe nach lagen, überall auf gleiche Weise verwendet und also nothwendig auch in den Worten, mit welchen sie zusammenwuchsen, gefühlt wurden, sieht man dagegen im Semitischen an die Stelle solcher Sylben einen Vokal eintreten, welcher ursprünglich das nicht ausdrückte, was er bezeichnen sollte, und zu diesem Zwecke bloß conventionell verwendet wurde. Allerdings war dieser Bau einfach und mit vieler Geschicklichkeit aufgeführt, aber es war kein naturwüchsiger Organismus, und seine freie Entwickelung daher beschränkt. Ganz ähnlich verhält es sich mit der Einverleibung. Wenn in den anfügenden Sprachen vier, fünf und mehrere einfache Wörter unverändert zu einem Ganzen verbunden werden, so wird jede Einzelbedeutung im Ganzen noch gefühlt und verstanden, weil die Theile mit ihren, die Bedeutung bedingenden, wesentlichen Elementen vollständig vorhanden sind. Wenn aber eine solche Reihe von Wörtern in der Art zu einem Ganzen

verbunden werden, daß von den einzelnen Bestandtheilen oft nur ein Buchstabe übrig bleibt, gleichsam als ein Erinnerungszeichen für die einst vorhandene Sylbe, so ist dies wieder etwas Künstliches, und unmöglich kann der Geist die wahre Bedeutung, wie sie aus dem Einzelnen hervorgegangen, in einem solchen Gerippe mit Klarheit auffassen. Nehmen wir nun die Sprache wieder als das Bild der natürlichen Anlage und der Richtung des Geistes, so finden wir hier eine Reihe Völker, begabt mit Geschick und einer reichen Produktionskraft, aber ihre Erzeugnisse sind mehr Kunst als Natur und nähern sich daher einer Grenze, welche sie nicht überschreiten können. Die Poesie vermag ihre erste Unbestimmtheit nicht zu überwinden und geht deßhalb häufig ins Abentheuerliche über. Ueber die Ursache dieser Erscheinungen kann nach den frühern Auseinandersetzungen kaum ein Zweifel sein. Das Zusammentreffen und die Vermischung mit andern Rassen war es, welche die natürliche Entwickelung aufgehoben und den künstlichen Sprachbau erzeugt hat. Von den übrigen Sprachen Afrika's wissen wir noch sehr wenig; eine Sprachvergleichung, die allein hier Aufschluß zu gewähren vermöchte, kann noch nicht angestellt werden, daher die wahren Verhältnisse dieses Erdtheiles noch nicht aufgeschlossen sind.

Die vier Rassen und ihre Wanderungen.

Der Mensch war eine neue Kraft, bestimmt, die Entwickelung der natürlichen Dinge auf eine andere und freiere Weise weiter zu führen. Nach den oben dargestellten Naturgesetzen bedurfte diese Kraft einer andern verwandten, aber doch gegensätzlichen, weil nur aus dem Kampfe der Gegensätze eine höhere Gestaltung hervorgehen konnte. Die Annahme einer vielfachen Entstehung des Menschengeschlechtes und seiner Gruppirung zu bestimmten Rassen mit ausgeprägten körperlichen und geistigen Eigenschaften, ist daher durchaus nicht willkürlich, sondern nothwendig und ganz dem Entwickelungsgange der irdischen Dinge angemessen. Seit vielen Jahrtausenden haben diese Rassen auf einander eingewirkt und, wie in allen Theilen der Natur, haben sich Zwischenstufen gebildet; es ist aber so viel des Erkenntlichen geblieben, daß eine vorurtheilsfreie Forschung nothwendig auf diese Ansicht zurückkommen muß. Bei einem Ueberblicke über die günstigen Oertlichkeiten der Erdoberfläche für die Geburtsstätten der Menschen, kömmt man ohne Bedenken auf die angegebenen Ausgangspunkte und die angenommene doppelte Entstehung des Menschengeschlechtes ist nothwendig, aber auch hinreichend, zur Erklärung der Erscheinungen. Man gelangt hier zu einem interessanten und höchst wichtigen Punkte in der Geschichte der Menschheit. Die Verhältnisse an beiden Entstehungsorten, besonders die der Temperaturen, waren so verschieden, daß man mit Sicherheit auf eine große Verschiedenheit der daselbst entstandenen Rassen schließen darf. Ein Zusammenstoß in der Periode der physischen Kraftäußerung würde bei der noch ungeschwächten Energie der Rassen einen Vernichtungskampf herbeigeführt haben. Die anfängliche Trennung war daher nothwendig, die Kräfte, welche sich vernichtet hätten, wurden aufgespart, um auf einer höheren Stufe der Entwickelung den Prozeß der Erhebung und Entfaltung des Geistes mit neuen Kräften fortzuführen. Die Betrachtung richtet sich daher zunächst auf die Rassen an ihrem Entstehungsorte, und hier mag Afrika, als der ältere Schauplatz, vorangehen. Durch die Uebersicht der Sprachen hat sich herausgestellt, daß im Allgemeinen zwei Gruppen afrikanischer Völker geschieden werden müssen, die sich auch in ihrer körperlichen Bildung wesentlich unterscheiden. Die erste Gruppe, deren

Gemeingut die Ursprache war, aus welcher später die semitischen und ägyptischen Sprachen und die vaskische Sprache hervorgegangen sind, ist die eigentliche Kulturrasse Afrika's, welche wir bereits in ihren allgemeinen Eigenschaften geschildert haben; sie hat unter allen Rassen am frühesten einen ziemlich hohen Grad der Kultur errungen. Die verschiedenen Negerstämme bilden die zweite Gruppe, aber erst durch eine genaue Kenntniß derselben kann entschieden werden, ob wir für sie einen gemeinschaftlichen oder mehrere Ausgangspunkte anzunehmen haben. Das letzte dürfte am wahrscheinlichsten sein. Es ist anzunehmen, daß die reiche Produktionskraft des heißen Klima's eine große Zahl Einzelwesen hervorgerufen hatte, die sich wieder zu mehreren Stämmen vereinigten und ihre körperlichen und geistigen Eigenschaften auf ihre Nachkommen übertrugen. Die Sache selbst ist für das Folgende ohne Bedeutung, die höhere Rasse allein wird unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen. Die Gemeinsamkeit der Sprache beweist, daß die Glieder dieser Rasse ursprünglich einer großen Familie angehört haben, welche aber frühe schon sich getrennt und nach drei Richtungen sich gespalten haben. Die Ursache dieser Trennung wird uns wohl immer verborgen bleiben, eben so die Geschichte der Berührungen beider Rassen mit einander; vielleicht liegt aber hier gerade der wahre Grund. Es ist früher schon bemerkt worden, daß das, was man gewöhnlich die Negerrasse nennt, eine Völkergruppe von der verschiedenartigsten Beschaffenheit ist, bei welcher die Farbe vom Braun und Rothbraun durch alle Abstufungen bis ins Schwarze wechselt. Im nordöstlichen Hochlande hat man Völkerreste entdeckt, deren Hautfarbe nicht dunkler ist, als die der Neapolitaner oder Sicilianer. Die Haare sind durchgehends schwarz, wollig, gelockt oder schlicht, die Augen immer schwarz. Die Gesichtszüge sind bei einigen Völkern ausdrucksvoll, schön, hervortretend, wie bei den Europäern, und gehen bei andern wieder in die bekannte Negerphysiognomie über. Diese Abstufungen sind nicht alle ursprünglich und offenbar hervorgegangen aus einer Vermischung der Negerrasse unter sich und mit der vorhergehenden Rasse. Und so mag denn auch in dieser die gleiche Ursache gewirkt haben und eine Trennung herbeigeführt worden sein, durch die Aufhebung der Gleichheit in körperlicher und geistiger Beziehung; ein jeder Zweig setzte seine Entwickelung in der ihm eigenthümlichen Weise fort, obgleich verwandte Züge durch alle hindurchgehen und erkennbar geblieben sind. Aus den Berührungen dieser verschiedenen Völkerstämme ging nun zunächst die erste höhere Kultur auf der Erde hervor. Wie lange die Kämpfe gedauert haben mögen, läßt sich nicht schätzen; als ihr Ziel erreicht war, zerstreuten sich die Völker, um neue Schauplätze ihrer Thätigkeit aufzusuchen. Aus Gründen, welche von Völker- und Ländernamen hergenommen sind, und aus den Resten alter tausendjähriger Denkmäler kann man noch auf die körperliche Beschaffenheit der afrikanischen Kulturrasse schließen. Im Allgemeinen wenig abweichend von der Bildung der sogenannten kaukasischen Rasse, scheint ihr nur die rothe Hautfarbe und ein eigener Schnitt des Auges, welcher dem Gesichtsausdrucke etwas Besonderes verlieh, eigenthümlich gewesen zu sein. Die Hautfarbe scheint aber selbst schon frühe mehrere Nüancen, Uebergänge vom Rothen ins Rothbraune und Braune, gehabt zu haben, in Folge einer Vermischung mit den andern afrikanischen Stämmen. Ein neuerer Beobachter, welcher Arabien und Aegypten aus eigener Anschauung kennt und die Körperbeschaffenheit der verschiedenen Stämme in ihren Hauptzügen an den Massen aufgefaßt hat, versichert uns der Uebereinstimmung der Bevölkerungen von Arabien und Aegypten, wo sie nicht erweislich durch Vermischung sich schon verändert hat. — Ein langes ovales Gesicht; eine hohe und breite Stirn, offen und etwas zurückweichend; eine

vortretende Nase, gerade oder gebogen, ein schwarzes, tiefliegendes, glänzendes Auge; etwas vorspringende Backenknochen; großen wohlgebildeten Mund, die Lippen leicht aufgeworfen; viereckiges Kinn; schwarze, oft lockige, aber niemals wollige Haare; weiße und gutgestellte Zähne; kurzen Hals; mittlere Statur und Magerkeit des Körpers, sind die Hauptkennzeichen dieses weitverbreiteten Stammes in der Gegenwart. Vergleicht man damit die altägyptische Bevölkerung nach den erhaltenen Denkmälern, so zeigt sich auf eine überraschende Weise die Uebereinstimmung derselben. Diese Rasse nun ist es, welche, aus unbekannten Ursachen, nach Norden und Osten auswanderte, so daß nur noch schwache Spuren derselben in ihrer Urheimath zurückgeblieben sind. Dies war der nothwendige, aber auch der natürliche und gesetzliche Verlauf; denn auch die menschlichen Dinge sind den Naturgesetzen nicht entzogen. Durch die Urkunden des alten Testamentes gewinnt von jetzt an die Geschichte dieser Völkerwanderungen einen sicheren Halt. Die sogenannten semitischen Stämme zogen nach Asien, ihre Grenzen waren im Norden der Kaukasus, im Osten dehnten sie sich über Assyrien aus, südlich nahmen sie ganz Arabien ein. Die Aegypter zogen ins Nilthal und entwickelten dort ihre Kultur; ein Zweig derselben verbreitete sich über das nördliche Afrika und ging von da nach Europa über, wo im Süden dieses Erdtheiles überall noch ihre Spuren nachgewiesen werden können. An diesen Wanderungen mögen wohl auch schwarze Stämme Theil genommen haben. Noch großartiger muß die Auswanderung nach Osten gewesen sein, ganz Südasien war in den frühesten Zeiten von afrikanischen Stämmen besetzt. Ueberall, wo später asiatische Völker einwanderten, fanden sie die Länder schon von farbigen Menschen besetzt, und bis auf den heutigen Tag sind ihre Spuren überall noch zu erkennen. Dieser Zug ging aber noch viel weiter. Die Inseln des indischen Archipels und die des stillen Oceans beweisen, daß die weiten Meere keine unüberwindlichen Hindernisse für die Menschen sind, ja es ist anzunehmen, daß der Seeweg viel früher zu solchen Wanderungen eingeschlagen wurde, als der Landweg. Man bedenke nur, welche ungeheuere Reisen die Bewohner der Südseeinseln in ihren gebrechlichen Fahrzeugen machen, und man wird dann nicht mehr erstaunt sein, wenn den kräftigen Afrikanern Gleiches zugeschrieben wird; die Gefahr wird da am wenigsten geachtet, wo das Leben am schnellsten sich erneuet und daher auch am wenigsten Werth hat. An diesem großen Zuge haben beide Zweige Theil genommen und er dürfte selbst das Festland von Amerika erreicht haben, denn entschieden stammt dessen Urbevölkerung aus dieser Quelle. Hier wäre aber auch zugleich die entgegengesetzte Richtung möglich, obschon der natürliche Zug der afrikanischen Völker nach Norden und Osten geht; es könnte von der Westküste der alten Welt eine unfreiwillige Verpflanzung nach Amerika erfolgt sein. Dieses Drängen der Völker in ihrem Jugendalter nach gewissen Richtungen hin, fand nach einem durchgreifenden und nothwendigen Gesetze statt, und wo dieses ist, kann von keinen Hindernissen die Rede sein. Aus dieser übersichtlichen Darstellung über die Verbreitung der afrikanischen Rassen läßt sich schon ermessen, welche bedeutende Rolle ihnen in der Geschichte des Menschengeschlechtes angewiesen ist.

Wendet man sich Hochasien, dem Ursitze des andern Theiles der Menschheit, zu, so begegnet man daselbst ganz ähnlichen Erscheinungen. Auch hier sind zwei Völkergruppen zu unterscheiden, eine hochorganisirte Rasse, die entschieden von einer Gemeinschaft ausgegangen ist, was sich unwiderlegbar aus den Sprachen ergibt. Die Völker dieser Rasse nannten sich selbst Arier, ihre Körperbeschaffenheit war die der alten Germanen; weiße Hautfarbe, blaue Augen, blonde Haare waren ihre Hauptkennzeichen. Um sich hier vor Täuschungen

zu bewahren, muß man immer an dem Satze festhalten, daß die Uebereinstimmung in den Sprachen nothwendig die gleichen geistigen Anlagen bedingt, weil die Sprache nicht von Einzelnen, sondern von jedem Einzelnen gemacht worden ist und zwar im Laufe vieler Generationen. Die gleichen geistigen Anlagen erfordern aber den ganz gleich geschaffenen Organismus, also genau dieselben Bedingungen für seine Entstehung, daher dieselbe Rasse. Man darf hierbei ferner nicht vergessen, daß hier von der Zeit der Kindheit des Menschengeschlechtes die Rede ist, in welcher die Sprache der sinnliche Ausdruck der beginnenden geistigen Entwickelung war. Uebrigens kennt die Geschichte noch solche Völker, die, obschon weit von ihrem Ursprunge entfernt, diese Uebereinstimmung in körperlicher und geistiger Beziehung zeigen. Die immer fortdauernde Rassen- und Völkermischung hat diese Gesetze beinahe aufgehoben und sucht dies immer mehr zu erreichen, so daß ihre strenge Anwendung auf die Kulturvölker der Gegenwart eben so wenig thunlich wäre, als sie richtig und naturgemäß ist für die Zeiten, von welchen hier die Rede ist. Den Ariern gegenüber standen die Mongolen, deren Hauptvolk die Chinesen sind. Ob diese Rasse von einer Familie ausgegangen ist und die beobachteten Verschiedenheiten aus einer frühen Trennung und darauffolgenden Vermischung mit anderen Rassen erklärt werden können, oder ob eine ursprüngliche Verschiedenheit vorliegt, läßt sich jetzt noch nicht entscheiden. Die äußern Kennzeichen der mongolischen Rasse sind bekannt genug; die Haut ist eigentlich nicht gefärbt, sie hat die natürliche, waizengelbe Lederfarbe; wo sie ins schwärzliche übergeht, liegen die Ursachen nicht ferne; es ist noch jetzt nachweislich, daß die schwarze Urbevölkerung des Südens durch die Gebirgsthäler hoch hinaufgestiegen und so in Berührung mit den Mongolen gekommen ist. Wir stehen dem Anfange des neuen Gestaltungsprozesses, welcher mit dem Menschen in die Welt gekommen ist, so ferne, daß wir schon eine große Reihe fertiger Bildungen vor uns liegen haben, und zwar nicht mehr bloß auf erster Stufe. Die Rassen sind die Elemente, die Bestandtheile der Verbindungen, welche ganz nach denselben Gesetzen vor sich gehen, wie alle Bildungen auf der Erde; ihr Ziel ist die höhere Gestaltung, die Veredelung der Menschen in körperlicher und geistiger Beziehung. Wie in Afrika haben auch hier die beiden Rassen auf einander eingewirkt und die höhere Form des Lebens, welche daraus hervorgegangen, wurde von ihnen weiter getragen. Die Chinesen gründeten eine eigenthümliche Kultur in ihren heutigen Wohnsitzen, dehnten sich aber auch südwestlich aus und verbreiteten weithin ihren Einfluß. Die Arier dagegen verließen gänzlich ihre Urheimath und auch ihre Züge waren nach Süden und Westen gerichtet. Es ist gewiß ein wunderbarer und tief im Wesen der Hauptstämme der Menschheit gegründeter Zug, daß die eine Hälfte ihren Sinn immer nach Osten, die andere aber so entschieden nach Westen gerichtet hat. Die Celten scheinen die ersten Arier gewesen zu sein, die Europa überzogen und zwar zu verschiedenen Zeiten. Hier trafen sie mit den bereits angesiedelten Afrikanern zusammen und hieraus ging nun die erste europäische Kultur hervor. Hierauf folgende Züge brachten die Völkerschaften Italiens, Griechenlands und Thraciens herbei, die in eine schon vorhandene Kultur eindrangen und ihr nur eine neue Richtung gaben. In dritter Reihe folgten die Germanen, die in vielen Völkerschaften den größten Theil des übrigen Europa's einnahmen. Unterdessen hatte sich im äußersten Norden ein mongolischer Stamm, die Finnen, wahrscheinlich schon eine Zwischenrasse, niedergelassen, und zwischen diese und die Germanen drängten sich später die Slaven, ein anderer arischer Zweig. Im Norden wären noch andere arische Stämme aufzuführen, die aber bis auf geringe Reste gänzlich verschwunden

sind, d. h. die von den nachfolgenden vollständig absorbirt worden sind. Die frühesten Wanderungen der Arier waren aber die in Asien selbst nach Süden, entweder über das Himalayagebirge oder über den indischen Kaukasus; wahrscheinlich auf letzterem Wege zog ein Stamm in die Länder am Indus und in das Gangesgebiet ein und gründete hier seine Herrschaft auf der Grundlage einer dort schon vorhandenen Kultur. Ebenso verbreiteten sich die arischen Stämme über ganz Iran, vom Indus bis zum kaspischen Meere und den Grenzen von Assyrien und Babylonien. So erreichten sich die beiden Haupttheile der Menschheit, nachdem sie in ihren Ursitzen die erste Kultur sich errungen; sie standen sich gegenüber von dem Westende Europa's bis zur Südspitze Asiens, mit Kräften, welche schon der Gegner würdig und fähig waren, einander Widerstand zu leisten; denn auf einander zu wirken, war ihre Bestimmung zu höherer Gestaltung; daher durfte der eine Theil den andern nicht aufheben oder gar vernichten. Der große tausendjährige Kampf begann am frühesten in Asien und fällt von hier ab theilweise bald der Geschichte anheim, welche nun die Aufgabe hat, die Grundlagen desselben zu erforschen und dem Verlaufe zu folgen; denn die Geschichte soll ja die andere Seite der Naturwissenschaften sein, welche die Produkte der geistigen Thätigkeit der Menschen erfaßt. — Der Mongolen ist noch in einer andern Beziehung zu gedenken: die unmittelbare Nachbarschaft Amerika's hat ihre Kolonisten auch nach diesen Erdtheil gezogen und über die Behringsstraße hinüber hat stets ein Verkehr stattgefunden. Südlich sind die Mongolen gleichfalls nach den Inseln vorgedrungen und von hier aus westlich lassen sich auch ihre Spuren weit verfolgen. Anderseits haben sich aber auch arische Wanderer, aus Veranlassungen, welche uns ganz unbekannt sind und auf eben so unbekannten Wegen, nach den östlichen Inseln gewendet und ihr Andenken daselbst in der Sprache und Religion zurückgelassen.

Allgemeine Entwickelung der geistigen und gesellschaftlichen Zustände in den ersten Zeiten.

Die Bildungen der Körperwelt, so einfach in den Anfängen, erreichten in ihrem Fortgange bald eine wunderbare Mannigfaltigkeit und Zusammensetzung und waren bei der Schöpfung des Menschen auf der höchsten Stufe angelangt. Alle Glieder der großen Reihe sind aber mit Nothwendigkeit vorhanden, ein jedes ist die Grundlage des Folgenden und stellt die Urkraft in einem höheren Grade der Entfesselung dar. So lange das Ziel der Schöpfung, Wesen mit freier geistiger Thätigkeit, nicht erreicht war, mußten immer neue Reihen entstehen, weil keine die Fähigkeit besaß, aus sich selbst in eine höhere Form überzugehen. Denn darin besteht eben der Unterschied zwischen den Menschen und den Thieren, daß diese immer bleiben, was sie von Anfang an waren, und nicht vermögen, aus eigener Kraft sich über ihre Gattung zu erheben, weil dies nur durch eine freie Geistesthätigkeit möglich ist. Der Mensch allein hat mit seinem Organismus die Fähigkeit empfangen, den Geist zu entfesseln und in sich groß zu ziehen, und in den verschiedenen Rassen sind eben so viele Richtungen dieser Thätigkeit niedergelegt, die gerade so zusammengestellt sind, wie sie sich bedürfen, um mit Erfolg auf einander einzuwirken und sich gegenseitig heben zu können. Die Welt des Geistes kennt keine andere Gesetze, als die bisher angeführten, und nur aus der Einwirkung der Gegensätze kann Neues und Höheres hervorgehen. So wie nun der Mensch nur durch seinen Organismus Mensch ist und dadurch von den Thieren verschieden, so ist auch die verschiedene Geistesrichtung in den

Rassen ausgeprägt, sie sind die Elemente, aus deren Verbindungen die Erscheinungen im Gebiete des Geistes hervorgegangen sind. Man kann wohl sagen, daß mit dem Menschen die bisherigen Schöpfungsreihen geschlossen sind, daß durchaus keine Nothwendigkeit vorliegt, höhere Wesen zu schaffen, indem die Natur in ihn den Keim zu einer Entwickelung gelegt hat, für welche wir keine Grenze setzen können. Wenn einerseits der menschliche Organismus die Grundbedingung für seine freie Geistesthätigkeit ist, so folgt andererseits daraus mit Nothwendigkeit, daß der Geist in seiner Entwickelung auch den Körper umzuwandeln vermöge. Mit der Ausbildung und Veredelung des Geistes muß der Körper gleichen Schritt halten, und so schreitet der Mensch in beiden Beziehungen vorwärts, wenn uns auch der Gewinn von Jahrtausenden gering erscheinen mag, denn die Perioden der Schöpfung sind sehr groß im Vergleiche zur Dauer vieler Menschenleben. Will man nun den Kulturgang des Menschengeschlechtes verfolgen, so wird es vor allen Dingen nothwendig, auf die Elemente zurückzugehen, welche in den neuen Prozeß, in die Reihe der geistigen Verbindungen eingetreten sind. Es liegt in der Natur der Sache, daß wir in die Geschichte der Jugend der Menschheit nicht direkt eindringen können, eben so wenig, wie in die Bildungsgeschichte der Erde; was uns aber die Geschichte und der gegenwärtige Zustand der Menschen auf so verschiedenartigen Stufen der Bildung lehren, genügt, bei gehöriger Zusammenstellung, zu einer Zeichnung in allgemeinen Umrissen und in besonderer Beziehung auf die höheren Rassen, deren Einfluß überhaupt nur zu beachten ist.

So lange der Mensch, in seiner Existenz bedroht, nur für seine Erhaltung zu kämpfen hatte, vermochte er nicht seinen Geist auszubilden und höheren Dingen zuzuwenden; erst als er sich gegen die Gefahren der Außenwelt gesichert und in Verbindung mit Seinesgleichen, dem Gesetze der Nothwendigkeit folgend, einen Theil seiner Freiheit aufgegeben hatte zum Besten eines Gemeinwesens, in welchem er Schutz, Unterstützung und ruhigen Lebensgenuß fand, erst dann konnte er den unbefangenen Blick der höheren Naturbetrachtung zuwenden. Auf die Natur waren die Menschen zunächst und allein angewiesen; sie war für sie die einzige Quelle ihrer Erkenntnisse. Sie erkannten die Wohlthaten, welche ihnen von der Natur gespendet wurden, indem sie ihnen Alles darbot, was sie bedurften. Sie beobachteten die Erscheinungen und folgten dem Gange der natürlichen Entwickelungen, und von Vorurtheilen noch nicht befangen und von dem Beobachteten rückwärts schließend, erlangten sie oft die richtigsten Ansichten. So nahmen sie z. B. bald wahr, daß Licht und Wärme die Grundbedingungen aller Entwickelungen sind und daß von der Sonne ihnen beides verliehen wurde; sie erkannten als zweite Grundbedingung die Feuchtigkeit, zu aller irdischen Lebensentfaltung unumgänglich nöthig. Ueberall, wohin sie blickten, sahen sie Thätigkeiten, Lebensäußerungen der Natur, welche sie als nahe liegend vergleichen mußten mit ihren eigenen Thätigkeiten, mit ihrem eigenen Leben. Es ist demnach ganz natürlich, wenn ihnen die ganze Natur und alle ihre Theile belebt erschienen; es war dies eine Poesie, wie sie nothwendig dem jugendlichen Menschengeiste entsprießen mußte. Tausende von Naturerscheinungen gaben der Phantasie Stoff genug zu den mannigfaltigsten Dichtungen, welche theilweise bis in unsere Zeit herein sich erhalten haben. Was läßt sich nicht z. B. Alles schon in der Gestaltung und Färbung der Wolken und den aufsteigenden Dünsten sehen, und wie mächtig wirken die Naturlaute selbst auf die gebildetsten Menschen! — Vorübergehende Eindrücke gewannen aber bei ihrer Wiederkehr allmälig eine festere Stellung und nahmen mit der Zeit einen allgemeineren Charakter

an, obgleich sie, als Grundlage höherer Vorstellungskreise, mit der menschlichen Bildung, nach einer in der Anschauungsweise des Volkes liegenden Richtung hin, sich später erweitern und verändern mußten. Diese Ansicht einer, in allen ihren Theilen, belebten Natur war der Jugend der ganzen Menschheit eigen und so tief begründet, daß sie durch viele Jahrtausende hindurch sich erhalten hat und selbst in unserer Zeit sich noch Anklänge finden. Die Theile des Weltalls nun, als selbstständig und belebt gedacht, waren die höheren Wesen, die der Mensch über sich erkannte; sie waren die Götter und die Geister, von denen er Gunst oder Ungunst, Gutes oder Böses zu erwarten hatte; denn frühzeitig schon unterschied man die guten und bösen Ausflüsse der Naturmächte, sie zeigten sich wechselnd und launenhaft wie die Menschen selbst. Diese Eigenschaft mag nicht wenig dazu beigetragen haben, sie als selbstständige Wesen aufzufassen, indem der Mensch ihre Aeußerungen ganz nach sich beurtheilte. Mit dieser Auffassung war jedoch die Vorstellung einer menschenähnlichen Persönlichkeit nicht verbunden: die Naturmächte blieben lange Zeit unbegrenzte und unbestimmte Wesen, wie sie sich auch in der Wirklichkeit nicht anders darstellten. Obgleich auf diese Weise die geistige Thätigkeit eine höhere Richtung genommen hatte, so war sie doch über die äußeren Erscheinungen nicht hinausgekommen, Kraft und Materie, Geist und Stoff blieben noch ungetrennt. Die den Sinnen wahrnehmbaren Theile der Welt hatten allmälig in den Vorstellungen der Menschen Leben gewonnen und waren zuletzt in höhere Wesen übergegangen. Die Verehrung dieser kosmischen Götter war der erste Kultus, und an den einfachen Glauben knüpfte sich weiter keine Moral: diese war rein gegründet auf die Nothwendigkeit gegenseitiger Rücksichten und Pflichten zur Erhaltung einer gesellschaftlichen Ordnung im eigenen Interesse. Hieraus entwickelte sich eine Art Rechtszustand, die Verletzung des Rechtes gegen Stammesgenossen mußte als eine böse That bezeichnet werden, und es ist anzunehmen, daß sich schon frühe der Glaube gebildet habe, daß der weltlichen Strafe auch eine göttliche, durch Entziehung der Gunst der Götter, zur Seite stehe. Dieses Verhältniß hatte so wenig eine religiöse Grundlage, als man dabei an eine freie Anerkennung gegenseitiger Menschenrechte zu denken hat.

Die kosmischen Götter waren nicht alle von gleicher Wichtigkeit für die Menschen, und es ist daher sehr natürlich, daß sie nicht alle in gleichem Ansehen standen und der gleichen Verehrung genossen. Eben so verschieden war auch der Grad der Bestimmtheit, mit welchem sie aufgefaßt werden konnten, und hier standen die Himmelskörper voran, denn sie zeigten sich stets als sichtbare und abgeschlossene Wesen. Unter ihnen zeichnete sich besonders die Sonne durch ihre mächtige Wirkung auf die Erde, aus; sie war daher ursprünglich, bei allen Rassen, der höchste Gott und die Verehrung derselben hat sich am längsten in ihrer Reinheit erhalten. Wie die Menschen in ihrer Sprachbildung nach immer schärferer Begrenzung der Lautgebilde strebten und aus der Unbestimmtheit zu größerer Klarheit zu kommen suchten, eben so suchten sie auch in allen ihren Gedankenkreisen das Unbestimmte der Vorstellungen endlich zu entfernen und das Denkbild zu begrenzen. Die kosmischen Wesen, welche den Sinnen sich nicht unmittelbar darboten, waren unbestimmt in der Vorstellung, aber mit steigender Bildung mußten sie begrenzt und festgehalten werden. Aus diesem Streben ging zuletzt die bildliche Darstellung der Götter und mit dieser der Tempel- und Götzendienst hervor. Die Verehrung der Theile der Welt sowohl, als auch die Richtung, die Unbestimmtheit der Götterwesen aufzuheben, lagen im natürlichen Laufe der geistigen Entwickelung. Das Bild oder das Symbol einer Gottheit konnte aber keine in der Natur vorkommende Gestalt sein, sondern

eine Zusammensetzung aus solchen Theilen, welche wenigstens die Haupteigenschaften derselben zu vergegenwärtigen im Stande waren. Daher rühren die oft sonderbaren und abenteuerlichen Gestaltungen der älteren Götterbilder, bei welchen alle Rücksichten auf Schönheit ganz natürlich ausgeschlossen waren. Diese Richtung vermittelte den Uebergang zur Vorstellung der persönlichen Götter; an das Symbol knüpfte sich nach und nach Alles, was dem Gotte zukam; man gewöhnte sich an eine solche Concentration, und das bestimmte, begrenzte Bild war gleichsam die verkörperte Gottheit. Die Menschen zogen den wahren Gott, den sie in seiner Größe und Unendlichkeit noch nicht zu erfassen vermochten, unter den verschiedensten Formen zu sich herab und gaben ihm die Eigenschaften, welche ihren geistigen Bedürfnissen entsprachen. Hierdurch wurde die Kluft zwischen den Göttern in ihrer ursprünglichen Auffassung und zwischen den Menschen ausgefüllt. Von den kosmischen Göttern löste sich gleichsam ein Wesen ab, eine irdische Gottheit, aber nicht in irdischen Formen, doch dem Menschen näher stehend und mit menschlichen Eigenthümlichkeiten gedacht. Man dachte sich dieselben als die Erde bewohnend und sich fortpflanzend, wie die Menschen, und mit diesen in Verkehr und geschlechtliche Verbindung tretend. An die Halbgötter, welche hieraus hervorgingen, knüpft sich die Urgeschichte der Völker; sie waren die Lehrer und Leiter der Menschen und die Erfinder der Wissenschaften und Künste. — Die letzte Stufe endlich entstand durch die Vergötterung ausgezeichneter Menschen, die ihrer Verdienste wegen nach ihrem Tode unter die Götter aufgenommen wurden. In der Uebertragung menschlicher Verhältnisse auf das göttliche Wesen, oder vielmehr in der Herabziehung des Göttlichen zu dem beschränkten Menschlichen, liegt auch der Gebrauch der Gaben und Opfer, bestimmt, die Gottheit zu versöhnen oder ihre Gunst zu erlangen. Die Geschichte weist nur zu sehr nach, auf welche Abwege diese Ansichten führten, wie sie die Menschen jeder Menschlichkeit entfremdeten. Aber so tief in der menschlichen Natur liegt dieses Streben nach Bestimmung des Unbestimmten, nach Begrenzung des Unbegrenzten, nach Darstellung des Unsichtbaren, daß alle höheren Glaubenskreise späterer Zeiten hierin ihren Untergang fanden.

Der hier im Allgemeinen angegebene Kulturgang ist von den Stämmen der verschiedenen Raſſen in größerer oder geringerer Ausdehnung durchlaufen worden, nach welchen Richtungen aber die weitere Entwickelung erfolgte, läßt sich nur bei den einzelnen Kulturvölkern nachweisen. Der nächst höhere Ideenkreis, die erste Speculation beginnt da, wo die Bemühung hervortritt, die einzelnen Naturgewalten unter sich in Zusammenhang zu bringen und auf eine gemeinsame Quelle zurückzuführen. Die Richtung, nach welcher dies geschieht, gibt der Religion eines Volkes erst Gehalt und Bedeutung, von den religiösen Ansichten hängt aber das innere und äußere Leben, die ganze Entwickelung eines Volkes ab. Noch ist aber ein anderes Verhältniß hier in Betrachtung zu nehmen, welches bedeutend auf die Art der Richtung eingewirkt haben mag. Es ist bereits angeführt worden, daß der Mensch zuerst nur für sich eine Berechtigung in Anspruch nehmen konnte, dann aber, nicht aus Ueberzeugung, sondern der Nothwendigkeit folgend, sie auch seinen Stammesgenossen zuerkannte. Das ursprüngliche Verhältniß verblieb aber zwischen verschiedenen Stämmen, sie standen sich bald friedlich, bald feindlich gegenüber; gelang es im Kampfe dem einen, den anderen zu überwinden, so wurde der Besiegte der Diener und Sclave des Siegers, und er mußte die Mühen des Lebens für sich und seine Herren tragen. Dabei ist aber ein wesentlicher Unterschied zu beachten. Der Herr konnte in seinem Sclaven einen Menschen erkennen, der als Freier ihm ganz

gleich stand und der eben nur durch das Kriegsglück ihm unterthan geworden; oder er betrachtete ihn gar nicht als Mensch, oder wenigstens als eine geringere Art von Menschen, der gar keinen Anspruch auf Freiheit habe, den er sich dienstbar gemacht, weil er zum Dienen geboren sei. Ein Sclave der erstern Art konnte wieder zur Freiheit gelangen, sogar in den Kreis der Gemeinschaft seines früheren Gebieters eintreten; ein Sclave der zweiten Art konnte dies niemals, er blieb immer, wofür er angesehen wurde. Der letzte Fall konnte nur da eintreten, wo Rassen von ungleicher geistiger Befähigung und großem Abstande körperlicher Bildung zusammentrafen; wo dagegen Stämme derselben Rasse oder verschiedener Rassen, die sich als ebenbürtig anerkennen mußten, zusammenstießen, da trat immer das erste Verhältniß ein. Noch fand eine Art Zwischenstufe statt, wenn ein erschlafftes, entnervtes Volk von einem frischen, kräftigen Volke unterworfen wurde und der Sieger in tiefer Verachtung den unwerthen Besiegten von jeder Gemeinschaft mit sich ausschloß und ihm die unterste dienende Stelle im Staate anwies. Das Volk, das seine Freiheit nicht zu wahren weiß, verdient nicht frei zu sein. Von diesen drei Graden der Unterdrückung von Menschen durch Menschen hat der zweite den meisten Einfluß auf die Kulturgeschichte ausgeübt, es ging daraus das sogenannte Kastenwesen hervor, eine Einrichtung, berechnet, die geistige Entwickelung eines großen Volkstheiles für ewige Zeiten zu vernichten.

Die afrikanischen Rassen und ihre Vorstellungskreise.

Die Negerrasse ist unter allen Rassen die ausdauerndste; sie ist der größten Anstrengungen fähig, ohne ihnen zu unterliegen. Obschon unter dem Einflusse einer hohen Temperatur entstanden, vermag sie doch alle Klimate zu ertragen, ohne Nachtheil für ihre Kraftäußerung und Gesundheit. Dieser körperlichen Tüchtigkeit steht eine große Abneigung gegen jede Art von Anstrengung entgegen; der Neger, sich selbst überlassen, arbeitet nie freiwillig; nur unter äußerem Zwange kann er zur Thätigkeit gebracht werden. Auch dem geistigen Fortschritte steht diese Unthätigkeit entgegen, und wir würden diesen ganzen großen Zweig des Menschengeschlechtes noch auf der untersten Stufe der Entwickelung erblicken, wenn nicht andere Elemente hier anregend und nöthigend eingewirkt hätten. Ein Erbtheil der unter südlichem Himmel entstandenen Rassen ist das Streben nach irdischen Genüssen, aber bei dem Neger wird dieses selbst überwunden, wenn es mit Anstrengung verknüpft ist, oder vielmehr, das Nichtsthun ist ihm der größte Genuß. Bei solchen Anlagen konnten die Neger, durch sich selbst, zu keiner andern Kultur gelangen, als zu der, welche nöthig war, den Kampf mit der Außenwelt zu bestehen; ihr Ziel war allein die Sicherstellung und Erhaltung des Individuums und seiner Angehörigen und solcher Lebensgenüsse, welche ohne Anstrengung zu erlangen waren. Von geistiger Thätigkeit kann hier kaum die Rede sein, und selbst die Sprache konnte nur eine nothdürftige Entfaltung erlangen. Diesem Elemente gegenüber stand nun die rothe Rasse, in allen Beziehungen ihm bedeutend überlegen. Diese Rasse, beinahe ebenso kräftig und ausdauernd, wie die Neger, war jedoch von schönem Aeußeren, geistig begabt und thätig, theilte mit diesem aber die Abneigung gegen körperliche Anstrengung und das Streben nach Lebensgenüssen. Schon bei dem Ueberblicke der Sprachen zeigte sich die rothe Rasse mit scharfem Blicke und praktischem Sinne begabt; auch fehlte es ihr nicht an Phantasie. Diese war aber beschränkt und nahm daher eine mehr künstliche als natürliche

Entwickelung; ihre Einrichtungen und Geistesprodukte nahmen daher einestheils eine feste unveränderliche Gestalt, anderntheils gingen sie wieder ins Phantastische über. Dies waren die Rassen, welche sich unmittelbar gegenüberstanden; sie waren bestimmt, anregend auf einander zu wirken, zur höheren Entfaltung des materiellen und geistigen Lebens. Von diesem großen Prozesse wissen wir durchaus nichts, wir erkennen aber noch die Spuren und sehen die Resultate. Ueber ganz Afrika, so weit es bekannt ist, lassen sich noch Reste ägyptischer Gebräuche verfolgen, und die verbreitetsten Negersprachen zeigen unzweifelhaft die Einwirkungen der Aegypto-Semiten auf dieselben. Diese bestehen nicht etwa in ein Paar Dutzend aufgenommener Wörter, was wenig beweisen würde, sondern sie gehen mehr auf das innere Wesen der Sprache und lassen einen weithingehenden geistigen Einfluß erkennen. Was wir heut zu Tage an Kultur in Afrika entdecken, ist aus der angegebenen Quelle herzuleiten. Die Reste der höhern Rasse sind längst untergegangen in dem Völkergemische, welches sich hier gebildet, aber auch die Ausgewanderten haben nie ihre Verbindungen mit dem Mutterlande aufgegeben und fortwährend einen Einfluß behauptet, welchen andere Rassen nie erlangen konnten. Die Araber am rothen Meere stehen jetzt noch in lebhaftem Verkehr mit den afrikanischen Stämmen, und ihre Kaufleute dringen nach allen Richtungen tief in das Innere des Landes ein, wohin sie auch ihre Religion und ihre Kenntnisse bringen. Ganz eben so sieht man umgekehrt die afrikanischen Kaufleute nach Arabien ziehen und dort ihre Waaren und Produkte absetzen. In dem Typus der angrenzenden Araber spricht sich diese Verbindung, welche durch Jahrtausende hindurch geht, entschieden aus, und die Beschreibung, welche sie von einem ihrer alten Helden geben, nähert sich sehr einem Neger. Ueberhaupt muß man nie von der Reinheit der Rasse oder des Stammes sprechen, wo Polygamie herrscht, denn bei der Aufnahme in den Harem wird immer wohl mehr der Geschmack und die Lust des Herrn, als der Stammbaum entschieden haben.

Zur Zeit der Auswanderung der Semiten, oder vielmehr derjenigen Rasse, aus welcher diese hervorgegangen sind, hatten sie, wie sich in der Folge ergeben wird, bereits einen verhältnißmäßig hohen Grad von Kultur erreicht, und verpflanzten sie daher in die Länder, wohin sie eindrangen, besonders in das südliche Arabien und an den Euphrat. Die Zeit, in welche das alte Testament die Erschaffung der Welt setzt, dürfte so ziemlich mit dieser Auswanderung zusammentreffen, wenn sie nicht noch früher gesetzt werden muß. Die in Afrika zurückgebliebenen Stämme müssen zuerst unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen; den ausgewanderten war eine andere Bestimmung zugetheilt.

Die ganze Nordküste Afrika's und das Thal des Niles bis nach Abyssinien blieb von einem Theile der rothen Rasse besetzt, aber nirgends waren die Verhältnisse zur Entwickelung einer höhern Kultur so günstig, als in den vom Nil befruchteten Gegenden, wo dem Boden beinahe ohne Mühe die Ernten abgewonnen werden konnten. Im Osten ist das Nilthal von Asien durch das rothe Meer und im Westen durch die Wüste von dem übrigen Afrika getrennt, auch im Süden erschweren unwirthliche Strecken die Verbindungen, so daß Aegypten inselartig abgeschlossen erscheint. Hier nun war es, wo die erste höhere Bildung, ungestört von fremdem Einflusse, sich entwickeln konnte, und sie ist darum von so großer Wichtigkeit, weil sich in ihr die geistige Richtung desjenigen Theiles des Menschengeschlechtes ausspricht, welcher den größten Einfluß auf den Gang der Kultur auf der Erde überhaupt ausgeübt hat.

Die Aegypter treten schon auf einer sehr hohen Stufe der Kultur in die Geschichte ein. Als die verschiedenen kleinen Staaten, wie es scheint zum ersten

Male, zu einem Reiche vereiniget wurden unter dem Könige Menes, da waren schon Sprache und Schrift ausgebildet, wenn letztere auch nur in Bilderschrift bestand; Künste wurden schon geübt, die Wissenschaften kamen in Aufnahme, das Leben war verfeinert, die Lebensbedürfnisse waren vermehrt. Die Entstehung des alten Reiches unter Menes fällt wahrscheinlich in den Anfang des vierten Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung und die geordneten Zustände des neuen Reiches lassen auf eine noch viel frühere Kultur schließen, worauf man auch durch die Kulturzustände der asiatischen Auswanderer hingewiesen wird. Die Ursache dieser frühen Entwickelung haben wir allein zu suchen in der natürlichen Anlage der afrikanischen Kulturrasse zur Gestaltung und Verfeinerung des materiellen Lebens, ein Ziel, das sie jedoch für sich allein, bei ihrem Streben nach Lebensgenuß ohne körperliche Anstrengung, nicht hätte erreichen können, wenn nicht — wie bereits erwähnt — eine andere Rasse ihr zur Seite gestanden hätte, welche sie zuerst geistig zu beherrschen und dann zu ihren Zwecken zu benutzen verstand. Die eigentlichen Aegypter sehen wir von vorne herein in Verbindung mit den Negern und diese von ihnen abhängig; bereits waren hieraus schon Zwischenglieder entstanden, als der völligen Verschmelzung durch gesetzliche Bestimmungen eine Grenze gestellt wurde. Hier entwickelte sich nun, auf die oben angedeutete Weise, die Kasteneinrichtung, zu welcher alle Vorbedingungen vorhanden waren. Die Bevölkerung zerfiel eigentlich in zwei Theile, einen herrschenden mit Grundbesitz, und einen unterworfenen, arbeitenden, ohne Grundbesitz. Näher unterschied man vier Kasten, die Priesterkaste, als die erste und eigentlich herrschende, die Kriegerkaste, welcher die Könige angehörten; König, Priester und Krieger theilten sich in den gesammten Grundbesitz je zu ein Drittel. Der dritten Kaste gehörten die Künstler und Gewerbsleute an, und die letzte Kaste bestand aus dem Reste der Bevölkerung. Kein Glied einer niedern Kaste konnte jemals in eine höhere aufgenommen werden; sie zerfielen aber selbst wieder in Abtheilungen, welche sich gleichfalls geschieden hielten. Jeder Kaste und sogar jeder Abtheilung derselben war ihr bestimmter Wirkungskreis angewiesen, welcher niemals geändert werden konnte und sich von Generation zu Generation vererbte. Die Priester verrichteten keine Arbeit; ihnen waren die Religion, die Wissenschaften, die Verwaltung aller Staatsämter, überhaupt alle geistigen und Regierungsangelegenheiten zugewiesen. Die Krieger waren in verschiedene Lager vertheilt, wo sie sich einzig mit der Waffenübung beschäftigten; jede andere Thätigkeit war ihnen untersagt. Der König, gewöhnlich der Kriegerkaste angehörig, wurde bei seinem Regierungsantritte in die Priesterkaste aufgenommen und so das Haupt beider Kasten. Die Klugheit dieser Einrichtung ist augenscheinlich: hierdurch wurde der König der Vermittler, der Vertreter der Interessen der zwei obern Kasten. Die Ländereien wurden an Leute der vierten Kaste zur Bebauung gegeben; den Ertrag mußten sie an die Besitzer abgeben, doch so, daß sie noch ihren eigenen Unterhalt dabei fanden; sie waren daher eigentliche Pächter. Die Königswürde war erblich, die Person der Könige war heilig und unantastbar, sie wurden für Abkömmlinge der Götter gehalten und ihnen daher die größte Verehrung bewiesen. Dessenungeachtet war ihre Macht in gewöhnlichen Zeiten sehr eingeschränkt; von den Priestern mit einem unabänderlichen und bis ins Kleinste gehenden Ceremoniell umgeben und bei genau vorgeschriebener Thätigkeit und Lebensweise, konnten sie keine selbstständige Regsamkeit entwickeln. Das Band, welches diesen Staatskörper zusammenhielt, war die Religion, ein künstlicher Bau, wohlberechnet, den geistigen Forderungen und den Bedürfnissen der verschiedenen Klassen, so wie der Einzelnen zu entsprechen. Das Ganze war eine große Maschine, in welcher jeder Einzelne

einen Theil vorstellte, dessen Bedeutung, Arbeit und Wirkung unabänderlich dieselben blieben, so lange die Maschine bestand. Die Maschinenarbeit ging vom Niedrigsten bis zum Höchsten; ein Jeder erlangte in seinem kleinen Wirkungskreise die möglichst größte Fertigkeit, und nur aus der Zusammenwirkung solcher speciellen Virtuositäten konnte diese frühe Kultur hervorgehen. Es ist von sehr großer Bedeutsamkeit für die Entwickelungsgeschichte der Menschen, daß die beiden erwähnten Rassen mit ihren Eigenthümlichkeiten neben einander standen, die gerade verwandt genug waren, um sich gegenseitig annehmen zu können, von welchen aber die eine der andern geistig so überlegen war, daß sie das Uebergewicht erlangte und zu bewahren wußte. Hieraus ging jener eigenthümliche Organismus hervor, welcher allein zu leisten vermochte, was jedem einzelnen Theile unmöglich geworden wäre. Die verschiedenen Kasten waren sich gegenseitig nöthig, wie die Theile des menschlichen Leibes zum lebendigen thätigen Wesen, daher auch die gegenseitigen Rücksichten und eine Art den Verhältnissen angemessener Billigkeit, welche unverkennbar durch den ganzen Staatsorganismus hindurchging. Von allgemeinen Menschenrechten konnte natürlich auf dieser Stufe der Bildung noch keine Rede sein, und ihre Anerkennung würde selbst den Ruin der einmal erlangten Bildung zur Folge gehabt haben, denn kein Theil der Bevölkerung, einmal aus seiner Sphäre geworfen, würde im Stande gewesen sein, zur Erhaltung des Ganzen gedeihlich beizutragen. Diese ganze Einrichtung war ihrem Zwecke entsprechend und naturwüchsig, aber sie war einer Fortbildung nicht fähig; die Menschen, welche die erste Kultur schufen, hatten ihre Aufgabe vollbracht; für sich weiter zu gehen, waren sie nicht fähig und ihr ganzes Streben war daher der Erhaltung des Gewonnenen gewidmet.

Das ganze innere und äußere Leben eines Volkes, seine staatlichen und gesellschaftlichen Verhältnisse, seine Wissenschaft und Kunst sind Ausflüsse seiner religiösen Ansichten, seines Glaubenskreises. Will man daher eine Erklärung ägyptischer Zustände und Einrichtungen, welche auch für die Gegenwart ihre Bedeutung noch nicht verloren haben, so muß man auf diese Grundlage zurückgehen. Der allgemeine Entwickelungsgang ist bereits oben schon angegeben, es kommt also bloß noch darauf an, darzulegen, wie die Aegypter ihre Naturgottheiten auf eine gemeinsame Quelle zurückgeführt, wie diese gedacht wurde und wie sie von ihr aus die Welt konstruirt haben. Sorgfältige und gewissenhafte Forschungen haben uns nun hierüber folgenden Aufschluß gegeben: Vor dem Anfange aller Dinge war die Urgottheit (Amun) eine Viereinigkeit, der Urgeist (Kneph), die Urmaterie (Neith), die Urzeit (Sevech) und der Urraum (Pascht) ungeschieden, Eins und doch Vier. Aus dieser Einheit schied sich nun zuerst die Materie aus, welche man sich als ein schlammiges Wasser dachte, und bildete eine große Kugel, die Welt. In diese Kugel strömte jetzt der Urgeist ein, verband sich mit der Materie und erzeugte das Urfeuer. Außer der Welt war noch die Urgottheit, sie gleichsam umfassend und in ihrem Schooße tragend. Durch das Urfeuer gestaltete sich nun die Welt: aus den feinen Theilen der Materie wurde die Himmelsfeste, das Himmelsgewölbe, aus den gröberen die Erde. Die zwischen Himmel und Erde befindlichen feineren Theile zogen sich ferner zusammen, und dadurch entstanden die großen Himmelskörper, die Sonne und der Mond. Jetzt erst war die innerweltliche Zeit durch den Wechsel von Tag und Nacht, von Monden und Jahren geworden und der innerweltliche Raum vollendet, welcher in den erleuchteten und den dunkeln Raum geschieden wurde. So waren also aus der Urgottheit acht kosmische Mächte hervorgegangen, die ersten und höchsten der entstandenen Götter. Nunmehr folgte die Gestaltung und

Ausbildung der Erde, d. h. Aegyptens, durch den in die Welt übergegangenen Geist, und aus den reinen Himmelsgewässern ward der Nil. Die Anzahl der Götter, die in der Welt zur Erscheinung gelangt, war hierdurch auf zwölf gestiegen und nun verknüpfte sich damit die Vorstellung ihrer Verkörperung: man dachte sich dieselben als Bewohner der Erde und mit irdischen Dingen beschäftigt; so wurden z. B. die ersten acht Götter als die Erfinder und Vorsteher der acht Wissenschaften der Aegypter betrachtet. Diese Götter wurden theils männlich, theils weiblich gedacht und aus ihrer Verbindung ging das Göttergeschlecht hervor. Die Erde erzeugte aber wiederum andere Geister, die Riesen, die man sich als Gegner der Götter vorstellte.

Die Zeit dachten sich die Aegypter als eine übelthätige Gottheit; sie schuf, sie vernichtete aber auch wieder das Geschaffene. Die Zeitgöttin hemmte die zeugende Kraft des Schöpfergeistes; sie verband sich mit den Kindern der Erde, den Riesen, gegen die Götter, und nun begann das böse Prinzip, die Zerstörung. In einem großen Kampfe siegten aber die guten Götter und stürzten die abgefallenen Geister in den Nil. Die Götter verließen nun die verunreinigte Erde, um im Himmel zu wohnen, wodurch die Erde leer geworden war. Durch eine große Fluth wurde sie aber wieder gereinigt, und um auch die gefallenen Geister wieder zu erheben und zu reinigen, schufen die Götter die irdischen Leiber, in welche eine Anzahl der abtrünnigen Geister eingeschlossen wurden, wodurch das Menschengeschlecht entstand. Die bürgerliche Ordnung, die Staatsordnung Aegyptens, war schon anfänglich von den Göttern festgesetzt und in den heiligen Büchern niedergelegt worden; die Befolgung ihrer Vorschriften war heilige Pflicht für die Menschen. Das Leben in den irdischen Leibern war die Zeit der Buße; wer die Vorschriften der Götter erfüllte, sühnte einen Theil seiner früheren Verbrechen und seine Seele ging nach dem Tode des Leibes in einen höheren Leib über, bis sie nach vollendeter Reinigung wieder unter den Göttern ihre frühere Stelle einnehmen konnte. Wer aber gegen die Vorschriften der Götter handelte, dessen Seele konnte auch in einen Thierleib eingeschlossen werden und seine Büßungszeit wurde dadurch verlängert. Eine ewige Verdammniß kannte die ägyptische Glaubenlehre nicht.

Auf eine genauere Entwickelung dieses Glaubenskreises kann hier nicht eingegangen werden; für unsern Zweck genügen die Grundlinien. Vor allen Dingen ist hier als das wichtigste Moment festzuhalten, daß die Aegypter keinen Schöpfer kennen. Die Welt ist aus einem Chaos (der Urgottheit) durch einen innern Prozeß (ursachlos) entstanden. Das Material für die Welt war von Ewigkeit her vorhanden, zuerst schied sich daraus die Materie, und damit war zugleich auch der Geist, ein Wehen, eine Bewegung, eine Thätigkeit gegeben. Aus der Verbindung der Thätigkeit mit dem Stoff ging nun die Welt in immer höherer Selbststeigerung hervor. Diese Weltanschauung ist weiter oben bereits auseinandergesetzt worden, und die Aegypter haben sie consequent durchgeführt. Dieser sich selbst steigernde Prozeß mußte nothwendig ein Maximum erreichen; von hier aus trat ein Verfall ein, Alles ging wieder rückwärts, alles Entstandene löste sich wieder ins Chaos auf. Dies ist der kurze Inhalt der ägyptischen Speculation, und damit harmoniren alle Theile dieses Glaubenskreises und Alles, was davon ausgegangen ist. Wir haben die ägyptische Lehre nicht mehr rein vor uns, andere Vorstellungen hatten bereits darauf eingewirkt; dadurch hat aber nur die Form gelitten, die Grundlage ist unverändert geblieben. Man darf sich hier, wie noch jetzt, von den Ausdrücken Gott, höchstes Wesen, Urgute, Unsterblichkeit u. s. w. nicht täuschen lassen, sie sind Bezeichnungen für sehr verschiedene Begriffe. Der Urgottheit der Aegypter, dem ruhenden, unthätigen,

also unbelebten und nicht denkenden und schaffenden Chaos, fehlen alle Eigenschaften Gottes; erst mit der Thätigkeit und den daraus hervorgehenden Gestaltungen tritt das Leben und Denken ein, was später, mit innerem Widerspruche und in Nachbildung anderer Glaubenskreise, weiter zurück verlegt wurde. Auf dem Höhenpunkte der Weltbildung trat Unordnung und Verfall ein, was sich wahrscheinlich an ein geschichtliches Ereigniß anlehnt. Der Götterkampf und die Seelenwanderung bilden jetzt keine müßige Erfindung der Priester mehr, sie bezeichnen den stufenweisen Rückgang des Entstandenen in die Urgottheit, in das Chaos.

Man muß sich sehr hüten, künstliche Theorien in die frühesten Kulturzustände der Menschen einzuflechten, besonders wenn sie im Widerspruche stehen mit ihren gesellschaftlichen Einrichtungen. Zur Vernichtungslehre haben sich die Menschen nicht etwa erhoben, sie war vielmehr das natürliche Ergebniß der ersten einfachen Naturbetrachtung, sie war gegründet auf die Beobachtung der Vergänglichkeit aller irdischen Dinge. Die Aegypter haben genug gethan, daß sie auf dem Boden dieser Ansicht einen Staatsorganismus errichteten, welcher durch Jahrtausende gehalten hat, und daß sie die höhere Gestaltung und Verfeinerung des Lebens herbeigeführt, so wie zu allen Wissenschaften und Künsten den Anstoß gegeben haben. — Wenn bei einem Volke die Ansicht herrschend würde, daß mit dem Leibe auch der Geist zu Grunde ginge, so würde ein Jeder aus seinem irdischen Leben das Beste zu machen suchen; das Streben nach irdischen Genüssen würde alles Andere aufwiegen, die Menschen würden sich bekämpfen, vernichten, der ungezügeltste Egoismus würde alle Kultur zerstören. Im günstigsten Falle würde der Rest der Bevölkerung zu der Ueberlegung gelangen, daß es doch klüger wäre, sich gegenseitig zu dulden und sich gleiche Rechte zuzugestehen; es könnte auf diese Art wohl eine zeitweilige Ordnung und Gleichheit eintreten, aber auf die Dauer eines solchen Zustandes wäre nimmermehr zu rechnen. Wenn aber ein solcher Fall bei einem gemischten Volke einträte und die begabtere Rasse diese Ueberzeugung trüge, so würde eine Verständigung sehr leicht sein. Man würde die gefährliche Ansicht geheim halten und dabei bemühet sein, die andere Rasse durch alle möglichen Mittel zur Dienstbarkeit zu bringen, um selbst das Leben ruhig genießen zu können. So war es in Aegypten; nur trat dieses Verhältniß allmälig und den Schöpfern desselben selbst unbewußt ein. Die Vernichtungslehre wurde zur Geheimreligion; ausgeschmückt und angeknüpft an geschichtliche Sagen, fanden sich Uebergänge, die Götter unter der Gestalt von Thieren zu verehren, was zuletzt zum Thierdienst selbst führte und einen passenden Kult für den großen Haufen abgab. Hierbei war ein so großer Spielraum gestattet, daß man sagen kann, ein jeder Aegypter konnte sich seinen Gott selbst wählen; von einem Gewissenszwang war durchaus keine Rede. In der ägyptischen Religion erkennt man zuletzt wenig mehr von dem ursprünglichen Glaubenskreis, nur in seinen Wirkungen ist er geblieben. Als die Hauptthelden bei diesen religiösen Entwickelungen muß man besonders diejenige Klasse betrachten, welche sich nach und nach zur Priesterkaste zu erheben wußte. Sie hatte sich den besten Theil erwählt und bildete eine Hierarchie, welche im Namen des Königs regierte; denn es ist klar, daß eine Hierarchie und eine Monarchie neben einander nicht bestehen können, wenn nicht die eine zu einem Werkzeuge der andern herabgesunken ist. So lange die Staatseinrichtung der Hauptsache nach noch nicht abgeschlossen war, so lange müssen wir auch die größte Thätigkeit bei den Priestern voraussetzen, welche unablässig um den Ausbau jener Institutionen bemüht waren, welche Staat und Kirche umfaßten, und welche jeder Klasse ihre unabänderliche Stellung, Thätigkeit,

Rechte, und Pflichten zuwiesen. Ebenso lange waren sie natürlich auch die thätigen Beförderer der Wissenschaften; sie erwarben sich Kenntnisse und Fertigkeiten, durch welche sie allen Klassen nützlich und unentbehrlich wurden und ihr Ansehen vermehren mußten.

Was aus dieser Periode hervorging, wurde gesammelt und bildete den Inhalt der heiligen Bücher, welche den Staat, die Religion und die Wissenschaften umfaßten; man erklärte sie als die unmittelbare Offenbarung der Götter und drückte ihnen dadurch das Siegel der Unfehlbarkeit auf, daher ihr Inhalt nicht bezweifelt werden durfte. Damit war aber auch die Thätigkeit der Priester der Hauptsache nach abgeschlossen; man hielt sich nur noch an die Ueberlieferungen, und es war daher natürlich, daß dieselbe Klasse, die so Vieles geschaffen hatte, endlich selbst in Unwissenheit und Aberglauben verfiel und daß sich nur in den höchsten Regionen die Kenntniß der wahren Grundlage erhielt. Die Ursprünglichkeit der ägyptischen Einrichtungen und daß sie mit Bewußtsein ihrer Bedeutung erhalten wurden, ergibt sich sowohl aus ihrer Einfachheit, als auch aus der Sorgfalt, mit welcher jede Kaste in ihren Grenzen gehalten, aber auch in ihren Rechten geschützt wurde. Die Mäßigung und die Billigkeit der höhern Kasten gegen die niedrigen, die Entfernung jeder Willkür und die Achtung der Rechte Aller, durch die strenge Unterwerfung unter die Anordnungen der Götter, bilden den strengsten Beweis, daß man sich der Bedeutung der Staats- und Kirchenordnung klar bewußt war. Die arbeitenden Kasten wurden in ihrem Zustande gesetzlich dadurch erhalten, daß man ihnen alle Mittel zu einer höhern Bildung entzog und sie in Unwissenheit und Aberglauben erhielt. Dafür aber verschaffte man ihnen Genüsse ihrer Art, und wenn einerseits der Kult mit blendendem Glanze umgeben und die Geheimnisse der Tempel in heilige Schauer gehüllt waren, so wußte man anderseits den Ausbrüchen roher Sinnlichkeit und thierischer Lust dadurch entgegenzukommen, daß man ihnen Gesetzlichkeit gab. Eine Menge religiöser Feste waren mit zügellosen Festlichkeiten verbunden und viele Tage des Elendes wurden durch wenige Stunden rasender Lustbarkeit aufgewogen.

Die Art der Todtenbestattung bei den Aegyptern verdankt der Vernichtungslehre ihr Dasein. Bei dem Tode einer geliebten Person überlassen wir, wenn auch mit Schmerz, den Leichnam der Erde; uns tröstet das Wiedersehen in einem andern Leben nach einer kurzen Trennung. Für Denjenigen dagegen, der einen solchen Trost nicht hat, der keine Fortdauer nach dem Tode kennt, muß es natürlich von dem größten Werthe sein, sich die todten Körper seiner Lieben noch im Leben zu erhalten, damit dadurch die ewige Trennung gemildert werde. Daher die Einbalsamirung der Leichen und selbst ihre Aufbewahrung im Hause. Wie sehr aber die Vernichtungslehre in den höheren Schichten der Gesellschaft verbreitet war, und ganz in den Ansichten der Aegypter lag, dafür mag noch der Gebrauch zeugen, bei Gastmählern und fröhlichen Gelagen einen nachgemachten Leichnam bei den Gästen herumzutragen, und sie zur Fröhlichkeit aufzumuntern, mit der Hinweisung auf den Tod als den Vernichter aller Genüsse. Ferner gehören hierher noch die ungeheuren und nutzlosen Bauten, besonders der Pyramiden, an welchen viele Tausende von Menschen jahrelang zu arbeiten hatten; sie waren dazu bestimmt, inmitten der Vernichtung alles Lebenden, die Namen und das Andenken der Erbauer auf Jahrtausende zu tragen und sie der Vernichtung zu entziehen.

Das Resultat der vorangehenden Betrachtungen ist nun kurz Folgendes: Die afrikanischen Rassen haben am frühesten eine materielle und geistige Kultur geschaffen. Auf einfache Naturbeobachtungen gestützt, haben sie eine allmälige

Entwickelung der Welt gelehrt, ein Hervorgehen des Höheren aus dem Niederen. Das Aufsteigen der Welterzeugnisse bedingte einen Höhenpunkt und von hier aus wieder einen Rückgang in die frühern Zustände und eine endliche Auflösung der Welt. Das Menschengeschlecht fällt in die Zeit dieses Rückganges und steht hierin auf verschiedenen Stufen. Demgemäß zerfiel die Gesellschaft in mehrere Klassen oder Kasten von verschiedenem Werthe, ungleichen Rechten und Ansprüchen, aber auch mit verschiedenen Pflichten und Leistungen. Die Staatsform war eine geschlossene Hierarchie, obschon ein König an der Spitze stand. Für das religiöse Bedürfniß war auf der breitesten Grundlage gesorgt, weßhalb auch keine Spaltungen auf diesem Gebiete vorkamen. Die Erhaltung der Staatsordnung in seiner einmal angenommenen Form war das höchste Streben, daher die Abwehr gegen jeden äußern Einfluß und zuletzt die gänzliche Abschließung. Diese Kultur hat die Grundlage geliefert für die Wissenschaften und Künste, sie ist aber endlich aus fehlender Anregung zum Stillstande gelangt und in ihren Formen versteinert. Ueberhaupt ist in diesem Glaubenskreise die Form das Höchste; nicht das Sein selbst ist die Hauptsache, sondern die Art des Seins. Zur Schönheit hat sich aber die Form in Aegypten nicht erheben können; dies war erst bei freierer Bewegung auf einem andern Boden möglich. Diese ganze Weltanschauung, gefährlich jeder wahren bürgerlichen Ordnung, führte zur Geheimreligion und den Mysterien, welche so wichtig für die Menschheit geworden sind und heute noch ihre große Bedeutung haben. Sie führte ferner zu einer Ansicht über die Stellung der Menschen, welche, wenn sie durchgreifend würde, jeden geistigen Fortschritt vernichten müßte. Aber gerade hierin liegt der strengste Beweis für ihre Falschheit, denn was den Fortschritt hemmt, das ist widernatürlich, unwahr und unsittlich, und muß endlich fallen. Der Atheismus verbirgt sich nur zu häufig hinter der Maske großer Religiosität und heuchelt einen Glauben, von welchem er weit entfernt ist. Die Wahrheit kennt keine Mysterien, sie verlangt die größte Oeffentlichkeit; sie ist aber auch das allein Erhebende, Tröstende und Beseligende für alle Menschen, und gibt ihm die Weihe, für welche der Schöpfer ihn bestimmt hat.

Die Sagen der Aegypter geben an, daß sie ausgezogen seien, um nach allen Ländern ihre Kultur zu tragen und den Menschen die Wohlthat der Civilisation zu bringen. Diese Sagen möchten nicht ganz zu verwerfen sein, wie spätere Betrachtungen zeigen werden. — Das alte Reich der Aegypter dauerte von Menes an bis ungefähr 2300 vor unserer Zeitrechnung, wo Unterägypten in die Gewalt der Phöniker kam. Diese regierten etwas über 500 Jahre, wurden dann vertrieben und verbreiteten sich über die Inseln und Küsten des Mittelmeeres, mit ihnen zugleich aber auch die ägyptische Kultur. Mit dieser Vertreibung beginnt das neue Reich, welches sich auflöste, indem es zuerst den Persern, dann den Griechen zufiel. Welche große und weltgeschichtliche Bedeutung dabei die ägyptische Kultur hatte, wird sich in der Folge noch deutlicher herausstellen.

Die asiatischen Rassen und ihre Richtungen.

Das Verhältniß der asiatischen Rassen unter sich war sehr verschieden von dem oben betrachteten. Wie sie in den frühesten Zeiten ihrer Berührung auf einander gewirkt und sich gegenseitig zu höherer Thätigkeit angeregt, ist unbekannt, aber Thatsache ist es, daß keine in einem untergeordneten Verhältnisse zur andern stand, und daß sie sich stets als gleichgestellt und ebenbürtig betrachteten.

Hierin lag der wesentliche Unterschied zwischen asiatischer und afrikanischer Kultur; jene vertrat das Prinzip der Gleichberechtigung, diese das der Unterordnung. Der Hauptheil der Mongolen, die Chinesen, wanderten im vierten Jahrtausend vor unserer Zeitrechnung in ihre heutigen Wohnsitze ein, sie fanden das Land bereits bewohnt; was von den Ureinwohnern nicht vertrieben wurde, verschmolz mit den Einwanderern; die Unterdrückung führte nicht, wie in Aegypten, zur Einrichtung der Kasten. Die Kultur, welche nun die Chinesen in den neuen Sitzen entwickelten, entsprach vollkommen den geistigen Anlagen, welche sich schon in ihrer Sprachbildung darstellten. Mit klarem Blicke für gewöhnliche Verhältnisse begabt, aber beschränkt in dem Umfange ihres Denkens, gelangten sie zu keiner eigentlichen Speculation; denn wenn man von dem, was sich aus höheren Denkkreisen bei ihnen vorfindet, das offenbar Fremde hinwegnimmt, so bleibt sehr wenig und so Unbestimmtes übrig, daß man daraus machen kann, was man will. Wenn nun auch die Chinesen zu keiner höhern Anschauung gelangten, so erfaßten sie dagegen das Leben mit Gewandtheit von seiner praktischen Seite. Der Mensch gehört zum Naturganzen, nimmt darin die erste Stelle ein, und muß in dieser geachtet, geschützt und erhalten werden. Demgemäß betrachteten sich die Chinesen als Glieder einer großen Familie, alle mit gleichen Rechten und Pflichten, und das Oberhaupt ihres Staates war weiter nichts, als der Vater oder das Familienhaupt. Zu einer hervorragenden Stellung, zu Ansehen und Würde konnten nur besondere Verdienste um das Gemeinwohl oder geistige Vorzüge führen; diese hafteten aber nur an der Person und erlöschen wieder mit ihr. Diese ganze Anschauungsweise trägt unverkennbar eine große Gutmüthigkeit in sich, und wenn sich das einst väterliche Verhältniß im Staate später in einen Familiendespotismus verwandelt hat, so liegt eben darin eine durch äußere Einflüsse und innere Zustände bedingte Entwickelung. Bei den übrigen mongolischen Stämmen galt ehemals derselbe Grundsatz der Gleichheit; hier war aber fremder Einfluß noch überwiegender und aus der Familie ist eine wahre Despotie geworden, so daß die Gleichheit Aller nur noch gegenüber dem Regenten gilt. Diese Grundansichten der Mongolen gehen durch alle ihre Zustände und Einrichtungen, in welchen sie sich bis auf unsere Zeit erhalten haben. Die übertriebene und oft lächerlich erscheinende Höflichkeit der Chinesen ist ursprünglich keine Kriecherei, sondern eine aus gutmüthigen Rücksichten hervorgegangene wahre Höflichkeit gewesen. In China kennt man keine nutzlosen Tempelbauten und Königsgräber; wenn hier die Massen zu einem gemeinsamen Werke zusammengetrieben wurden, so geschah dieses zum Zweck, das Gesammtwohl zu fördern. Bei Allem, was durch Wissenschaft und Kunst hervorgerufen wurde, stand das Nützliche dem Angenehmen stets voran. So kam es denn, daß die Chinesen eine Menge nützlicher Dinge erfunden und die materielle Kultur auf einen hohen Stand gebracht haben. Alle ihre Thätigkeit concentrirte sich auf die praktischen Lebensverhältnisse und kein Volk hat eine so große Menge von Weisheitsregeln, d. i. Lebensregeln aufzuweisen. Bei einem solchen, auf das bloß Nützliche gerichteten, Streben kann keine Wissenschaft, von welcher Art sie auch sein mag, aufkommen. Wenn bei den Resultaten des Nachdenkens und der Beobachtung zuerst nach ihrer Nützlichkeit gefragt wird und dieselben da, wo sich eine unmittelbare Anwendung nicht ergibt, als unbrauchbar zur Seite gelegt werden, so kann nothwendig eine gewisse Grenze nicht überschritten werden, es muß ein Stillstand in der Entwickelung eintreten. So war es in der That in China; das Nützlichkeitsprinzip führte zum Stillstande, hierauf zum Streben nach Erhaltung des Errungenen und, was immer damit verbunden ist, — zur Absperrung nach Außen. Die Chinesen kamen

also zu demselben Schlusse, wie die Aegypter: sie traten aus der Gemeinschaft der Völker aus, sie trennten sich von dem Organismus der Menschheit, deren Herzblut ihnen von nun an fehlte, und es kann nicht ausbleiben, daß, wie einst der ägyptische Staat absorbirt wurde, so auch der chinesische sich in dem Hauptkörper auflösen wird. Auch haben beide Völker noch das gemein, daß sie ihre Staatsgeschichte aufzeichneten, in Aegypten, um die heiligen Ueberlieferungen in Dichtung und Wahrheit auf die Nachkommen zu vererben, in China, um der Zukunft in schlichter Prosa die Erfolge und die Verirrungen der Vergangenheit als Beispiele vorzuhalten. Eigentliche Wissenschaften dürfen wir bei beiden Völkern noch nicht erwarten, aber nach den Grundansichten und dem daraus hervorgegangenen Entwickelungsgange zu schließen, muß man den Aegyptern eine geistigere Auffassung ihrer Erfahrungen wohl zugestehen.

Die vierte Gruppe des Menschengeschlechts wird von der weißen Rasse, den vielgetheilten arischen Stämmen gebildet. Bei diesen vermißt man gänzlich die praktische Richtung auf das Leben und das Geschick zur richtigen Auffassung der Lebensverhältnisse. Sie haben daher aus sich und unter sich nie ein großes Staatswesen gegründet, wohl aber den beträchtlichsten Einfluß ausgeübt auf schon bestehende Einrichtungen. Dagegen zeichneten sie sich durch geistige Anlagen aus, welche, gleich dem Organismus ihrer Sprache, einer unbeschränkten Entwickelung fähig waren. Sobald nun diese Anlagen einmal geweckt und mehr entwickelt waren, richteten sie sich vorzugsweise auf das Uebersinnliche, und hierin bestand die Eigenthümlichkeit ihres Wesens. In dieser Hinsicht bildeten sie also den Gegensatz zu ihren Nachbarn, den Mongolen, aber darin stimmten sie mit diesen überein, daß auch sie den Grundsatz der Gleichberechtigung aller Menschen anerkannten. In den Ursitzen der Menschheit ist von ihrem Wirken und Treiben kein Denkmal zurückgeblieben; kein Zeichen gibt uns die Stärke ihres ersten geistigen Erwachens zu erkennen; erst in der Fremde zeigen sich die Spuren ihrer schöpferischen Kraft. Daher hatten auch die Arier nur dunkle Sagen von ihrer Urheimath und von ihrer Auswanderung aus derselben. Diese Sagen geben an, daß sie durch eine gänzliche Veränderung des Klima's aus ihrer Heimath vertrieben worden seien; die früheren 10 Monate Sommer und 2 Monate Winter hätten sich in das Umgekehrte verwandelt, und sie genöthigt, mildere Gegenden aufzusuchen. Sie bezeichnen ferner genau den Weg, welchen sie bei ihrer Wanderung genommen und wie sie nach und nach sich über das westliche Asien ausgebreitet. Bei der angegebenen Beschaffenheit Hochasiens trägt diese Sage durchaus nichts Unwahrscheinliches in sich; eine solche Veränderung des Klima's konnte herbeigeführt werden durch die Erhebung der heutigen wüsten Hochebene und die damit verbundene Entleerung des großen Binnenmeeres. Die chinesischen Chroniken sprechen von einem solchen Ereignisse, 3100 v. Chr., und von der entsetzlichen Verwüstung, welche die abfließenden Gewässer in ihrem Lande angerichtet, und noch heute kann der Beobachter die Bahnen beschauen, welche das Wasser sich gewaltsam gebrochen. Diese Sagen beziehen sich wohl nur auf die Auswanderung derjenigen Arier, welche die Länder zwischen dem Indus und dem Euphrat füllten, und es ist unbekannt, ob die indischen Arier früher oder gleichzeitig eingewandert sind. Diese Sagen, welchen jedenfalls wahre Ereignisse zum Grunde liegen, sind jedoch erst viel später abgefaßt und nach späteren Verhältnissen verändert worden, daher man nur das Allgemeinste daraus festhalten darf. Sie berichten uns ferner, die Länder, wohin die Arier eingewandert, seien noch unbewohnt gewesen, was bei vielen allerdings der Fall war; aber unleugbar hatte Indien bereits eine andere Bevölkerung, und am Euphrat und darüber hinaus saßen schon semitische Stämme.

Diese waren aber, nach einem ähnlichen Vorgange wie in Indien, hervorgegangen aus einer Mischung der eingewanderten afrikanischen Rasse mit Ariern, die schon früher aus der Hochebene herabgestiegen waren und die mit der rothen Rasse theils in freundliche, theils in feindliche Berührung gekommen sind. Hierzu bieten uns einige Stellen des alten Testamentes deutliche Belege (Mos. I. 6, 11 u. a.), und es liegt dies auch ganz in dem natürlichen Entwickelungsgange des Menschengeschlechtes. Darauf weist uns ferner die Rassenverschiedenheit in den Familien der sogenannten Erzväter hin, die ganz deutlich ausgesprochen ist, besonders aber der Sprachbau der Semiten, welcher entschieden einer Urrasse nicht angehören kann. Das Verhältniß der Arier zu den Semiten nach ihrer Besitznahme von ganz Iran wird man wohl am besten vergleichen können mit dem der Germanen zu den Römern. Die Erstern unterwarfen sich nach und nach die Staaten am Euphrat und Tigris, und es entstand das ältere assyrische Reich mit einer Dauer von 700 Jahren. In Folge dieser Ereignisse mögen wohl auch die Phöniker an das Mittelmeer gekommen sein (2700 v. Chr.), und das rasche Aufblühen ihrer Schifffahrt, ihrer Fabriken und ihres Handels beweist mehr, als alles Andere, die hohe Kultur bei den semitischen Völkern. Die Gründung von Tyrus in dieser Zeit läßt ferner keinen Zweifel über das Bestehen anderer größerer Städte im Innern des Landes. In diese schon vorhandene Kultur setzten sich nun die Arier, wurden natürlich von ihr ergriffen und gaben ihrerseits derselben eine neue Richtung.

An diesem Zuge hatten jedoch nur einzelne Stämme der Arier theilgenommen, andere waren im Hochlande zurückgeblieben, noch andere hatten sich nördlich oder nordwestlich von da gewendet, wo sie zum Theil in Verbindung mit mongolischen Stämmen in den weiten Steppen hausten. Im Gegensatze zu Iran hießen diese Länder Turan und ihre Bewohner wurden im Allgemeinen, ohne Rücksicht auf Abstammung, Turanier genannt. Im Anfange mag nun unter den drei Theilen der Arier: den Indiern, den Iraniern und den Turaniern, eine engere Verbindung bestanden haben, aber diese löste sich und sie traten sich selbst feindlich gegenüber, als im Laufe der Zeit sie sich körperlich und geistig immer unähnlicher wurden. Besonders wurden aber die Bewohner Irans von den feindlichen Einfällen der Turanier heimgesucht und bald wurden die blonden Barbaren der Schrecken und der Abscheu jener schon verweichlichten Stammesgenossen. Die Sagen berichten ferner noch, daß das arisch-assyrische Reich durch die Araber, d. h. durch Semiten, gestürzt wurde, die sich nun erobernd über ganz Iran verbreiteten. Wir haben uns hier eine große Völkerbewegung zu denken; denn um diese Zeit (2300 v. Chr.) kamen auch die Phöniker vom erythräischen Meere her nach Unterägypten. Diese Bewegung hat wahrscheinlich auch arische Völker, griechische und italische Stämme, durch Kleinasien nach Europa geführet. Dem arabischen Reiche wird eine Dauer von 1000 Jahren zugeschrieben, nach deren Verlauf es den Ariern wieder gelang, nach großen und langen Kämpfen, ein zweites assyrisches Reich zu gründen, welches endlich nach einer Dauer von über 500 Jahren zerfiel (gegen die Mitte des neunten Jahrhunderts v. Chr.). Der Untergang dieser Herrschaft der Semiten fällt auch wieder in eine Zeit erneuerter großer Völkerbewegungen, welche diesmal von Ariern ausgegangen sind, und in deren Folge die Einwanderung der Germanen nach Europa stattgefunden hat. Das Wahre an diesen Sagen bleibt unstreitig das Wogen, Kämpfen und Ineinandergreifen dieser Völkerrassen, um den Naturprozeß weiter zu führen, dessen Grundlagen die Menschenrassen sind. Dieser Prozeß ist denn auch unaufhaltsam und trotz allem Widerstreben vor sich gegangen, und immer mehr haben sich die Rassenunterschiede

ausgeglichen und die geistigen Eigenthümlichkeiten in neue Eigenschaften umgewandelt. Merkwürdigerweise, aber nach den bisherigen Entwickelungen sehr begreiflich, haben sich die Sprachen sehr lange rein und getrennt erhalten, am leichtesten noch erfolgte die Aufnahme einzelner Wörter aus einem fremden Sprachgebiete.

Cyrus vereinigte das Reich noch einmal, aber es zerfiel wieder nach dem Tode Alexanders des Großen. Nach nicht ganz tausend Jahren gelangten die Araber abermals zur Herrschaft, welche sie über 600 Jahre übten. Seitdem halten turanische Völker, mongolischer und gemischter Abkunft, ganz Asien unter ihrer Botmäßigkeit; aber schon hat die Zeit eines neuen Turnus wieder begonnen, nur nicht mehr in der alten Weise, da die ehemaligen Völkerquellen versiegt sind. Europa wendet sich nach Asien zurück; seit hundert Jahren schreiten Abkömmlinge der Arier, auf einem ganz andern Punkte geistiger Größe angelangt, langsam, aber entschieden vor; ein neuer Kampf zwischen Iran und Turan bereitet sich vor, er wird ein Prinzipienkampf werden, aus welchem die Menschheit in ein neues Stadium eintreten wird.

Die mit dem zweiten assyrischen Reiche auftretenden Völkerstämme tragen in ihren Sprachen schon stark die Kennzeichen ihrer turanischen Herkunft. Die altpersische Sprache, wie sie uns jetzt enthüllt vorliegt, erinnert in ihren Lauten an die Lautgesetze der anlehnenden Sprachen Hochasiens; noch mehr ist dies mit dem sogenannten Medischen der Fall, auf welches zugleich auch das Semitische eingewirkt zu haben scheint. Die Entzifferung der assyrischen Inschriften steht uns nahe bevor und wird wohl eine nicht ganz semitische, doch großentheils eine aus semitischen Elementen bestehende Sprache bringen. Allmälig mengte sich übrigens dem arischen Elemente ein mongolisches bei, und beide wirkten nun ihrerseits wieder auf das Semitische ein.

Die Arier bezeichnen sich selbst zur Zeit ihrer Einwanderung als ein Volk ohne Lebenskultur; ihr Führer Dschemschid lehrte sie zuerst den Boden zu bebauen und Städte anzulegen. Man kann hieraus entnehmen, daß sie erst in ihren neuen Wohnsitzen den eigentlichen Ackerbau und ein geregeltes Gemeinwesen kennen lernten, und daß sie veranlaßt wurden, an diesen Vortheilen selbst Theil zu nehmen. Sie kamen jedoch schon mit einer gewissen geistigen Kultur, und wir dürfen sie uns keineswegs denken als rohe Haufen ohne eine sittliche Grundlage. Den besten Vergleich wird man wohl haben, wenn man sie den alten Germanen zur Seite stellt; doch erscheinen diese schon mehr von ihrem ursprünglichen Standpunkte verrückt und durch fremde Einflüsse verändert. Auf die Arier im Allgemeinen möchte passen, was Tacitus von den Germanen im Besondern sagt: „Sie halten es der Hoheit der Himmlischen unangemessen, sie in Wände einzuschließen, oder in menschlicher Gestalt abzubilden. Haine und Gehölze weihen sie, und rufen unter göttlichen Namen jenes unerforschliche Wesen an, das nur ihr ehrfurchtsvolles Gemüth erkennt." So wie in weltlichen Angelegenheiten scheint auch in göttlichen Dingen der Lehrer der Arier Dschemschid gewesen zu sein oder vielmehr, er hat die in den Ansichten des Volkes liegenden religiösen Ideen, welche den geistigen und gemüthlichen Bedürfnissen desselben entsprachen, in eine bestimmte Form gebracht. Die gleichen Ansichten in göttlichen Dingen walteten bei allen arischen Stämmen, nur wurden sie später, bei ihren Berührungen mit andern Völkern und unter deren Einfluß und je nach der verschiedenen Kulturstufe, welche sie erreicht hatten, verschiedentlich ausgebildet. Als Grundeigenschaften dieser Rasse hat man immer festzuhalten: ihre langsame aber kräftige Entwickelung, ihre Geringachtung der Lebenskultur und ihre Hinneigung

zur geistigen Anschauung, wobei sie oft nur in dunkeln Vorstellungen sich bewegten und leicht in extreme Richtungen verfielen.

Indem so die semitischen Stämme, mit welchen die Arier in Berührung kamen, mit diesen einen Gegensatz bildeten, der schon durch die frühesten Verbindungen eine Milderung erhalten hatte, ging aus ihrer gegenseitigen Einwirkung eine neue Kultur hervor, welche mehr den Charakter der ägyptischen angenommen haben würde, wenn nicht die gleichsam verschlungenen arischen Stämme immer durch neue ersetzt worden wären; und selbst die feindlichen Einfälle der Turanier waren nothwendig, um das gänzliche Versinken dieses Elementes zu verhüten. Denn leicht nimmt ein gebildetes und gewandtes Volk das weniger gebildete gänzlich in sich auf, obschon auch hier die Wirkung nicht ausbleibt, indem durch die Erneuerung und Veränderung des Blutes und die stete Einwirkung auf den Geist eben die Verarbeitung und höhere Gestaltung der Ideen erfolgt. Demungeachtet wird man noch vielfach, selbst in späteren Zeiten, an ägyptische Zustände und Einrichtungen erinnert, und besonders verdient hier der Priesterstand und seine Stellung im Staate durch ganz Vorderasien hervorgehoben zu werden. Unter solchen Verhältnissen durchdrangen sich nun die beiden Elemente immer mehr und die Wirkungen davon traten immer deutlicher hervor. Hierauf beruht auch das Schwanken und die Beweglichkeit in den geistigen Zuständen der Völker, die in diese Kultur hineingezogen wurden; denn während arische Ideen immer mehr sich verbreiteten, wurden die Arier selbst wieder von ihrer Richtung abgewendet und in fremde Vorstellungskreise eingeführt. Sie hatten endlich ihr altes Gesetz so sehr vergessen, daß sie einzelne ihrer Stämme an die Stelle der alten semitischen Priesterkasten setzten, wodurch sie sich zu Dienern eines fremden Gesetzes machten. Wahrscheinlich waren es politische Gründe, welche sie bestimmten, den wichtigsten und einflußreichsten Stand ihrer Rasse zuzuweisen, um, wie in weltlichen, so in geistlichen Dingen, die Oberhand zu behalten. Wenn sie hiermit nun ihrem eigenen Wesen untreu wurden, so führte es doch zu einer bedeutenden Umgestaltung der öffentlichen Verhältnisse, die Macht der Hierarchie war gebrochen und die Priesterkaste war nur noch die Dienerin der Regierung. Das frühere patriarchalische Regiment, wie es unter dem Sagenkönig Dschemschid bestand, ging allmälig in eine unbeschränkte Herrschaft der Könige, in eine völlige Despotie, über. Eine ähnliche Veränderung erlitten die Germanen nach ihrer Besitznahme des römischen Reiches. — Die östlich wohnenden Stämme der Arier mögen dieser Kultur wohl lange fremd und ihrem alten Gesetze treu geblieben sein; denn in der Nähe ihrer Urheimath und in Verbindung mit dieser und mit den indischen Ariern hatten sie die alten Ueberlieferungen bewahrt, und waren wohl zeitweise auch in keiner großen Abhängigkeit vom Reiche. Die natürliche Beschaffenheit Irans war Ursache, daß die Bevölkerung über seinen Boden sehr ungleich vertheilt war. Die größte Menschenmenge war in den westlichen Ländern angehäuft; hier saß der Glanz und die Macht des Reiches und die übrigen Theile waren von verhältnißmäßig geringer Bedeutung. Unter diesen waren die östlichen Gebirgsländer noch am meisten bewohnt, weil sie durch eine reichlichere Bewässerung des Bodens zu festen Wohnsitzen geeignet waren. So wie vom Euphrat, so waren auch vom Indus her fremde Ideen eingedrungen, letztere jedoch von verwandter Art. Es vereinigte sich somit Alles, um den einfachen Glaubenskreis des arischen Volkes zu entstellen und zu verdunkeln. Nach den natürlichen Anlagen dieser Rasse mußte hierdurch aber gerade das Nachdenken über religiöse Dinge wieder erwachen, und dies geschah da, wo die Sitten noch am einfachsten und die Bildung noch am wenigsten verdorben war. Die Bestrebungen zur

Erneuerung und Verbesserung der reinen Lehre mögen längere Zeiten hindurch angedauert haben, wie überhaupt alle solche Erscheinungen sich erst nach und nach entwickeln; es sind uns aber nur die zur Kunde gekommen, welche von Erfolg begleitet waren. Die Zeit nach der Wiedervereinigung des Reiches unter Cyrus war einer solchen Bewegung überaus günstig; denn die Perser, die hierdurch zum herrschenden Stamme wurden, waren nach allen Nachrichten noch ein einfaches Volk und wenig berührt von der Kultur, welche ihre Eigenthümlichkeiten zu verschlingen drohte. Auf ihren Kriegszügen waren ihre Ansichten erweitert worden. In Indien waren bereits große religiöse Bewegungen ausgebrochen, welche bei ihrer Ausdehnung auch auf Iran zurückwirken mußten. Ueberhaupt war diese Zeit eine Zeit allgemeiner geistiger Bewegung, welche endlich in Zoroaster ein Organ fand, sich auszusprechen. Von der Geschichte dieses merkwürdigen Mannes kennen wir nur wenig: er soll aus Urmi in Medien und aus dem Stamme der Achämeniden gewesen sein. In seinem dreißigsten Jahre soll er sich nach dem indischen Kaukasus zurückgezogen und dort in zehn Jahren seine großartige Lehre verfaßt haben. Aus seiner Einsamkeit zurückgekehrt, trat er zuerst am Hofe des Hystaspes, Königs oder Statthalters von Baktrien und Vaters von Darius I., als Verkünder seiner Lehre auf, und es gelang ihm endlich, ihr Eingang zu verschaffen. Durch Darius wurde diese Lehre zur Staatsreligion erhoben, und dieser König rühmt sich, die reine Lehre verbreitet und die Lüge und den Trug vernichtet zu haben. Der persische Glaubenskreis ist in seinen wesentlichen Bestandtheilen weder die Erfindung eines Mannes, noch das Machwerk eines ganzen Standes, er ist mit dem arischen Volke aufgewachsen und hat sich mit ihm ausgebildet. Hiermit soll nicht behauptet werden, daß bei seiner Fassung fremder Einfluß nicht mitgewirkt habe, hat doch auch der ägyptische unter günstigeren Umständen sich nicht frei davon erhalten können; aber die Grundidee ist rein arisch und durch die Ausschmückung eben so wenig verdunkelt worden, als dieses bei dem ägyptischen der Fall war. Das Wesentliche dieses Glaubenskreises besteht in Folgendem.

Vor dem Anfange aller Dinge war die Urgottheit als das Urgute, der ewige und unendliche, leere (mit nichts Anderem als ihr erfüllte) Raum. Gott sprach das Schöpfungswort und es entstanden Licht und Finsterniß, Feuer und Wasser, die ersten aus Gott hervorgegangenen Gottheiten. Durch dasselbe Schöpfungswort schuf Gott ein Heer Geister höherer und niederer Art, mit feinerem oder gröberem ätherischen menschenähnlichen Leibe. Die höchsten unter diesen Göttern sind Ormuzd, dem Leibe nach Licht, und Ahriman, dem Leibe nach Finsterniß; alle übrigen Götter und Geister schlossen sich diesen an und waren ihnen untergeben. Das Geisterheer war somit geschaffen, auch die Urstoffe, aber noch keine sichtbare Welt. Alle Götter waren ursprünglich gut, aber Ahriman wurde neidisch gegen Ormuzd und daher böse und verderbt. Die Geisterschaar theilte sich, der eine Theil schloß sich Ormuzd, der andere Ahriman an; es entstand ein Reich des Guten und ein Reich des Bösen. Ormuzd besaß das Schöpferwort: durch dieses schuf er nun die Welt in sechs Perioden. Den Kern bildet die Erde, dann kommen die beweglichen Wölbungen des Mondes, der Sonne und der Sterne; die vierte unbewegliche Wölbung ist der eigentliche Himmel, das Paradies, die Wohnung des Ormuzd und der guten Geister. Als Himmel und Erde geschaffen waren, zog sich Ormuzd in seine Wohnung zurück. Alsbald drang Ahriman mit seinen Geistern in die Welt ein, er durchbohrte den Himmel und sprang in Schlangengestalt auf die Erde, um die Schöpfung Ormuzd's zu zerstören. Ormuzd stellte sich ihm mit seinen Geistern

entgegen, der Götterkampf endete mit der Besiegung Ahriman's, aber aus der Welt ihn zu vertreiben vermochte er nicht, und so kam es, daß die Welt gut und böse geworden ist. Alles, was man auf der Erde gewöhnlich als schädlich und unangenehm ansieht, ist ein Werk Ahriman's, aber jedem bösen Geiste steht auch ein guter gegenüber und so wird seine Macht gebrochen. Ormuzd hatte jetzt die Uebermacht im Himmel, die Herrschaft der Erde war ihm aber durch Ahriman verkümmert; um nun hier seine Streitkräfte zu vermehren, beschloß Ormuzd, reine Geister mit irdischen Leibern zu verbinden. Das erste der so geschaffenen Wesen war ein Stier. Ahriman griff den Stier an und tödtete ihn; wie aber auf der einen Seite die Seele des Stieres entfloh, den Samen desselben mit sich nehmend, so entstieg der andern Seite der erste Mensch. Aus dem Leichnam des Stieres entstand das Pflanzenreich und aus dem Samen ging das Thierreich hervor. Der erste Mensch war auch den beständigen Angriffen Ahriman's ausgesetzt und wurde bald von den bösen Geistern getödet, aber aus dem Samen, welchen er sterbend verlor, wuchsen die ersten Menschen aus der Erde, die Stammältern des ganzen Menschengeschlechtes.

Die besondere Schöpfungsgeschichte knüpft sich ganz an die Oertlichkeit, an den Berg Albordsch, wie in Aegypten an den Nil; die Heimath war auch den Ariern die Welt. Das Schöpferwort und Alles, was durch dasselbe hervorgerufen, was am Himmel und auf der Erde sich befindet, wird als beseelt gedacht, auch die Zeiten und Zeitabschnitte sind selbstständige Wesen.

Die Menschen waren alle Ormuzd's Geschöpfe, sie sollten seine Macht verstärken und ihm zur gänzlichen Besiegung Ahriman's verhelfen; sie wurden aber von diesem verführt. Durch Früchte, welche er ihnen gab und welche sie aßen, wurden sie verkehrt, sie fielen ihm zu und verehrten ihn, wurden somit Anhänger des bösen Gesetzes. Als nun mit der Vermehrung der Menschen Ahriman's Macht immer größer wurde, da offenbarte sich Ormuzd einem Sterblichen, einem weisen Manne, der die Arier zum Dienste Ormuzd's bekehrte und sie wieder zu Anhängern des guten Gesetzes machte; sie verehrten ihn unter dem Sinnbilde des Feuers. Die Zahl der Gläubigen war aber immer noch gering und nahm auch wieder ab, so daß sich Ormuzd von Neuem an Zoroaster offenbarte, welcher von ihm die göttliche Lehre, den göttlichen Willen und die Einsicht in die künftigen Dinge empfing.

Der Mensch ist unsterblich und hat nach seinem Tode eine Läuterung oder Reinigung zu bestehen. War sein Leben hier frei von Ahriman'scher Verunreinigung, so geht er gerade in den Himmel über, im andern Falle aber stürzt er in die Hölle, wo er längere oder kürzere, größere oder kleinere Qualen zu erdulden hat, aus welcher er aber gereiniget in die Wohnung der Seligen sich erhebt. Die Dauer der Welt beträgt 12000 Jahre, die ersten 3000 wurden durch die Schöpfung ausgefüllt und in dieser Zeit herrschte Ormuzd allein. In der zweiten Periode von 3000 Jahren theilte Ahriman mit Ormuzd die Herrschaft der Erde. Die dritte Periode von gleicher Dauer, deren Anfang in das Auftreten Zoroaster's fällt, wird zwar Ahriman gegeben sein, allein der Kampf gegen ihn wird immer heftiger werden, ungewöhnliche Ereignisse werden eintreten, das Ende der Welt zu verkündigen; machtlos und besiegt, werden endlich Ahriman und seine Geister aus der Welt vertrieben werden. Am Ende dieser Periode erfolgt nun eine allgemeine Auferstehung aller Menschen mit ihren Leibern; die Bösen werden eine kurze, aber schmerzliche Reinigung zu bestehen haben. Die ganze Erde und alle Geschöpfe, auch Ahriman und die Seinigen, werden durch Feuer gereiniget und geläutert wieder gut, woraus sie mit ätherisch verklärten Leibern hervorgehen. Die vierte Periode endlich von

3000 Jahren wird von allen Wesen in ungestörter Glückseligkeit verlebt. Nach Verlauf dieser Zeit löst sich Alles wieder auf, Gott ruht eine Zeit hindurch, um dann von Neuem zu schaffen.

In diesen Bildern liegt eine großartige Weltanschauung, welcher eine entsprechende erhabene Sittenlehre zur Seite steht. Der Grundgedanke ist der ewige, unendliche Gott, als die höchste Güte, der aus freiem Willen die Welt geschaffen hat. Die Arier konnten natürlich der Gottheit nicht absprechen, was sie an ihren Geschöpfen wahrnahmen, die Freiheit des Willens; aber dieser war geleitet von der höchsten Weisheit, also verschieden von der Willkür der Menschen. Nach der beschränkten Ansicht des ganzen Alterthums, wornach die Erde der Mittelpunkt der ganzen Schöpfung ist, dachten sich die Arier, Gott habe eine große Kugel von sich selbst abgegrenzt und innerhalb dieser Grenze die Welt geschaffen, während er außerhalb unverändert blieb. In diesem Raume und aus diesem Theile seiner selbst schuf er nun zuerst den innerweltlichen Geist „Ormuzd", dargestellt als Licht und Feuer, und die Materie „Ahriman", deren Bilder Finsterniß und Wasser waren, d. h. nicht Licht erzeugender, feiner, flüssiger Stoff. Dieß waren die ersten und höchsten aus der Urgottheit hervorgegangenen Gottheiten und Ormuzd war der innerweltliche Gott, gegen den die Urgottheit als ruhend bei dem Weltprozesse zurücktrat. Ormuzd und Ahriman waren nur allgemeine Bezeichnungen für Geist und Materie, doch wurden sie auch als persönliche Wesen genommen und, obgleich das Ganze umfassend, bildeten sie auch Theile und das geschaffene Geisterheer die Ergänzung. Das Schöpferwort selbst wird, in schönem Bilde, als persönliches Wesen genommen und damit ausgedrückt, wie der Gedanke Gottes schon die Verwirklichung ist. Der Abfall Ahriman's ist das Streben der Materie, sich mit dem Geiste zu verbinden, ihn zu sich herab zu ziehen, was aber Ormuzd bekämpft; aus diesem Kampfe geht die Welt hervor. In dieser Periode war Ormuzd Ahriman überlegen, der Geist hatte noch die Uebermacht über die Materie, aber bei fortschreitender Bildung der Welt gewann Ahriman an Stärke und bald standen sie sich gleich. Hier tritt nun ein Wendepunkt ein. Um die Materie zu besiegen und sie dem Geiste wieder zurückzugeben, schafft Ormuzd, der die Schöpferkraft besitzt, die organische Materie, dargestellt unter dem Bilde des Stieres, welcher als Einzelwesen nur eine allgemeine Bedeutung haben kann. Diese Schöpfung wird wieder vernichtet, aber aus ihren Trümmern geht ein neues organisches Reich, eine Pflanzen- und Thierwelt hervor. Unter dem Bilde des ersten Menschen, der, ungeschlechtig geschaffen, ebenfalls nur eine allgemeine Bedeutung hat, wird ein höheres organisches Reich angedeutet; es geht ebenfalls zu Grunde und wird dadurch zum Keim der gegenwärtigen, letzten Schöpfung und des Menschengeschlechtes. So weit geht die persische Weltentstehungslehre; sie beruht, wie die ägyptische, auf reiner Naturbetrachtung, hat aber einen höheren Flug genommen, als jene, und so wie sie sich mehr der Wahrheit anschließt, so steht ihr auch eine höhere Moral zur Seite.

Zoroaster schildert nun, wie die Menschen ihrer Bestimmung, Streiter des Geistes zu sein, die Vergeistigung der Welt anzubahnen, nicht nachgekommen seien und wie deßhalb Ormuzd sich offenbart habe, um ihnen ihre Bestimmung zu enthüllen. Er sagt aber voraus, daß sie unter großen Kämpfen dieses Ziel dennoch erreichen würden; in der vierten Periode ist dann die Macht Ahriman's gebrochen und er selbst zum Lichte zurückgekehrt. Die Offenbarung haben wir hier nicht wörtlich zu nehmen, sie ist bloß die Erleuchtung des Geistes durch Ormuzd, wie sie frommen Männern durch Nachdenken geworden.

Besonders wichtig ist die Stellung der Menschen in diesem Glaubenskreise:

sie sind hier nicht abtrünnige Geister und Büßer in dieser Welt, gefallene Sünder und Sträflinge wie im ägyptischen, sondern sie sind die Streiter Gottes, die Erlöser und Vergeistiger der materiellen Welt. Sie führen dieß zwar nur aus unter dem unmittelbaren Beistande Gottes, aber ihre höchste Pflicht ist, in den Kampf einzugehen, um den Geist wieder aus seinen Fesseln zu lösen.

Dieser Glaubenskreis begünstigte in seiner Grundlage die geistige Entwickelung der Menschen ungemein, sie waren darin zur höchsten geistigen Thätigkeit aufgefordert und zur Unterstützung ihrer Nebenmenschen in dieser Pflicht. Wenn die Aegypter genöthiget waren, ihre Lehre zu verbergen und die geistige Entwickelung zu hemmen, so finden wir hier gerade das Gegentheil, die Lehre Zoroasters verlangte und erhielt die größte Oeffentlichkeit. In ihrer Beziehung zum Staatsleben verhinderte sie zuerst die Entstehung von Kasten, sodann war sie der Bildung eines mächtigen Priesterstandes entgegen und begünstigte die Monarchie. Dadurch aber, daß sie Darius zur Staatsreligion erhob und so zu einem Werkzeuge in seiner Hand machte, war an eine freie Fortentwickelung derselben nicht zu denken; sie wurde ihrem Wesen nach im Keime erstickt und nur das Unwesentliche und Aeußerliche entfaltete sich, bis nach mehr als tausend Jahren der Islam die todte Form vollends zerstörte.

So sehen wir denn in den großen Staaten Vorderasiens während beinahe drei Jahrtausenden zwei entgegenstehende Prinzipien gegeneinander kämpfen; nirgends auf der Erde war der Prozeß der geistigen Entwickelung großartiger, als hier. Beide Prinzipien sind gefallen, aber aus ihnen sind vielgestaltig gemischt andere hervorgegangen, welche ihr Wohl und Wehe über die Erde verbreitet haben. Die stolze Priesterkaste Aegyptens, welcher wir die früheste Kultur verdanken, ist von der Erde verschwunden, und die Verehrer Ormuzd's, die der ächten wissenschaftlichen Forschung um dritthalb tausend Jahre vorangeeilt waren, haben nur in den heutigen Tadschicks (vom Oxus bis zum Indus) Nachkommen hinterlassen, die, als demüthige Sclaven ihrer tatarischen Herren, uns ein trauriges Bild liefern. Weder Tempel, noch Paläste, noch Königsgräber bezeichnen die Stätte, wo der arische Geist seine schönsten Blüthen getrieben; aber da, wo er unterging, in den Ebenen des Euphrat, hat die menschliche Wißbegierde die Denkmäler einer gemischten Kultur zu Tage gefördert und jene ehrwürdigen Zeugen sprechen jetzt zu uns, in ihrer Sprache, von den Anziehungen und Abstoßungen der verschiedenen Elemente zum Zwecke der höheren geistigen Gestaltung. Das materielle Leben stand hier auf einer bedeutenden Höhe und war weiter vorgeschritten, als in Aegypten; es wurden da eine Menge Kenntnisse gesammelt und Erfindungen gemacht, welche alle darauf abzielten, die Annehmlichkeiten des Lebens zu erhöhen. Allein obschon das Nachdenken sehr angeregt und die geistige Thätigkeit groß war, so scheint es doch zu keiner eigentlichen Wissenschaft geführt zu haben; Erfahrungen, durch viele Jahrhunderte hindurch fortgesetzt, wie z. B. in der Astronomie, blieben immer die Grundlage alles Wissens. Die größte Erfindung aller Zeiten, die Buchstabenschrift, muß aber wohl hierher versetzt werden, und es scheint fast, als ob sie erst durch die vereinte Kraft der beiden höchsten Rassen vollkommen hätte zu Stande kommen können. So viel sich aus den bis jetzt entdeckten Denkmälern schließen läßt, scheint die Kunst höher als in Aegypten gestanden zu haben; das Kolossale tritt mehr zurück, die Zeichnung wird richtiger und schließt sich mehr der Natur an. An eine ideale Darstellung ist jedoch noch nicht zu denken, denn obschon die Perser sich ihre kosmischen Gottheiten und Geister persönlich, ja menschenähnlich dachten, so geschah dieß doch nur, um sie mit größerer Klarheit festhalten zu können; zu einer idealen Entwickelung und Darstellung in

dieser Form gelangten sie nicht. Die Form war dem Inhalte, dem Wesen untergeordnet; zur Entwickelung der Kunst mögen daher die hier thätigen Arier nur wenig mitgewirkt haben, sie kann daher auch nur als eine veredeltere Form der ägyptischen betrachtet werden. Wenige Länder haben übrigens ein wechselvolleres Schicksal gehabt, als diejenigen, von denen hier die Rede ist. Reich ausgestattet von der Natur, durch Kunst und Fleiß noch mehr gehoben, zugänglich allen Erzeugnissen der alten Welt, waren sie nur zu sehr geeignet, ihre Bewohner zu erschlaffen und im Lebensgenusse untergehen zu lassen, und es ist anzunehmen, daß sie noch viel früher gänzlich versunken sein würden, wenn nicht Ereignisse der gewaltigsten Art sie mitten in ihrer Schwelgerei aufgescheucht und zu neuer Energie gehoben hätten. Sie gelangten nie zu dauernder Ruhe; hatten sie heute die Mauern ihrer Städte gegen die Eroberer vertheidiget, so mußten sie morgen dem Andrange der Völker weichen, die wie ein verheerender Strom hereinbrachen, Alles vor sich niederwerfend und nur eine schreckenvolle Wüste hinter sich lassend. So hat sich dieses fortgespielt, bis die zahlreichen herrlichen Städte alle in Trümmer lagen, bis die vielen Millionen, die einst hier wohnten, verschwunden waren und die reichen Gegenden, all ihres Schmuckes beraubt, nur noch eine einsame trostlose Oede darboten.

Indien.

Die afrikanischen Rassen sind bei ihren Wanderungen nach Osten zuerst nach Indien gekommen und haben wahrscheinlich in diesem reichen und fruchtbaren Lande ihre ersten Kolonien gegründet. Seitdem man die Wildnisse des südlichen Indiens näher kennen gelernt hat, kann es nicht mehr in Zweifel gezogen werden, daß diese Gegenden nicht allein die Negerrasse in allen Abstufungen aufzuweisen haben, sondern auch noch verkümmerte Reste der höhern ägypto-semitischen Rasse enthalten. Es fanden sich hier also die gleichen Elemente, wie in Aegypten, zusammen und aus den gleichen Ursachen gingen gleiche Wirkungen hervor. Es ist ferner gar nicht unwahrscheinlich, daß in sehr früher Zeit eine längere Verbindung zwischen beiden Ländern stattgefunden hatte, wodurch ihre Kultur so gleichförmig wurde, daß indische Soldaten sich in ihre Heimath versetzt glaubten, als sie in Aegypten die Ruinen der großartigen Tempel vor sich sahen. Neben den ganz ähnlichen Baudenkmälern finden wir in Indien auch die Hauptgrundlage der socialen Einrichtung Aegyptens, die vier Kasten, wieder und noch manches Andere, was den angenommenen Zusammenhang nothwendig macht. Man könnte aber eben so gut behaupten, die Kultur sei von Indien nach Aegypten verpflanzt worden, als das Umgekehrte; die folgenden Betrachtungen werden jedoch zeigen, daß dieß nicht der Fall war. Die Einwanderung der Arier in die Länder am Ganges geschah wahrscheinlich früher, als die nach Iran, jedenfalls kann sie nicht später gesetzt werden. Man darf also wohl annehmen, daß die Stämme, welche so auseinander gingen, auf keiner sehr ungleichen Stufe der Bildung gestanden haben, und die nahe Verwandtschaft der Zend- und Sanskritsprache läßt sogar vermuthen, daß die beiden Zweige früher vereint waren und sich ganz gleich standen. Hieraus geht nun hervor, daß die Arier keine materielle Kultur nach Indien brachten, sondern einer dort schon bestehenden sich anschlossen und sie nach ihrer Weise veränderten. Diese Annahme gewinnt um so größere Sicherheit dadurch, daß die indische Kultur entschieden als eine gemischte sich zeigt, deren Urbestandtheile sich nachweisen lassen. Vor der Eroberung durch die Arier scheint Indien, so

weit es von der Kultur bereits ergriffen war, wie Aegypten vor Menes, aus einer Menge kleiner Staaten bestanden zu haben, welche nur durch ihre gleichen gesellschaftlichen Einrichtungen einen Zusammenhang hatten. Dieses erleichterte die Eroberung, welche nur nach und nach erfolgte und zwar vom heutigen Pendschab her, von wo die Arier wie ein Keil in die Ebenen des Ganges eindrangen. Die Kämpfe müssen langedauernd, schwer und oft von wechselndem Erfolge gewesen sein, denn sie erlangten die Uebermacht wohl nur dadurch, daß sie die beiden höchsten Kasten, wenn auch nur theilweise, in sich aufnahmen, wodurch sich die Interessen den andern Kasten gegenüber einigten. Auch nach der Eroberung blieb Indien in verschiedene Staaten gespalten, aber die Arier dehnten sich immer weiter aus, theils auf friedlichem, theils auf gewaltsamem Wege. Das südliche Hochland vermochten sie jedoch nie völlig zu unterwerfen; es blieb in seinen schwer zugänglichen Wildnissen der Zufluchtsort der verdrängten Urbewohner, doch haben sich auch hierher Spuren der Sanskritsprache verirrt. Was nun die erste Kultur Indiens im Allgemeinen betrifft, so müssen wir uns dieselbe gleich mit der ägyptischen denken, und sie würde sicher auch zur Einheit des Staates geführt haben, wenn sie ungestört sich hätte entwickeln können. Das Sanskritvolk trat aber hemmend und verändernd in sie ein und übte in verschiedener Stärke seinen Einfluß aus, während es selbst mehr oder weniger dem fremden Einflusse erlag. So kam es denn, daß nicht ein Glaubenskreis entstand, sondern mehrere Glaubenskreise, welche die verschiedenartigsten Richtungen nahmen, jedoch so lange ungestört neben einander bestehen konnten, als sie nicht die Wurzel der gesellschaftlichen Organisation, die Kasteneintheilung, angriffen. Wir haben gesehen, auf welcher einfachen Grundlage diese Einrichtung in Aegypten ruhete, wie man sich ihrer Bedeutung stets bewußt geblieben ist, und mit welcher weisen Mäßigung sie im Staate gehandhabt wurde. Den Ariern war diese Gedankenrichtung völlig fremd; sie nahmen das Kastenwesen, wie es sich fand, hielten es aufrecht, um mit den Herrschern zu herrschen, und erklärten es sich später auf ihre Weise. Die wahre Bedeutung der Sache blieb ihnen jedoch verschlossen; es fehlte ihnen daher auch die staatsmännische Weisheit der Aegypter und durch ihre schonungslose, jedem menschlichen Gefühle spottende Behandlung der untern Kasten zeigten sie hinreichend, daß sie nicht die Urheber dieser Einrichtung waren, denn das Unvernünftige und Widermenschliche ist nie ursprünglich, sondern unverstandenen Quellen entflossen. In Aegypten war diese Gliederung eine Folge der Theilung der Arbeit nach wahren oder eingebildeten Werthen und Fähigkeiten und jedes Glied war in seiner Stellung geachtet und geschützt; in Indien dagegen gibt das Gesetzbuch des Menes einen schauderhaften Commentar zu dieser mißverstandenen Einrichtung. Ein solcher Uebergang aus einem einfachen, wenn auch nicht sittlichen, socialen Verhältnisse zu so unnatürlichen Zuständen, wie sie in Indien bestanden, und zum Theil noch bestehen, setzt einen langen und vielbewegten geistigen Prozeß voraus, von welchem uns leider die genaue Kunde fehlt. Dieser Prozeß war aber der geistigen Entwickelung ungemein günstig, indem beiden Elementen, die in die Mischung eintraten, gegenseitig fremde Ideenkreise geboten wurden, welche zum Nachdenken anregten, und die man mit den eigenen in Verbindung zu bringen suchte. Hieraus entstanden nun, begünstiget durch die politische Trennung, kleinere Entwickelungskreise mit verschiedenen Richtungen, welche ihrerseits wieder auf einander einwirkten, und die verschiedenartigsten Gestaltungen erzeugten. In keinem Lande ist wohl mehr über die letzte Ursache aller Dinge, über die Entwickelung, den Zweck und das Ende der Welt und aller irdischen Dinge, nachgedacht worden, als in Indien. In keinem Lande war aber auch dieses

Nachdenken ungestörter vor sich gegangen, als hier, wo das Abschließungssystem die größte Vollendung erreicht hatte. Es kann hier nicht in das Labyrinth der indischen Denker eingegangen werden, und um es mit Sicherheit thun zu können, dazu fehlen bis jetzt die nöthigen Hülfsmittel, aber so viel läßt sich aus dem Bekannten ersehen, daß alle Abstufungen der ersten Grundlage vorhanden sind, von der Emanation der ägyptischen Urgottheit bis zum persönlichen Gotte der Perser. Eine von diesen Speculationen besteht etwa in Folgendem: Die Urgottheit, Brahma, ist der Schöpfer aller Dinge (der Urgott der Perser); von ihm ist zuerst ausgegangen, als Theil seines Ichs, der Gott der Welt. Dieser Weltgott ist eine Dreifaltigkeit, zuerst Brahma der Schöpfer (entspricht nicht ganz Ormuzd), dann Vishnu der Erhalter und Siva der Zerstörer (Sevek). Brahma hatte zuerst nur reine Geister geschaffen, viele Millionen höherer und niederer Art, welche alle, wie sie vom Schöpfer hervorgegangen, gut waren, von denen aber viele Gott untreu und somit böse wurden. Nun erst schuf Brahma diese Welt und die irdischen Körper, bestimmt zum Reinigungsort der gefallenen Geister. In jeden irdischen Leib, als Pflanze, Thier oder Mensch, wurde einer von diesen Dämonen eingeschlossen, wodurch die lebenden organischen Wesen auf der Erde entstanden. Brahma hat die Menschen geschaffen; aus seinem Haupte ging die erste Kaste, die Brahmanen hervor, aus den Schultern die Krieger, aus seinen Lenden die Vaisjas, als producirende dritte Kaste, und aus seinen Füßen die Sudras oder die dienende Kaste. Diese Vorstellungen sind meistentheils dem ägyptischen Glaubenskreise nachgebildet; nur bedurfte es einer Vermittelung, den lebendigen Gott einzuführen. Dieß geschah durch Vishnu, welcher der zerstörenden Zeit entgegenwirkt und in einer Verkörperung auf der Welt erscheint, um sie wieder in Ordnung zu bringen, so oft dies nöthig ist. Die irdischen Körper sind alle sündhafte Wesen und das Leben ist ihre Büßungszeit. Der Geist wandert aus einem Körper in einen andern, bis er gereiniget zu Gott zurückkehrt. Die Mischung der beiden Glaubenskreise ist unverkennbar, aber man sieht auch, daß das Bewußtsein der Urbedeutung beider verloren gegangen war, und man vermochte nicht, die Widersprüche zu entfernen. Unvereinbar mit dem Begriffe der höchsten Intelligenz ist eine Welt, welche von Zeit zu Zeit der Nachhülfe bedarf; unvereinbar die Schöpfung einer Geisterwelt, die theilweise böse wird, obgleich sie Geist aus Gott ist. Das Böse war in Aegypten der Verfall der Welt, die Zerstörung, überhaupt Alles, was die bestehende Ordnung aufhob oder im Fortschreiten aufzuheben fähig war. Böse war die Welt, nach den Persern, durch ihre doppelte Natur als Geistiges und Materielles, insoferne letzteres dem Geiste hemmend entgegentrat, aber darin bestand gerade seine Bestimmung, diesen Zug nach einer andern Richtung zu bekämpfen und zu überwinden. Böse und nur böse war die Welt nach den Indern, jeder Zustand eine Strafe der Sünde der Vorschöpfung. Die Losung in Aegypten war Erhaltung, in Persien Kampf und Sieg, in Indien Leiden und Dulden. In Folge dieser Ansichten und der damit verbundenen Staatseinrichtungen herrschte in Indien nicht etwa eine wohlorganisirte Priesterschaft, sondern in jedem Staate die Brahmanenkaste durch ihre von der Religion geheiligte Stellung; die Könige waren nur ihre Lehensträger, aller Grund und Boden ihr Eigenthum, der nur durch ihre Gnade an Andere gelangen konnte. Alles, was in Aegypten einfach und natürlich sich zeigte und im inneren Zusammenhange stand, war hier übertrieben, unnatürlich und im Widerspruche mit sich selbst. Die Welt und das irdische Leben, eine Folge der Sünde, konnten, bei den Gläubigen dieser Ansicht, zu keiner Geltung gelangen, alles Treiben der Welt war Beschäftigung mit der Sünde; Enthaltsamkeit, Selbst-

betrachtung und freiwillig auferlegte Leiden und Büßungen waren allein verdienstlich. Wäre diese Ansicht in Indien allgemein durchgedrungen, so würde das Land bald eine Wildniß geworden und die Bewohner aller Kultur verlustig gegangen sein, so aber fanden sich Schwache genug, die sich zur Demuth der Frommen nicht erheben konnten, denen auch die Welt etwas galt und die stark genug waren, die Kultur zu erhalten. Diese Richtung steigerte sich sogar dahin, daß alles Irdische, die ganze Welt Brahma wurde und eine Art Pantheismus aufkam. So wuchsen auf unverstandenen Grundlagen extreme Richtungen hervor, und es ist nur zu bedauern, daß die gewiß höchst lehrreiche Geschichte dieser geistigen Bewegung uns wahrscheinlich für immer verborgen bleiben wird, indem die Inder, bei ihrer Verachtung aller weltlichen Dinge, solche Aufzeichnungen für unwerth gehalten haben. Diese Bewegung mußte jedoch nothwendig die geistige Entwickelung fördern; denn wenn auch die eine Richtung hiergegen ein Hemmniß war, so rief sie doch andere entgegenstehende hervor und gab so Anlaß zum Nachdenken. Es erstreckte sich aber dieses nur auf den Theil der Bevölkerung, der überhaupt allein berechtiget war, sich mit höheren Dingen zu beschäftigen und der allein von Gott ein Privilegium auf das Denken hatte. Es wurde jedoch auch ein Versuch gemacht, diese Schranke zu zerbrechen, und diese Zeit muß man als die der höchsten geistigen Bewegung in Indien betrachten. Der indische Pantheismus und der Widerspruch der Lehre von der Schonung der lebenden Wesen mit der schonungslosen Behandlung eines großen Theiles der Bevölkerung führte eine große Spaltung in den religiösen und socialen Dingen herbei. Im sechsten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung und nahezu gleichzeitig mit dem Auftreten Zoroasters war auch Indien zu einer Reformation reif geworden. Gegenüber den Allgötterern suchten die Buddhisten Gott auf eine strenge Einheit zurückzuführen und geriethen damit auf das andere Extrem, indem sie ihrem Gotte alle Eigenschaften absprachen. Das höchste Wesen hat nach ihnen zwei Zustände, einen vollkommenen, die Ruhe, und einen unvollkommenen, die Thätigkeit, in welch' letzterem es als die sichtbare Welt erscheint. In diesen unvollkommenen Zustand ist Gott nicht von selbst eingetreten; sein Dasein verdankt er einem unglücklichen Zufalle, durch diesen emanirte die Thätigkeit aus Gott, und die Schöpfung begann. Zuerst ging der Geist hervor, dann die Materie; aus beiden endlich wurde die Welt. Diese Ansicht wurde herbeigeführt durch die Betrachtung des großen Jammerstandes der Erdenwesen: unendliches Mitleid mit den Menschen erfaßte den Schöpfer dieses Glaubenskreises und, dadurch veranlaßt, lehrte er die Religion der Entsagung, der Liebe und des Mitleides. Hiernach geht die Welt allmälig wieder in die Ruhe zurück, die Körper durchwandern aber viele Zustände, ehe sie dahin gelangen (Seelenwanderung). Der Mensch kann diese Rückkehr abkürzen, wenn er sich hienieden schon dem vollkommenen Zustande zu nähern sucht durch Entschlagung aller irdischen Gefühle, Regungen und Leidenschaften; gelingt ihm dieß, so gelangt er auf die nächste Stelle zu Gott, er wird Buddha. Hierzu gehört aber, daß der Mensch die rechte Einsicht in seinen Zustand habe, und diese erhält er nur durch die Entwickelung seines Geistes, durch Erwerbung von Kenntnissen und Beschäftigung mit den Wissenschaften. Diese Pflichten sind für alle Menschen dieselben, und alle müssen sich darin gegenseitig unterstützen. Die Unterordnung der Menschen in verschiedene Kasten wird daher als unvereinbar hiermit verworfen. Man sieht, wie glücklich die Buddhisten die Schattenseiten ihres Glaubens zu umgehen wußten und wie eine Lehre, welche in sich den Keim trug, alle Kultur aufzuheben, durch eine geschickte Wendung zur Schützerin der Wissenschaften wurde. Wahrscheinlich würde diese Richtung der indischen Denker

neben so vielen andern ungestört haben bestehen können, wenn in ihr nicht zugleich eine große Veränderung der gesellschaftlichen Verhältnisse (der Kasteneinrichtung) gelegen hätte; hierdurch erzeugte sie aber einen Widerstand und einen Kampf, welcher durch mehrere Jahrhunderte sich hindurch zog und zuletzt mit der Vertreibung des Buddhismus vom indischen Boden endigte. Hiermit war aber auch der Lebensfaden der geistigen Entwickelung in Indien abgeschnitten; die nächste Zeit der Ruhe brachte zwar, wie gewöhnlich unter solchen Umständen, noch einige glänzende Erscheinungen hervor, dann aber eilte Alles dem Abschlusse, der Erhaltung des Gewonnenen, und somit dem Verfall zu. Die Buddhisten aber verbreiteten sich und ihre Lehre nach Norden und Osten, wo sie in kurzer Zeit viele Millionen Menschen in den Kreis ihrer Kultur hineinzogen und so zur größten Wohlthat für die Menschheit wurden. Die Aehnlichkeit des Buddhismus, in manchen Beziehungen, mit dem Christenthum ist überraschend und vielfach bemerkt worden. Die Aehnlichkeiten und Abweichungen in Indien gegen Aegypten sind folgerichtig; mit dem Schöpfer als höchste, ewige Intelligenz und dem Rückgange der Welt in sie ist die Vernichtungslehre aufgehoben, daher gab es in Indien keine eigentlichen Mysterien, auch fehlte der Gebrauch der Erhaltung der Todten und die damit zusammenhängenden Begräbnißbauten. Die Seelenwanderung ist beiden gemeinschaftlich, wiewohl in verschiedener Bedeutung; ganz ebenso die Kasteneintheilung, und die colossalen Tempelbauten. Im Gegensatze zu Aegypten hat folgerichtig in Indien die Form keine Bedeutung, sie ist das durchaus Unwesentliche und nur der Inhalt, die Substanz, als das Erste und Letzte, als das Unvergängliche hat einen Werth, was für die Entwickelung der mathematischen Wissenschaften von Wichtigkeit ist.

Griechenland.

Die Eroberung Unterägyptens durch asiatische Völker war ein an sich schon nicht unwichtiges Ereigniß, ist aber noch mehr durch seine Folgen von großer Bedeutung geworden. Die Eroberer, gewöhnlich Hyksos, d. h. Hirten genannt, waren Nomaden und scheinen durch die politischen Veränderungen im Osten selbst aus ihren früheren Wohnsitzen verdrängt worden zu sein. Sie gehörten zu dem Stamme der Phöniker, einer Abtheilung jener Völkerschaften, welche aus einer größern oder geringern Verschmelzung der afrikanischen Kulturrasse mit arischen Elementen hervorgegangen waren. In Aegypten müssen besondere Verhältnisse obgewaltet haben, welche die Kraft des Staates geschwächt und die Eroberung ermöglichet haben, doch konnte diese sich nur über Unterägypten ausdehnen, und neben dem Hyksosreiche bestand fortwährend das oberägyptische unverändert. Das Hirtenleben war bei den Aegyptern tief verachtet und die Hirten gehörten den untersten Klassen der Bevölkerung an. Dieses Verhältniß hätte vielleicht mit der Zeit verändert werden können, wenn die Hyksos ihre Herrschaft über das ganze Land auszudehnen im Stande gewesen wären; so standen ihnen aber die alten Ansichten und Einrichtungen stets hindernd entgegen. Die neuen Herrscher wurden deßwegen immer als Fremde und somit zur letzten Klasse der Gesellschaft gehörig betrachtet, sie verschmolzen nicht mit der ehemals herrschenden Kaste und überhaupt nicht mit der Bevölkerung und vermochten sich nur durch Gewalt zu behaupten. Die Phöniker scheinen nun anfänglich den Versuch gemacht zu haben, eine Aenderung in den religiösen und staatlichen Zuständen herbeizuführen, allein da er mißlang, so ließen sie die alte Ordnung bestehen und schloßen selbst sich ihr so weit an, als es mit ihrer Stellung

vereinbar war. Diese Zustände, welche über 500 Jahre gedauert haben, konnten, trotz aller gegenseitigen Abneigung, dennoch nicht fehlen, einen bedeutenden Einfluß auf beide Theile auszuüben. Die Aegypter wurden jetzt mit den Ideenkreisen bekannt, welche im Osten aus der Einwirkung der beiden Elemente hervorgegangen waren und die Phöniker verbanden ihre Ansichten mit denen der Aegypter, so weit dies ohne offenbaren Widerspruch möglich war. Ueberall, wo solche Mischungen stattfanden, ging das wahre Verständniß der Sache mehr oder weniger verloren, ein neuer Ausgangspunkt für die Verknüpfung mußte gefunden werden, woraus eine größere Freiheit der Anschauung hervorging. Die Phöniker befanden sich nun in diesem Falle: sie verknüpften ihre Anschauungen wieder mit ägyptischen Vorstellungen; nur zwei Dinge konnten sie unmöglich aufnehmen, das Kastenwesen und die Seelenwanderung. Sie duldeten die Kasten als eine bestehende Einrichtung, welche sie nicht abändern konnten, ohne sie anzuerkennen, denn dadurch würden sie sich selbst auf die letzte Stufe im Staate gestellt haben. Da ferner nach der Lehre der Seelenwanderung die verschiedenen Abtheilungen der Gesellschaft nur verschiedene Stufen der Wiedergeburt waren, so war auch diese Lehre mit ihrer politischen Stellung unvereinbar.

Nach schweren Kämpfen gelang es endlich den Aegyptern, etwa um 1800 v. Chr., ihre fremden Herrscher los zu werden und die Phöniker gänzlich zu vertreiben. Unterdessen waren um 2000 v. Chr. die Abrahamiden von Nordosten her in Palästina eingewandert und wurden somit noch unter den Phönikern in Aegypten aufgenommen; nach deren Vertreibung begann die Bedrückung der Israeliten und endlich verließen auch sie das Land um 1487. Dieses Verhältniß ist besonders wichtig für die Beurtheilung des Glaubenskreises der Hebräer; es lassen sich nämlich, wie bei den Phönikern, so auch bei ihnen die Quellen nachweisen, aus welchen er hervorgegangen und wie sie die verschiedenartigen Bestandtheile zu einem Ganzen verknüpften, ohne über die Grundlagen eine klare Anschauung zu haben.

Den vertriebenen Hyksos war die Bestimmung zugefallen, wie später den Buddhisten, einen großen Theil der Menschheit in ihre Kultur hereinzuziehen. Sie verbreiteten sich über die Inseln und Küsten des Mittelmeeres, und trugen in alle Länder, wohin sie kamen, die ägyptische Kultur, wie sie dieselbe sich angeeignet und umgeschaffen hatten. Ihre Wanderungen gingen aber durch Jahrhunderte hindurch, indem sie oft wieder genöthiget waren, ihre Wohnsitze zu verlassen und sich andere aufzusuchen. Zuletzt lösten sie sich in andern Völkern auf und verschwanden gänzlich aus der Reihe der selbstständigen Staaten. In Palästina hatte sich ein Theil von ihnen, wahrscheinlich sogleich nach ihrer Vertreibung aus Aegypten, niedergelassen; sie gründeten da kleine Staaten und erbauten viele Städte, so daß das Land nach der Rückkehr der Hebräer eine ganz andere Gestalt gewonnen hatte. Hier wurden sie nun durch die Massen der neuen Ankömmlinge unterworfen oder verdrängt; diese rückten an ihre Stelle, mußten aber später auch ihr Schicksal theilen. Dieser semitische Stamm, der im Religiösen mehr an die arische, im Politischen mehr an die ägyptische Weise sich angeschlossen hatte, vermittelte die Gegensätze auf eine andere Weise. Er gelangte zu keiner wahren Blüthe; in seinem Staatswesen stets durch innere und äußere Kämpfe zerrüttet, und an sich zu unbedeutend, um auf die Geschicke der Völker einzuwirken, erhielt er erst später die Bestimmung, der Centralpunkt zu werden, in welchem alle Bestrebungen der alten Welt zusammentrafen und hier zu einem Abschlusse gelangten.

Nach dem angeführten Gesetze der Völkerströmungen hatte der Süden Europa's seine ersten Bewohner von Afrika aus erhalten. An den Mündungen

der Flüsse bildeten sich die ersten Ansiedelungen und wuchsen gewissermaßen längs den Ufern in das Land hinein, sich immer weiter verbreitend. In Griechenland deuten manche Sagen auf eine solche Urbevölkerung, und die zum Theil noch vorhandenen kyklopischen Bauten weisen auf einen Zustand, welcher mit den frühesten Zuständen Aegyptens große Aehnlichkeit gehabt haben muß. Kein arisches Volk hat ursprünglich je solche Bauten aufgeführt; sie gehören einer andern Richtung, einer andern Rasse an. Vom Norden her wanderten die Griechen, ein arischer Stamm, in das Land ein, und die Urbevölkerung, welche zurückblieb, verschmolz allmälig mit den Siegern, und die einstige Verschiedenheit der Bewohner dürfte sich zuletzt nur noch in gewissen Vorrechten und Standesunterschieden ausgedrückt haben. Der Vorgang war ein ähnlicher, wie in Indien, und hier, wie dort, wurde die arische Sprache mit den Siegern herrschend. Eine neue Einwanderung erfolgte von entgegengesetzter Seite durch die aus Aegypten vertriebenen Phöniker, die längere Zeit hindurch an verschiedenen Punkten der Küsten sich niederließen, und hier dauernde Ansiedelungen gründeten. Das Verhältniß der Griechen zu diesen fremden Elementen ist durch den Völkernamen „Pelasger" sehr verdunkelt worden, indem er bald auf die vollkommen gräzisirten Abkömmlinge der Urbewohner, bald auf die eingewanderten Phöniker, die eine andere Sprache hatten, bezogen wurde, was natürlich Verwirrung und Widersprüche erzeugen mußte. Wie nun die Zustände der Vorzeit auch beschaffen sein mochten, eine höhere Kultur wurde den Griechen erst durch die Phöniker zugeführt, und in der Zeit der Gründung ihrer ersten Kolonien in Griechenland bis gegen 1100 bildete sich erst das griechische Wesen vollkommen aus. Schon durch die erste Beimengung eines fremden Elementes wurde das starre Festhalten angeborener und anerzogener Ideen gebrochen, der Geist biegsamer und geeigneter zur Aufnahme fremder Anschauungsweisen. Die Phöniker pflanzten nun ihren Glaubenskreis auf griechischen Boden und aus ihrem eigenen, und aus asiatischen und ägyptischen Elementen zusammengesetzten Ideenkreise bildeten die Griechen ihre Mythologie. Was ihnen auf diese Art geboten wurde, die Resultate des Nachdenkens von Jahrtausenden, nahmen sie auf und setzten es zu ihrem Eigenthum, aber diese Ideen, unter so ganz andern Bedingungen erzeugt, konnten ihrer wahren Bedeutung nach nicht erkannt werden. Die gestaltlosen, kosmischen Götter Aegyptens wurden zu persönlichen, menschenähnlichen Wesen, die Götter der Griechen waren nichts anderes, als idealisirte Menschen. Die ägyptische Kosmologie zerfiel in eine Reihe Göttergeschichten, welche mit den eigenen und der Sagengeschichte zwar verwebt wurden, aber zu einem System in der Mythologie der Griechen konnte es nicht kommen. Hier begegnet man wieder einem jener merkwürdigen Vorgänge, welche für die ganze Menschheit von Bedeutung geworden sind. Den Phönikern war der ägyptische Glaubenskreis selbst fremd, sie nahmen ihn nur in Bruchstücken auf, wodurch er natürlich schon seine wahre Bedeutung verlor. Bei der Uebertragung auf die Griechen müßte dieses noch mehr hervortreten und sie standen daher völlig frei diesen Vorstellungskreisen gegenüber. Wäre dies nicht der Fall gewesen, so würde das ägyptische Wesen auch in Griechenland herrschend geworden sein, wovon die Folgen sich kaum berechnen lassen. Wir haben also in diesem Zeitraume hier eine bewegliche, geistig biegsame Bevölkerung, gleich geneigt und fähig, die verschiedensten Eindrücke aufzunehmen, und nicht gebunden durch die von ihr selbst erzeugten und mit ihr aufgewachsenen Ideenkreise. Den Griechen wurde eigentlich bloß der Stoff zu religiösen Poesien geliefert, welchen sie auch reichlich bearbeiteten, daher diese frühesten Produkte des griechischen Geistes größtentheils eine Priesterpoesie waren. Aber die Darstellung und Verherrlichung

einer idealen Welt war damit gegeben und wirkte mächtig auf das ganze Wesen des Volkes; nicht das Leben allein wurde poetisch erhöhet, auch das Unbelebte gewann Leben und ein Hauch des lebendigen Geistes wurde über die ganze Natur ausgegossen. Der Grieche stand vollständig im Leben, in dieser Welt, mitten unter seinen Göttern, die durch keine große Kluft von ihm getrennt waren; die Erde war seine Heimath, sein Wohnsitz; im Staate sah er seinen eigentlichen Wirkungskreis, und mit größtentheils heiterer Lebensansicht suchte er das Leben zu veredeln und zu verschönern. Wie das geistige, so würde auch das materielle Leben der Griechen durch die Phöniker gehoben; es knüpften sich jetzt Verbindungen friedlicher und feindlicher Natur mit den Inseln und mit Kleinasien. Die Völkerschaften, welche hier saßen, waren meist Phöniker, und die Griechen fanden überall ihre heimischen Götter wieder. Dieser Verkehr gab nun zuletzt noch die Veranlassung zu dem Zuge nach Troja, der in seinen Folgen bedeutend wurde und diese Periode gewissermaßen abschloß. — Die phönikischen Kolonisten waren wohl meistens in den Griechen aufgegangen, und nur einzelne Städte hatten sich länger erhalten und ihre eigene Sprache bewahrt. Im Ganzen war die Mischung ziemlich vollständig geworden und hatte eine gewisse Gleichförmigkeit erzeugt, welche zuletzt wohl einen Stillstand hätte herbeiführen können. Nach dem trojanischen Kriege trat in der That auch eine 80jährige Ruhe ein, auf welche aber eine desto größere Bewegung erfolgen sollte. Griechenland war in dieser Periode in eine große Zahl kleiner Staaten zersplittert, deren Verfassung aristokratisch-monarchisch war. Das Volk zerfiel in Edle und Unedle, und an der Spitze stand ein Fürst, der in hohem, göttergleichem Ansehen stand, doch ohne der göttlichen Verehrung der Orientalen zu genießen. Das Kastenwesen war unbekannt, und obgleich Priesterfamilien erwähnt werden, so hatten diese doch nicht die Bedeutung, wie in Aegypten; dagegen hatten die reicheren Bürger Sklaven zur Verrichtung der Arbeit.

Um 1104 brachen die Dorer, ein griechischer Stamm, in den Peloponnes ein, und dieß gab Veranlassung zu einer gänzlichen Veränderung in den griechischen Verhältnissen. Zunächst wurde hierdurch die frühere Gleichförmigkeit aufgehoben und daß griechische Leben erhielt einen neuen Impuls durch den Gegensatz zwischen Dorer und Joner. Sodann verursachte diese Verdrängung der früheren Bewohner eine Auswanderung; zahlreiche Kolonien wurden gegründet, welche rasch emporblühten und das Mutterland überflügelten. Zuletzt wurde eine wichtige Veränderung in der Staatsform herbeigeführt, das Ansehen der Fürsten war schon nach dem trojanischen Kriege gesunken, und nach dem Untergange der alten Königsgeschlechter kam auch die Monarchie nach und nach in Abgang, so daß bald in der Mehrzahl der griechischen Staaten die republikanische Verfassung die Oberhand erhielt. Wenn dem Zeitraume vor 1100 die Entfaltung und Feststellung der griechischen Ideenwelt zugehört, so ist die nächste Zeit besonders die der politischen Entwickelung; zugleich tritt aber auch ein neues Moment hinzu. Die Ausbildung ihres Glaubenskreises hatte den höchsten Punkt erreicht, wie auch die Rückwirkung auf das ganze Leben des Volkes; es mußte daher jetzt eine Aenderung eintreten. Die griechische Mythologie wurzelte ihrer Entstehung nach nur im Gemüthe, lebte aber nicht im Bewußtsein des Volkes, sie war nicht aus seiner Natur hervorgegangen, sie bildete ein Problem, zur Auflösung hingestellt, für alle Zeiten. So lange die poetischen Zustände der Heroenzeit dauerten, lag hierzu ein Bedürfniß nicht vor, aber mit dem Hervortreten der weltlichen Macht und der größeren politischen Bedeutung, hob sich auch das Selbstgefühl des Volkes, und unter der Einwirkung der verschiedenartigen Elemente wurde das Nachdenken angeregt.

Von den kleinaſiatiſchen Kolonien ging die Bewegung aus und die Eröffnung Aegyptens ſchloß den Kreis, aus welchem den Griechen die geiſtige Anregung zugeführt wurde. Jetzt erſt begann die großartige Entwickelung, welche wir noch heute bewundern, ſich offen zu entfalten, und ägyptiſche und perſiſche Ideen ſuchten im Wettſtreite ſich Geltung zu verſchaffen. Die erſten Philoſophen fanden in Aegypten den Schlüſſel zur griechiſchen Götterlehre und ſie ſuchten jetzt den ägyptiſchen Glaubenskreis nach Griechenland zu übertragen. Dieſes geſchah anfänglich gewiß nur in der Abſicht, einem längſt gefühlten geiſtigen Bedürfniſſe zu genügen und ohne Berückſichtigung der Folgen für das Staatsleben. Bald knüpften ſich aber daran politiſche Pläne, und das Streben, Griechenland in einen ägyptiſchen Prieſterſtaat zu verwandeln, trat immer deutlicher hervor. Die Demokratie hatte aber in dieſer Zeit faſt allenthalben obgeſiegt und wußte dieſe ariſtokratiſchen Gelüſte zu würdigen, welche das ganze nationale Weſen der Griechen aufzuheben drohten. So kam es, daß die griechiſche Philoſophie keinen unmittelbaren Einfluß auf das Staatsleben auszuüben vermochte — nämlich im Sinne des nationalen Weſens — und die geringe Befriedigung, welche ſie überhaupt gewährte, führte zu einer neuen Richtung, welche auch der Ausgangspunkt einer neuen Zeit und der modernen Bildung wurde. Deſſenungeachtet iſt dieſe Philoſophie von großer Bedeutung für die Menſchheit geworden, einmal dadurch, daß ſie die beiden Richtungen einer früheren Kultur in nüchterner Weiſe zur Verhandlung brachte und der geiſtigen Thätigkeit eine bisher unbekannte Richtung gab, und zuletzt zur Grundlage der heutigen Naturforſchung führte; dann aber auch durch ihren Inhalt ſelbſt, denn häufig findet man in ihr Ideen ausgeſprochen, welche erſt die neueſte Zeit auf ſicherer Grundlage entwickelt hat.

In Italien, Gallien, Iberien und Britanien gingen aus denſelben Elementen, wie in Griechenland, aber unter ungleichen Verhältniſſen, verſchiedenartige Kulturen hervor, welche aber weniger mit unſerem Hauptgegenſtande zuſammenhängen und daher hier übergangen werden müſſen.

Allgemeine Ueberſicht und Schlußbemerkungen.

Sobald die Menſchen in ihrer geiſtigen Entwickelung, in ihren Verhältniſſen unter ſich und zur Außenwelt, ſo weit gekommen waren, daß nicht mehr die Sorge für ihre Erhaltung allein ſie in Anſpruch nahm, waren ſie in Bezug auf ihre fernere Entwickelung gänzlich auf die Natur angewieſen. Dieß iſt unzweifelhaft; der Beweis liegt in der Sprache, welche in ihren Wurzeln größtentheils Ausdrücke für Naturerſcheinungen hat. Mit der ſteigenden Bildung der Menſchen gewann die Natur in ihren Augen immer mehr Leben, bis ſie ihnen endlich in allen ihren Theilen belebt und beſeelt erſchien. Auf das Naturleben aber hatten die Menſchen ihrerſeits keinen Einfluß, es war von ihnen unabhängig, ja es beherrſchte ſie ſelbſt, und ſo mußte ihnen dieſes Leben als ein höheres, in vielen Beziehungen geheimnißvolles und geiſtiges Leben erſcheinen. Die Ahnung eines ſolchen höheren Lebens durchzog zuerſt die Menſchen, aber es fehlte ihnen noch die Verknüpfung der vielen Naturmächte, ſie ſtanden noch getrennt und unabhängig; nach ihren Einflüſſen und Wirkungen hatten ſie höhere oder geringere Geltung, wurden ſie geliebt oder gefürchtet, waren ſie gut oder böſe. Erſt eine ſehr lange Naturbetrachtung, welche ſich durch viele Jahrhunderte hindurchzog, konnte den Zuſammenhang erkennen laſſen und zu einer Einheit führen. Nur durch eine ſehr lange Erfahrung konnte das

Gesetzmäßige in den Erscheinungen ermittelt und erkannt werden, daß auch das scheinbar Unveränderliche einer allmäligen, aber geregelten Veränderung unterworfen ist. So entwickelte sich, auf einer höheren Stufe der geistigen Bildung, die Vorstellung des Weltkeimes oder Welteies, und der daraus hervorgehenden allmäligen Bildung der Welt. Ueber die Art der Entstehung und Entwickelung der Welt bildeten sich nun Ansichten, die in ihren Grundlagen bei den verschiedenen Rassen verschieden waren, obgleich sich im Einzelnen Manches sehr nahe kam. In diesen Weltentstehungstheorien sind einzelne Theile so merkwürdig richtig aufgefaßt, daß erst die neuere Zeit sie eben so richtig wieder herzustellen vermochte, woraus sich denn die Meinung von einer untergegangenen Naturwissenschaft gestaltet hat. Eine Naturwissenschaft hat es aber im Alterthume nie gegeben, wohl aber Dichtungen über die Natur, welche, von einem mehr oder weniger unbefangenen Sinne geleitet, oft das Richtige trafen; aber auch das Wahre bleibt Dichtung, wenn es nicht als das Nothwendige erkannt wird. Hierzu fehlte es aber an den ersten Grundlagen, an dem eigentlich wissenschaftlichen Denken und an wissenschaftlichen Forschungen im Gebiete der Natur, ohne welche eine solche Erkenntniß unmöglich ist. Zu einer consequenten Kosmologie und damit immer verbundenen Theogonie gelangten aber nur die beiden Hauptrassen und hier wiederum nicht alle Stämme derselben; manche blieben auf einer niederen Stufe stehen, um später mit jugendlicher ungeschwächter Kraft in den Kreis der höhern Bildung einzutreten. Obgleich nun solche Dichtungen oder Glaubenskreise, wie sie genannt werden, nie das Erzeugniß eines einzelnen Menschen gewesen sind, und sie auch ihre Ausbildung erst allmälig erlangt haben, und obgleich sie, um in's Leben treten zu können, im ganzen Volke wurzeln mußten, so gehörte ihre Fassung doch ausgezeichneten Männern an, die gewöhnlich ihrer Zeit weit voran waren. So kam es denn, daß ein solcher Glaubenskreis nicht von allen gleich aufgefaßt, und daß das Bild, unter welchem er dargestellt ward, verschieden gedeutet wurde. Auf diese Art sind alle Glaubenskreise bald nach ihrer Entstehung wieder verändert worden und endlich untergegangen, d. h. ihr wahres Wesen wurde aufgehoben und durch Aeußerlichkeiten ersetzt; die große Masse schuf sie eben um und verarbeitete sie, je nach dem Stande ihrer Bildung und nach ihren Bedürfnissen. Man könnte zwar auch behaupten, daß eine solche Umgestaltung nicht unter Mitwirkung des Volkes vor sich gegangen sei; hiergegen ist aber wieder zu bedenken, daß Einzelne auch eben so wenig fähig sind, das in der Gesammtheit Wurzelnde aufzuheben, als sie es vermögen, Fremdartigem Geltung zu verschaffen. Die Zustände eines Volkes in einer bestimmten Zeit, seine religiösen und gesellschaftlichen Verhältnisse sind immer gerade so, wie sie der Bildung und den Bedürfnissen der Mehrzahl des Volkes entsprechen, und dieß ist heute noch gerade so wie vor Jahrtausenden. Ferner ist nicht zu übersehen, daß alle Glaubenskreise höhere Formen früherer Vorstellungskreise waren, daß sie also nur aus dem Kampfe mit dem Gegensätzlichen hervorgehen konnten und auf diese Art schon mit dem Widerspruche geboren wurden. In der frühesten Zeit ging dieser Widerspruch von Rasse zu Rasse und dann allmälig fort, bis er jetzt bei durchdrungener körperlicher und geistiger Mischung von Individuum zu Individuum übergegangen ist, wodurch die Zeiten nach und nach einen ganz verschiedenen Charakter angenommen haben. Man könnte hiernach leicht zu dem Glauben verleitet werden, daß alle diese Bestrebungen vergebliche, nutzlose Versuche zur höhern geistigen Bildung gewesen seien; allein der Menschengeist hat nie vergeblich gestrebt, und was er einmal erreicht, ist nie der Menschheit untergegangen. Aber das ist wahr, daß die Völker in solchen Bestrebungen

gewissermaßen sich erschöpft haben, daß sie die erlangte Bildung weder weiter zu führen, noch zu erhalten vermochten, daß die junge Pflanze auf dem alten Boden nicht weiter gedeihen konnte und nur in frischer Erde neue Lebenskraft gewann. Wenn solche Keime eines höheren geistigen Lebens gewaltsam in ungeeigneten Boden gesetzt wurden, so entfalteten sie sich in der Regel nach einer ganz anderen Richtung und oft im Widerspruche mit ihrer Grundlage. In den günstigen Fällen waren sie aber eine gewaltige Macht zur geistigen Erhebung; sie waren Probleme, der freien Forschung hingestellt; aus ihrer Umhüllung hervorgezogen und ihrem wahren Wesen nach erkannt, wurden sie neue Grundlagen des geistigen Fortschrittes. Mit den Glaubenskreisen und der Art, wie sie aufgefaßt wurden, hingen alle Zustände der Völker auf das innigste zusammen, und prägten sich in der Wissenschaft, der Kunst und dem Leben aus. Sie liefern uns daher den sichersten Maaßstab für die Bildung eines Volkes, wenn man unter dieser nicht etwa ein bloßes Wissen oder gar das Savoir vivre versteht. Denn das sogenannte feinere Leben ist oft ein sehr grobes Leben, in welchem alle frühern Kulturen untergegangen sind, und die Wissenschaft, welche uns nicht auf den Weg zur höchsten Erkenntniß und dadurch zur höchsten sittlichen Bildung führt, ist ein bloßer Trug.

Die beiden Hauptglaubenskreise der Alten sind in vielen Beziehungen einander ähnlich, weil sie beide aus den beobachteten Vorgängen in der Natur abgeleitet sind; sie sind aber dennoch wesentlich in ihren Grundlagen verschieden nach den Ansichten, welche man sich von den Ursachen dieser Vorgänge gebildet hatte. Bei der einen Richtung war die Einheit gleichsam nur das Material, aus welchem Alles, das Sichtbare und das Unsichtbare, die ganze Welt, durch einen zufälligen Anstoß sich entwickelt hat, und die nun eben so wieder vergeht und in das Material zurückfällt. Diese Vorstellung ist im Laufe von Jahrtausenden in immer weitere Kreise gedrungen und übt ihren Einfluß auch noch mächtig auf die Gegenwart. Hier tritt sie offen auf, dort verbirgt sie sich unter verschiedenen Formen, aber immer ist ihr wahres Wesen an den Wirkungen zu erkennen. Man hat diesem Ideenkreise seine Schwäche zu nehmen gesucht dadurch, daß man die Welt als von Ewigkeit her setzte, wodurch die ursachslose Emanation aufgehoben wurde. Dabei hat man aber nicht bedacht, daß dadurch die Schwierigkeiten nicht gehoben sind, und daß vor einer wahren Naturwissenschaft diese Ansicht nicht bestehen kann, wie sie auch der erste Versuch war, zur Einheit der Erscheinungen zu gelangen. Im Gefolge dieses Ideenkreises finden sich stets die sogenannten Verfeinerungen des Lebens und der Lebensgenüsse mit Priesterherrschaft und Kastenwesen; das letztere ist uns in milderer Form als Kastengeist geblieben. Bei der anderen Richtung erkannte man eine erste Ursache für alles weltliche Seyn und außer ihr weiter nichts. Diese Ursache ist Gott, unentstanden, unbegrenzt und allmächtig, die höchste Intelligenz, die immer denkt und denkend schafft; sein Schöpferwerk, ewig wie er selbst, wird Leib und Seele, wird zur Welt, in welche er eintritt, die er lenkt und wieder zu sich zurückführt. In der Zeit und auf dem Schauplatze, wo dieser Glaubenskreis vollständig entwickelt auftrat, kam er nicht zu seiner wahren Geltung; stets im Kampfe mit dem andern bahnte er sich nur langsam seinen Weg. Seine nothwendigen Folgen sind deswegen auch nicht zu Tage getreten, und die patriarchalische Regierungsform ist nach und nach in eine völlige Despotie übergegangen. Die Völker, welche außer diesen Kulturreichen auf einer niedrigeren Stufe stehen geblieben sind, waren stets die Erreger der Wachsamkeit der übrigen, und sie bewahrten diese dadurch vor einem frühen Untergange; wenn sie aber diesem verfallen waren, so erneuerten sie das faule Blut,

und führten frische Kraft dem entnervten Gesellschaftsorganismus zu. Auch hier könnte man durch eine oberflächliche Betrachtung verleitet werden, zu bedauern, daß nicht alle Menschen gleich fortgeschritten und zum Richtigen gelangt sind, und darin einen Mangel in der Ordnung der irdischen Dinge finden. Man bedenke aber, wie es um die Menschheit stehen würde, wenn die Fortschritte gleichmäßig gewesen wären! — Hätten alle Menschen gleich gedacht, so hätte am Ende keiner mehr gedacht, denn nur dadurch, daß ein Anderer anders denkt als ich, werde ich zum Denken veranlaßt. Wären alle Menschen gleichmäßig fortgeschritten, so hätten bald alle Fortschritte aufgehört oder der Mensch wäre nie Mensch geworden. In den Zuständen, welche wir oft für mangelhaft erklären, liegt die größte Ordnung und Weisheit.

Einen sehr wichtigen Punkt in der Entwickelungsgeschichte des Geistes bildet das Verhältniß, in welches sich der Mensch nach und nach zur Natur gesetzt hat. Mit der steigenden Bildung belebte sich die Natur, bis alle ihre Theile zu selbstständigen beseelten Wesen herangewachsen waren. Das Unzusammenhängende suchte man jetzt auf eine Einheit zurückzuführen und so entstanden die ersten Speculationen, Dichtungen über Gott und Natur. Auf der nächsten Stufe beginnen die Versuche, den Geist von der Natur zu trennen, die Vorstellung des Geistes wird immer unabhängiger von dem Stoffe, die Dichtungen dauern jedoch fort, aber es entwickeln sich zugleich die Anfänge des wissenschaftlichen Denkens. Jetzt tritt eine Wendung ein, die Dichtungen weichen allmälig den Fortschritten des reinen Denkens, welches sich zuerst an den einfachsten Grundlagen, an Zahl und Form, entwickelt; es entsteht die wissenschaftliche Mathematik. Auf dieser höheren Stufe wird die Natur immer mehr untergeordnet, der Geist befreit sich völlig vom Stoffe, Gott tritt gänzlich aus der Natur heraus. Nunmehr entstehen erst die Naturwissenschaften. Um die Veränderungen im Stofflichen zu erklären, und um den Geist nicht wieder in die Natur zu bringen, gebrauchte man das Wort „Kraft“ und bezeichnete mit diesem Ausdrucke die unbekannte und jetzt räthselhafte Ursache der sichtbaren Erscheinungen. In dem todten Weltorganismus allein konnten die Menschen wühlen, schaffen und forschen; er wurde zerlegt, er verlor seine Bedeutung als Ganzes, der früher erdichtete innere Zusammenhang wurde aufgehoben. Das Alles mußte so kommen; die Vereinzelung war nöthig, um auch das Kleinste kennen zu lernen, denn aus dem Kleinen muß einst das Große wieder aufgebauet werden. Die reale Welt aufzufassen, wie sie in Wahrheit ist, warum und wie sie nothwendig so ist, war die Aufgabe der Menschen, nachdem sie aufgehört hatten, sich mit den Dichtungen zu begnügen. Die Lösung dieser schwierigen und höchsten Aufgaben konnte nur dadurch angebahnt werden, daß die Menschen an Einzelnem und Kleinem ihren Geist übten, dann Einzelheiten zu kleineren Kreisen zu verbinden und unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu stellen suchten. Mit den Fortschritten der Naturwissenschaften entwickelte sich ein buntes Gemenge von Theorien und Naturansichten, die, weil sie nur im Einzelnen wurzelten, sehr oft aller Wahrheit entbehrten, sich widersprachen und einander aufhoben. Die Gegenwart fängt an, dieß zu fühlen und ist bemüht, den Zusammenhang wieder herzustellen, sich zur Einheit aufzuschwingen. Dieses Ziel kann aber nur erreicht werden auf der Grundlage wissenschaftlicher Forschungen, denn das eben ist der Charakter unserer Zeit, daß sie jede Dichtung von sich weist und nur auf sicherem Boden bauen will. Die Bemühungen der Philosophen zur Herstellung dieser Einheit sind nur deshalb so sehr in Mißcredit gekommen, weil sie sich nicht oder nur oberflächlich auf die Naturwissenschaften stützten. Dieser Gang der Entwickelung sieht einem Kreislauf ähnlich; aber er ist es nicht; auf

der einen Seite faßt der Mensch die Natur mit der ahnungsvollen Poesie eines jugendlichen Gemüthes, auf der andern Seite sieht er sie ebenso, aber mit der wahren Erkenntniß des gereiften Verstandes. In der ersten Periode waren Naturanschauung und Religion stets vereint und entfalteten sich mit einander, in der zweiten löste sich die Religion von der Natur, sie ward selbstständig, aber auch stationär und ausschließlich. Wie nahe oder entfernt von diesem Ziele man sich die Bestrebungen unserer Zeit auch denken mag, so haben sie doch sämmtlich darin ihre Quelle; die gleiche Bewegung zeigt sich dem aufmerksamen Beobachter, wie in der Wissenschaft, so in der Religion und in den gesellschaftlichen Verhältnissen.

Alle Zustände im Leben der Menschheit sind nur Glieder einer großen Kette und bedingen sich gegenseitig. Aus der Uranschauung der Natur gingen die religiösen und sittlichen, und im Vereine mit diesen die socialen Zustände hervor. Die Wissenschaften stehen in derselben Abhängigkeit und das Verständniß ihrer Entwickelung erfordert die genaue Kenntniß des ganzen Entwickelungsprozesses. Es ist angeführt worden, daß der Mensch auf der niedrigsten Stufe nur sich allein eine Berechtigung zuerkannte, und daß erst auf der zweiten Stufe das Familienleben erwachte und eine Milderung der Ausschließlichkeit herbeiführte, so daß die Familie einen Kreis bildete, welcher statt des Individuums der Außenwelt gegenübertrat. Der erste Gegensatz von Mann und Weib war das erste Erhebungsmittel für den Geist, durch welches auch die Sitten gemildert wurden; in der Familie war anfänglich das Haupt der unumschränkte Herr über alle seine Angehörigen und erst bei höherer Bildung wurde auch dieses Verhältniß gemildert. Die nächste Beschränkung der persönlichen Freiheit oder vielmehr Ungebundenheit trat ein, als mehrere Familien zu einem Stamme sich verbanden und sich gegenseitig gleiche Berechtigung zugestanden. Hiermit war jedoch nicht die sittliche Ueberzeugung oder Anerkennung gleicher Rechte verbunden, es war mehr ein bloßes Nachgeben durch äußere Nothwendigkeit hervorgerufen. Solche Verbindungen waren oft sehr lose und die Familienhäupter leiteten zusammen die gemeinsamen Angelegenheiten; in Zeiten der Gefahr wurde die Leitung aber auch Einem übergeben und diesem gegenüber begaben sich die anderen ihres Rechtes. Mit der Zeit, und besonders durch Kriegszüge und Eroberungen, befestigte und erweiterte sich dieses Verhältniß, es entstand die Herrschermacht aus der Familienregierung. Der Regent war hiernach der Träger der Rechte aller Einzelnen durch freiwillige Uebertragung, und er übte sie zuletzt unbeschränkt und willkürlich. In den Despotien aller Zeiten glaubte daher Jeder, der mit der Regierung unzufrieden war, und sich im Besitze einer hinlänglichen Macht sah, dieses Recht wieder an sich nehmen zu können. Bei günstigem Erfolge setzten ihn seine Anhänger auf den Thron, übertrugen ihm dadurch ebenfalls ihre Rechte, bis ihnen wieder ein neuer Wechsel beliebte. In allen Despotien bildeten sich die Herrscher einen Hof, in dem sie einer Anzahl Personen eine bevorzugte Stellung anwiesen; die Großen des Reiches waren aber nur groß dem Volke gegenüber, vor dem Fürsten waren Alle gleich. In diese Richtung gingen die mongolischen Völker meistens von selbst ein, die arischen aber durch ihre Eroberungen und durch ihr Zusammentreffen mit einer andern Richtung. Die königliche Gewalt bildete sich aber nicht überall gleich aus, den Häuptlingen gelang es zuweilen, sie in Schranken zu halten und sich selbst ihren Einfluß mehr oder weniger zu sichern. So bildete sich ein Adel mit allen Abstufungen vom Herrscheradel bis zu den Dienern königlichen Glanzes mit besonderen Geburtsvorrechten. Diese Einrichtung findet man bei arischen Stämmen.

Solche Verhältnisse wurden, wie bereits erwähnt, besonders begünstiget in all' den Fällen, wo bei der Eroberung eines Landes ein Theil der Urbevölkerung mit einem Theile der Sieger verschmolz und nun diese Mischlinge geringer geachtet wurden, als die reine Rasse. Hier hat man schon den Einfluß der andern Richtung, aber auch eine ursprünglich arische Einrichtung beförderte diese Zustände. Ein jeder Stamm erkannte nur sich eine Berechtigung zu, und konnte er einen andern überwältigen, so machte er dessen Angehörige dienstbar, zu Sclaven; aber auch Glirder desselben Stammes konnten ihre Freiheit verlieren. Aus diesen Bestandtheilen entwickelte sich nun eine neue Bevölkerung, der gegenüber die andern eine höhere Stellung einnahmen. Die sogenannten Demokratien Griechenlands waren weiter Nichts, als die Herrschaft aller eigentlichen Bürger über die ganze vielmal größere Bevölkerung. An eine Anerkennung der allgemeinen Menschenrechte war in dieser Zeit noch nicht zu denken, obgleich sie der persische Glaubenskreis lehrte und das Christenthum sie zu seiner Grundlage machte.

In diesem Entwickelungsgange der socialen Verhältnisse sind die Menschen auf verschiedenen Stufen stehen geblieben und die Gegenwart enthält noch alle Formen. Von der Vereinigung mehrerer Familien zu einem größeren Kreise an entstand aber eine zweite Richtung, bei welcher schon die Glieder nicht mit gleichen Rechten eintraten. Diese Richtung führte zur Kasteneinrichtung und zur Priesterherrschaft mit einem Könige der Form nach. Beide Richtungen trafen, sich verstärkend, zusammen, und zur Zeit der Entstehung des Christenthumes war die Freiheit von der Erde verschwunden, der sittliche Verfall war immer größer, dadurch aber der Uebergang in eine neue Zeit nöthig geworden. Wenn man nun auch das Kastenwesen und die Priesterherrschaft als unsittlich schon in ihrer Grundlage und noch mehr in den Mitteln zu ihrer Erhaltung verwerfen muß, so muß man auf der andern Seite doch zugestehen, daß sie die alleinige Ursache einer frühen geistigen und materiellen Kultur gewesen sind. Ein kleiner Kreis von Männern, aller Sorgen enthoben, durch keine andere Beschäftigung abgezogen, lebte allein wissenschaftlichen Forschungen und gelangte frühe zu verhältnißmäßig bedeutenden Resultaten. Die Priester Aegyptens, die Chaldäer in Babylon, die Brahmanen in Indien zeigen uns eine lange, durch viele Jahrhunderte fortlaufende, Reihe von Männern, die sich mit allen Zweigen des menschlichen Wissens beschäftigten und die Resultate ihrer Bemühungen auf die Nachwelt verpflanzt haben. Die Wissenschaft war in ihrer Jugend das Eigenthum weniger Menschen und in undurchdringliches Geheimniß gehüllt; aber die Schranken fielen, sie drang in immer weitere Kreise und ihre Bestimmung ist es, sich immer weiter zu verbreiten und das geistige Leben zu erhöhen.

Wenn man sich nun kein Phantasiegemälde entwerfen will, wenn man sich an die Wirklichkeit hält und die Geschichte von Jahrtausenden vorurtheilsfrei zu Rathe zieht, so muß man eine allmälige Entwickelung aller Dinge, im Gebiete der Natur und des Geistes, nach den gleichen Gesetzen annehmen. Das geistige Leben der Menschenwelt ist nur eine höhere Stufe des allgemeinen Weltlebens und es gibt keinen Kreislauf, sondern nur eine fortschreitende Entwickelung. Jeder Rückschritt oder auch nur Stillstand ist bloß scheinbar; es sammeln und stärken sich hier die Kräfte, wie während der großen Schöpfungsperioden; gewaltsam vernichten sie den Widerstand und führen die Welt unaufhaltsam weiter. Es ist höchstes göttliches Gesetz, daß die Gesammtheit der Menschen, wenn sie aus einem Zustande heraustritt, in einen höheren übergeht. Die Freiheit des Willens ist hierbei ungefährdet, ein jeder Mensch kann den göttlichen Anordnungen folgen oder sich ihnen widersetzen, ein ganzes Volk kann

in den wahren Bildungskreis eintreten oder sich ihm entziehen, dieß macht keinen Unterschied, die Gesammtheit schreitet vorwärts und keine Macht der Erde kann die Schöpferzwecke vereiteln. Die Menschheit macht die Geschichte nach freiem Willen und sie scheint deßwegen an kein Gesetz gebunden zu sein; das Resultat aller Geschichte ist aber der allgemeine Fortschritt, und hier ist keine Willkür, sondern erstes, höchstes, göttliches Gesetz. Jedes Volk, welches sich dem allgemeinen Fortschritte entzieht, steht geistig ab und seine Versunkenheit zeigt sich bald in allen seinen Zuständen; selten vermag es sich wieder zu erheben.

Der geistige Fortschritt bereitet sich allmälig vor und scheint dann plötzlich aufzutreten. Dieselben Ideen tauchen dann gleichzeitig bei Tausenden von Menschen auf, von Einzelnen wird alsdann ausgesprochen, was Viele in sich tragen. Eine solche allgemeine Gedankenrichtung kann durchaus nicht von einem einzigen Menschen hervorgebracht werden, sie ist die Wirkung aller Verhältnisse der Zeit, und Mancher, welcher in seinem eiteln Wahne geglaubt hat, seine Zeit gemacht zu haben, war nur das Werkzeug derselben. Wenn in solcher Weise die Gesammtheit oder die Mehrzahl derselben eine Gedankenrichtung hat, so ist sie wie von einem Geiste beseelt, und diesen Geist nennt man dann den Zeitgeist. Die Aeußerungen und Thätigkeiten in irgend einer Zeit bedingen die Zustände derselben und beide zusammen machen das, was man die Zeit in bildlicher Ausdrucksweise nennt. Man kann die Zeit in dieser Bedeutung mit einer Kraft vergleichen, deren Impulse auf die Menschen wirken und bei diesen Gegenwirkungen hervorrufen, welche sich zu mehr oder minder klaren Vorstellungen gestalten, deren Richtung jedoch von dem Gesetze des Fortschrittes bedingt ist. Von dem Denken kommt es zu Aeußerungen, von diesen zur That; die Menschen suchen ihre Ideen zu verwirklichen, sie machen die neue Zeit, welche in gleicher Weise fortfährt zu wirken. Wer die Zeit bekämpft, verstärkt die Impulse und beschleuniget ihre Wirkungen; auch solche Gegner sind nothwendig: sie verleihen der Erschlaffung wieder Energie, sie regen an und führen gerade das herbei, was sie verhindern wollen. Seitdem die beiden Urrichtungen in ihren verschiedenen Abstufungen alle gebildeten Völker mehr oder weniger durchzogen haben, stehen sich die Glieder derselben Gesellschaft gegenüber. Die Ideen, welche auftauchen und für welche die Zeit noch nicht reif ist, bleiben unbeachtet und verlieren sich, um später wieder hervorzutreten; ist jedoch die Zeit dafür schon etwas vorbereitet, so werden sie bekämpft und oft unterdrückt, treten aber dann immer wieder unter mannigfaltigen Formen auf, und wenn sie wirklich dem Gesetze des Fortschrittes, der geistigen Erhebung, huldigen, so wird ihnen endlich der Sieg. So wird die Gesellschaft zwar durch die Zeitfragen gespalten, allein diese Kämpfe haben sehr viel Gutes; sie bewahren uns so viel als möglich vor falschen Richtungen, sie schützen uns vor Ermattung, durch sie werden die Angelegenheiten von allen Seiten beleuchtet und besprochen, die Parteien, indem sie sich zu erweitern und zu verstärken suchen, ziehen endlich einen großen Theil der Bevölkerung in ihren Kampf hinein und verbreiten auf diese Weise die geistige Anregung immer weiter. Die Wirkungen der Zeit treten niemals vereinzelt auf, sie zeigen sich nie bloß in einem Theile unserer Zustände, sie umfassen immer das ganze geistige und materielle Leben. Religion und Politik, Wissenschaft und Kunst werden immer gleichzeitig ergriffen, und wenn auch die Erfolge nicht für alle gleich groß sind, so zeigt sich doch in allen ein gleichmäßiges Streben. Der Gang wissenschaftlicher Entwickelungen läßt sich daher in Wahrheit nur erfassen, wenn man die ganze Richtung der Zeit damit in Verbindung bringt.

Zweiter Theil.

Entwickelungsgeschichte der Mathematik bei den alten Völkern und ihre Uebertragung auf die Araber.

Die Mathematik der Urvölker und die Zahlensysteme.

Die Anfänge der wissenschaftlichen Mathematik kann man mit großer Sicherheit nicht viel über das sechste Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung setzen, und von da an kann erst von einer Geschichte dieser Wissenschaft die Rede sein. Was vor dieser Zeit liegt, die ganze Reihe der vorbereitenden geistigen Prozesse bis zum Anfange des reinen Denkens, ist aber gerade der lehrreichste Theil und zum Verständnisse des Folgenden unumgänglich nöthig. Zahl, Form und Thätigkeit waren mit der ersten sinnlichen Anschauung unmittelbar gegeben, aber es dauerte sehr lange, bis die Menschen sich zur Abstraction erhoben. Am frühesten mußte sich die Zahl von den Gegenständen ablösen, indem sie auf alle Dinge gleicher Art ohne Unterschied angewandt wurde, und so, kann man sagen, wurde sie selbstständig, unabhängig von der Körperwelt. Mit der Form ging die Sache nicht so leicht, und erst auf einer höhern Stufe der geistigen Kultur konnte es gelingen, sie von ihrem Inhalte zu trennen und sie für sich zu betrachten. Die früheste Beschäftigung mit ihr war ihre Nachahmung, die künstliche Darstellung der Naturkörper. Am schwierigsten war die Auffassung der reinen Thätigkeit; sie erfolgte daher auch am spätesten.

Das Zählen und die Erfindung der Zahlwörter gehört mit zu den frühesten geistigen Thätigkeiten der Menschen. Gewiß ist nichts natürlicher, als daß der Zählende sich selbst als Erstes, als die Einheit nahm, den ihm Gegenüberstehenden als Zweiten, den Abwesenden oder Fernerstehenden als Dritten, und daß ursprünglich die drei entsprechenden Pronomina zugleich als Zahlwörter benutzt wurden. Wenn in der Wirklichkeit die Uebereinstimmung sich nicht mehr nachweisen läßt, so beweist das nichts dagegen, denn keine Klasse von Wörtern hat eine größere und unregelmäßigere Veränderung erlitten, als gerade die Zahlwörter. Die Aufhebung der Uebereinstimmung war sogar nothwendig, um die Begriffe zu scheiden. Diese Ansicht schließt nicht aus, daß auch noch andere Wege zur Zahlbezeichnung mögen verwendet worden sein, nur ist sie unter allen die natürlichste und wahrscheinlichste. Für größere Zahlen hatte man anfänglich gewiß nur eine Zeichensprache durch Aufhebung der Finger; der Laut für vier wurde zusammengesetzt aus denen für eins und drei, und der Ausdruck für fünf wurde durch das Wort für Hand wiedergegeben, für diese aber, um die Ver-

wechselung zu vermeiden, oft eine neue Benennung gesucht. Belege für diese Ansicht lassen sich sehr viele beibringen, obgleich viele Ursachen zusammengewirkt haben, die Sache zu verdunkeln. Naturgemäß ist man nun in gleicher Weise fortgegangen und es ist 6 = eine Hand + ein Finger, 7 = eine Hand + zwei Finger, u. s. w., 10 = zwei Hände. Bei vielen Völkern läßt sich diese Art zu zählen noch nachweisen, bei andern sind nur noch Spuren vorhanden; gerade bei den gebildetsten findet sich aber auch nicht mehr die leiseste Andeutung, und es scheinen die Ausdrücke von 6 bis 10 entweder einfach oder auf unbekannte Art zusammengesetzt und bis zum Unkenntlichen zusammengezogen. Dieser Gegenstand läßt sich daher, durch Betrachtung der Zahlwörter, schwerlich mehr zur Entscheidung bringen und dies um so weniger, als es sich zeigt, daß Zahlwörter, eben ihrer Natur nach, am leichtesten beim Verkehr verschiedener Völker verändert oder vertauscht wurden. Etwas südlich vom Aequator herrscht in Afrika nur eine Sprache in vielen Dialekten, die Zahlwörter waren unverkennbar ursprünglich dieselben, und doch zeigen sich auch wieder merkwürdige und nicht erklärbare Abweichungen: die einen zählen nach der angegebenen Art bis fünf, die andern ganz durch bis zehn. Leider fehlen den Sprachproben meistens die höheren Zahlen, die genaue Angabe der körperlichen Beschaffenheit und des Grades der Kultur ihrer Eigenthümer, woraus sich allein einiges Erklärende ableiten ließe. Beim Zählen sind nun, als am weitesten verbreitet, drei Systeme besonders zu unterscheiden. Entweder zählte man nach Perioden von 5, d. h. wenn man mit der einen Hand fertig war, fing man von neuem an bis zu zwei Händen. Man nahm also hierbei 5 Einheiten, die fünf Finger, als eine Einheit höherer Ordnung die Hand an, und hätte nun consequent wieder 5 solcher Einheiten oder 5 Hände, als die nächst höhere Einheit setzen müssen. In dieser Entwickelung wird sich der Zahlenbau aber schwerlich irgendwo finden; in den meisten Fällen nahm man nur zwei Hände, und seltener die Hände und Füße, also 2 × 5 oder 4 × 5 als nächst höhere Einheit an. Was man das Quinarsystem genannt hat, erstreckt sich also nicht weiter, als daß man bei 5, 10, 15 u. s. w. einen Ruhepunkt machte, im Uebrigen aber nach einem andern Systeme zählte. So weit der Gegenstand bekannt ist, zählen auf diese Art die meisten afrikanischen Völkerschaften; von hier läßt sie sich verfolgen über die indischen und Südseeinseln, von wo sie nordwärts nach Asien und Amerika übergeht.

Die gewöhnlichste Art zu zählen ist die nach Perioden von 10 oder nach dem Decimalsystem. Man faßt hierbei 10 Einheiten zusammen, als eine Einheit höherer Ordnung, von dieser wieder 10 als Einheit dritter Ordnung u. s. w. Für jede Ordnung hat die Sprache besondere Benennungen, als: Einheiten, Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. Im engeren Sinne versteht man nun unter Decimalsystem dasjenige, bei welchem man in einem fort von 1 bis 10 zählt, und immer zehn Einheiten der vorhergehenden Art als eine Einheit der nächst höhern Art zusammenfaßt. Macht man aber keinen Unterschied in der Art, wie die Zahlen von 1 bis 10 gebildet werden, so fallen auch die meisten Quinarsysteme hierher, und um so mehr, als man auch die scheinbar auf eine andere Art gebildeten Zahlenausdrücke nicht mehr zu erklären im Stande ist. Ein anderes System ist das Vigesimalsystem, bei diesem werden immer 20 Einheiten als eine Einheit der nächst höhern Ordnung zusammengefaßt, wobei entweder von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 ein Ruhepunkt gemacht wird. Dieses System findet sich noch im nordwestlichen Afrika, zog sich vormals über Spanien, Frankreich, England und wahrscheinlich auch über Scandinavien; Spuren davon finden sich noch in Albanien; bei den meisten Völkern

des Kaukasus ist es noch herrschend, so wie bei verschiedenen Völkern am Nordostrande Asiens. Am ausgebildetsten war es in Süd- und Mittelamerika; es läßt sich aber von hier aus auch verfolgen über den stillen Ocean nach dem indischen Archipel und setzte aller Wahrscheinlichkeit nach fort über Indien nach Hochasien, wo es an der Grenze bei den Kafirs wieder hervortritt.

In Bezug auf den lautlichen Ausdruck gab es also von jeher nur zwei Systeme, das decimale und das vigesimale, weil das Zählen in der Jugend des Menschengeschlechts abhängig war von den fünfgetheilten Extremitäten und man hierzu entweder nur die Hände oder die Hände und Füße nahm. In Bezug auf die Zahlenbildung innerhalb dieser Grenzen herrscht aber eine große Mannigfaltigkeit; das eben Gesagte gibt die Sache im Allgemeinen, ausnahmsweise findet aber eine große Verschiedenheit statt. Die natürlichste Methode war das Zuzählen $18 = 10 + 8$; $23 = 20 + 3$ u. s. w.; es kommt aber auch das Abzählen vor: $19 = 20 - 1$; $29 = 30 - 1$; $98 = 100 - 2$ u. s. w.; ebenso das Vervielfachen $8 = 2 \times 4$, oder mehrere Geschäfte zusammen $9 = 2 \times 4 + 1$ u. a. m. Alle solche Zahlenbildungen, bei welchen die Zahl ein Resultat der Rechnung ist, welches auf anderm Wege als der bloßen Zufügung erlangt worden, dürften jedoch kaum als ursprünglich genommen werden können. Das Gleiche muß behauptet werden für die symbolischen Zahlenausdrücke, z. B. Kleeblatt für die Zahl 3, oder etwa Woche für die Zahl 7 u. s. w.; alle solche Ausdrücke sind späteren Ursprungs. In keinem Zweige der geistigen Thätigkeit sind die Eigenthümlichkeiten der Rassen so sehr verschwunden, als beim Zählen: die ägyptischen Zahlwörter lassen von ihrer Entstehung nichts mehr erkennen; Indien ist die Heimath verschiedenartiger Systeme; China hat in der Sprache das Decimalsystem, welches allerwärts mit der steigenden Kultur andere Systeme verdrängt hat. Die Ursache liegt in der Einwirkung der Rassen auf einander und darin, daß eine consequente Ausbildung der Zahlensysteme erst bei einem gewissen Grade der Kultur erfolgen konnte, woran dann die verschiedenen Elemente Antheil nahmen.

Die Bezeichnung der Zahlen erfolgte viel später und zwar auf zweifache Weise: entweder gebrauchte man dazu die Buchstaben des Alphabets, oder man erfand für die Zahlen besondere Zeichen. Dieß ist weniger von Bedeutung, als die Art, wie die Zahlen durch die gewählten Zeichen dargestellt wurden. Die Sprachen, welche das Decimalsystem haben, bedürfen neun Wörter für die Zahlen von 1 bis 9, dann weiter für 10, 100, 1000 u. s. w. Die meisten Sprachen gingen hier nur bis 1000, einige bildeten aber auch noch einen Ausdruck für 10000. Das Sanskrit ging hierin am weitesten und hat Wörter zur Bezeichnung für die Einheiten der verschiedenen Ordnungen bis zu einer Billion, ja selbst noch weiter, von welchen aber einige zusammengesetzt sind. Als Beispiel der Darstellung der Zahlen durch Buchstaben mag das Griechische dienen. Die ersten acht Buchstaben dienten als Zeichen für die Zahlwörter von 1 bis 9, für die Zahl 6 wurde das Zeichen für st eingeschaltet. Die Zahlen von 10 bis 80 wurden durch die folgenden Buchstaben dargestellt und 90 hatte ein besonderes Zeichen; ebenso dienten die letzten acht Buchstaben zur Bezeichnung der Hunderte von 100 bis 800, und für 900 wurde wieder ein anderes Zeichen gesetzt. Die besondere Bezeichnung von 6, 90 und 900 wurde nöthig, weil das griechische Alphabet nur 24 Buchstaben enthält, während doch 27 Zeichen nöthig waren. Die Griechen hatten ihr Alphabet und ihre Zahlenbezeichnung von den Phönikern überkommen, diese hatten für 6 den Buchstaben w, welcher den Griechen fehlte; sie behielten aber das Zeichen für die Zahl, welches umgekehrt und etwas verändert in das Zeichen für st (ς) übergegangen

ist. Die Buchstaben und ihre Zahlenwerthe entsprechen sich in dem semitischen und dem griechischen Alphabete nur genau bis zu 90, wo in dem semitischen Ssade steht, was dem griechischen fehlt. Dafür nahmen die Griechen einen andern semitischen Buchstaben, das Koph, welcher ihnen gleichfalls mangelte, wodurch die Uebereinstimmung in den Zeichen der Hunderte aufgehoben wurde; denn während die Buchstaben q, r, s und t im Semitischen 100, 200, 300, 400 bedeuten, haben sie im Griechischen nur die Bedeutung von 90, 100, 200, 300. Im Semitischen schließt mit t = 400 die Zahlenreihe, während die griechischen Buchstaben noch bis 800 reichten; für 900 endlich gebrauchten die Griechen wahrscheinlich das verunstaltete Zeichen eines semitischen s. Im Hebräischen und im Phönikischen wurden die folgenden Hunderte aus den vier ersten zusammengesetzt, oder man gebrauchte die Finalzeichen von k, m, n, p und ss dafür. Die Tausende wurden von den Griechen wieder mit den neun ersten Buchstaben bezeichnet, zum Unterschiede aber unten zur Linken mit einem Striche versehen; ein ähnliches Verfahren kennt das Hebräische. Diese Bezeichnung ging jedoch nur bis zu 9000, und mit ihr konnte man alle Zahlen bis zu 9999 ausdrücken. Für 10000 gebrauchte man M als Abkürzung des Wortes Myrias und nicht ,i, wie oft fälschlich angegeben wird. Aus s = 200, p = 80 und g = 3 setzte man 283 = spg zusammen; eben so, weil ,d = 4000 bedeutet, mit ,dspg die Zahl 4283, u. s. w. Die Griechen zählten nach Gruppen von Zehntausenden oder Myriaden; bis zu 10000 excl. hießen die Zahlen Monaden, die zweite Gruppe war die der Myriaden, sie reichte bis zu 9999 Myriaden, die dritte Gruppe war die der Myriaden Myriaden, u. s. w. Die Zahl 23134283 z. B. konnte ausgedrückt werden durch ,btigMy.,dspg oder durch My,btig.,dspg und auch durch ,btig.,dspg, wo das Zeichen My. ausgelassen und nur durch einen Punkt ersetzt ward; die Zahl der Myriaden wurde auch über das M gesetzt. Die Bezeichnung der Gruppen wurde aber auch vollständig ausgedrückt und man schrieb Myriaden ,btig., Monaden ,dspg; die Gleichförmigkeit in der Bezeichnung fehlte, doch war sie überall deutlich und bestimmt. Sollten die Zahlen vom Texte unterschieden werden, so zog man einen Strich darüber. Die Semiten in Asien hatten im Ganzen denselben Gebrauch und auch die Chinesen schienen in früheren Zeiten nach Myriaden abgetheilt zu haben.

Zu den Völkern, die sich besonderer Zeichen für die Zahlen bedienten, gehören natürlich vor allen diejenigen, welche auch keine Buchstabenschrift hatten. In Indien, wo überhaupt Alles mannigfach sich entwickelte, kamen beide Bezeichnungsweisen vor. Die altpersischen Keilinschriften zeigen gleichfalls keine Buchstaben; diese Schrift hat nur zwei Zeichen, den einfachen Keil und zwei zusammengestellt zu einer stumpfen Pfeilspitze, aus diesen wurden die Buchstaben zusammengesetzt und sie dienten auch als Zahlzeichen. Der Keil bedeutete die Einheit, die Pfeilspitze die Zehner; diese Zeichen wurden neben und unter einander gesetzt, wie es scheint, um den kleinsten Raum einzunehmen. Die höchste Zahl, welche vorkommt, ist 27; bis 10 werden eben so viele einzelne Keile gesetzt, von 10 bis 20 werden die Keile der Pfeilspitze zur Rechten beigesetzt; von 20 bis 30 werden den zwei übereinander stehenden Pfeilspitzen die Einheiten eben so beigefügt. Man wird hier unwillkürlich an die römische Zahlbezeichnung erinnert, doch war diese schon weiter vorgeschritten. Die Römer bezeichneten ursprünglich die Einheiten von 1 bis 10 durch einzelne Striche, die Zahl 10 aber durch zwei übers Kreuz gestellte X; von 10 bis 20 wurden diesem Zeichen die Striche zur Rechten beigefügt, die Zahl aber immer durch Nebeneinanderstellung geschrieben, 20 war XX, u. s. w. Die Zahl 100 wurde durch drei Striche ⊏ ausgedrückt und eben so 1000 durch vier Striche ∏.

Im Schreiben nahmen diese beiden Zeichen die runde Form, C und C|Ɔ an, das letzte wurde auch M geschrieben und für die Abkürzung von mille gehalten.

Die Weitläufigkeit, welche durch die häufige Wiederholung desselben Zeichens entstand, mag Ursache gewesen sein, diese Zeichen zu halbiren, die Hälfte von X gab V = 5, von ⊏ L = 50 und von C|Ɔ D oder D = 500. Die Zahl 3729 z. B. konnte nun ausgedrückt werden durch C|ƆC|ƆC|Ɔ|ƆCCXXVIIII oder durch MMMDCCXXVIIII, wo also die Einheiten der nächst niedern Ordnung den andern zur Rechten beigesetzt wurden und diese Stellung eine Addition anzeigte. Aber auch hier wurde eine weitere Abkürzung dadurch angebracht, daß man eine Subtraktion durch die veränderte Stellung einführte und 9 nicht durch VIIII = 5 + 4, sondern durch IX = 10 — 1 oder — 1 + 10 ausdrückte. Eben so wurde 40 nicht durch XXXX, sondern durch XL = 50 — 10 oder — 10 + 50, 90 = XC = — 10 + 100, 900 = CM = — 100 + 1000, u. s. w. dargestellt. Ungeachtet dieser Vereinfachung blieb diese Bezeichnung doch sehr weitläufig und unbeholfen und zur Ausführung von Rechnungsoperationen ganz ungeeignet. Die Römer gingen daher in dieser Bezeichnung noch weiter, und bildeten analog die Zeichen CC|ƆƆ = 10000, CCC|ƆƆƆ = 100000.

Indien ist höchst wahrscheinlich das Vaterland der jetzt allgemein gebräuchlichen Methode, die Zahlen darzustellen, obgleich sie daselbst ursprünglich nur Eigenthum der Gelehrten und nie im allgemeinen Gebrauche war. Das Zahlensystem mit Stellenwerth ist eine der merkwürdigsten Erfindungen, welche je gemacht worden ist, und bietet einen höchst interessanten Punkt in der Entwickelungsgeschichte des menschlichen Geistes. Die Griechen waren dieser Methode so nahe gekommen, daß man kaum begreift, daß sie nicht von ihnen gemacht worden ist; es ist sogar sehr wahrscheinlich, daß sie schon im sechsten Jahrhundert v. Chr. in Griechenland bekannt war, und daß sie keine Aufnahme gefunden hat. Dabei ist jedoch nicht zu übersehen, daß diese Methode anfänglich nicht so leicht wie jetzt gehandhabt wurde, und daß man daher ihren Werth leicht unterschätzen konnte. Die Gewohnheit und die Anhänglichkeit am Alten, so wie die Art zu rechnen, waren größere Hindernisse, als man sie gewöhnlich nimmt, und noch 1200 Jahre später war der Khalife Valid genöthiget, seinen Finanzbeamten den Gebrauch einer andern Rechnungsweise zu untersagen. Bei den abendländischen Völkern hat sich die gleiche Erscheinung gezeigt, und zwischen den ersten Spuren der indischen Methode bis zu ihrem allgemeinen Gebrauche in Europa liegt gar manches Jahrhundert.

Die Zahlbezeichnung, von welcher Art dieselbe auch gewesen sein mochte, diente ursprünglich nicht um Rechnungsoperationen auszuführen, sondern bloß um eine Zahl darzustellen und das Resultat der Rechnung festzuhalten. Die Rechnungen selbst wurden zuerst an den Fingern, dann mit kleinen Steinchen und auf einer höheren Stufe mit einer sehr einfachen Rechenmaschine ausgeführt. Durch das ganze östliche Asien zieht sich der Gebrauch des sogenannten Swanpan; es ist dieß ein hölzerner Rahmen, welcher durch ein Zwischenstück, parallel mit den längern Seiten, in zwei ungleiche Theile getheilt ist. Senkrecht zu dieser Seite durchziehen den Rahmen zehn Stäbe in gleichen Entfernungen, auf welchen in der größern Abtheilung fünf und in der kleineren zwei bewegliche Kugeln, wie bei einem Rosenkranze, angebracht sind. Die fünf Kugeln des ersten Stabes zur Rechten bedeuten Einheiten und die zwei davon getrennten eine jede fünf, so viel wie die untern zusammen. Jede der fünf Kugeln des zweiten Stabes bedeutet 1 Zehner und jede von den zwei obern 50; so geht die Reihe fort, die Kugeln jedes folgenden Stabes erhalten den 10fachen Werth des vorher-

gehenden. Mit dieser Maschine kann man alle gewöhnlichen Rechnungen ausführen und die Chinesen sollen damit schneller rechnen, als wir auf unsere Weise. Aehnliche Vorrichtungen zum Rechnen hatten früher alle gebildeten Völker und sie blieben noch lange nach der Einführung wissenschaftlicher Methoden im Gebrauche. Das Wichtigste ist aber, daß diese Maschine unzweifelhaft die Veranlassung zur Erfindung des Zahlensystems mit Stellenwerth gegeben hat. Zunächst ist klar, daß eine und dieselbe Kugel, wenn sie in dem folgenden Stabe gedacht wurde, den zehnfachen Werth erhielt, und daß der Apparat das System eigentlich schon darstellte. Versuchte nun Jemand eine Rechnung ohne die Maschine, aber den Gang ganz beibehaltend, schriftlich nachzumachen, was gewiß oft vorkommen mußte, so konnte er sich eine Vorschrift bilden, welche, zwar anfangs unvollkommen, endlich aber doch zu einem praktischen Resultate führte. Das Rechnen nach dem indischen Systeme war ursprünglich nur eine Nachahmung des Rechnens mit der Maschine, deren Stäbe noch gezogen wurden, oder vielmehr man bildete Columnen, welche die Stäbe ersetzten. Erleichtert wurde die Rechnung durch die Zahlzeichen, welche, wie sie jetzt auch beschaffen sein mögen, aus einzelnen Strichen zusammen gewachsen sind. Das Columnensystem war dem späteren indischen Systeme vorausgegangen und in seiner Anwendung sehr weitläufig; die Vorschriften, darauf zu rechnen, waren zahlreich. Bei der Multiplication z. B. waren für folgende Fälle Vorschriften über das Einschreiben der Zahlen in die Colnmnen nöthig: wenn Einer mit Einer, Einer mit Zehner, Einer mit Hunderter u. s. w. — dann, wenn Zehner mit Einer, Zehner mit Zehner, Zehner mit Hunderte u. s. w., u. s. w. vervielfacht werden sollten. Es waren dies die ersten Versuche, die Rechnung von der Maschine abzulösen und die daraus hervorgegangenen Methoden wurden allmälig immer mehr vervollkommnet. Das Columnensystem scheint lange in Indien, aber auch in den Euphratländern, bekannt gewesen und ausgeübt worden zu sein, die eigentliche Vollendung hat das System mit Stellenwerth aber gewiß erst in Indien erlangt. Man wird jetzt leicht begreifen, warum die Griechen dieses System nicht aufgenommen haben: sie waren schon viel weiter gekommen, ihre Rechnungsweise war schon lange von der Maschine unabhängig und das Columnensystem, was noch zu deutlich die Spuren seiner Entstehung an sich trug, mußte ihnen als etwas viel Unvollkommeneres erscheinen, als das, was sie selbst erdacht hatten. Von welchem Gesichtspunkte aus man die Methode der Griechen in der gesammten Mathematik betrachten und was man auch von ihrer Anwendung in der Gegenwart halten mag, immer bleibt es ein Glück, daß sie die indische Methode nicht aufgenommen haben. Mit unserem Zahlensysteme in der Hand, würde die Mathematik in Griechenland ganz anders sich entwickelt haben und das Aufblühen des wissenschaftlichen Denkens um viele Jahrhunderte hinausgerückt worden sein. Nur der Kampf mit unendlichen, unbesiegbar scheinenden Schwierigkeiten hat den griechischen Geist so hoch gehoben, und es hat sich auch hier bestätigt, daß das Angenehme nicht immer das Gute ist, und daß scheinbare Hindernisse oft gerade die größten Förderungsmittel sind.

Zu all' diesen Fortschritten würden die Menschen durch ihre gewöhnlichen Lebensbedürfnisse nicht geführt worden sein; es war zunächst wieder die Natur, durch welche sie angeregt wurden, und besonders war es die Astronomie, welche die Arithmetik, so wie die Geometrie ins Leben rief. Am auffallendsten zeigt sich dieses in dem Entwickelungsgange des chinesischen Volkes; alle ihre Künste und Erfindungen zu Lebenszwecken haben nicht vermocht, ihre geistige Thätigkeit zu dieser Höhe zu heben, in ihrem Nützlichkeitsprinzipe war jede höhere Anregung untergegangen. Die Geschichte der Astronomie zeigt, welche einfache

Beobachtungen zuerst gemacht werden konnten, was für Hülfsmittel sie erforderten und welche mathematische Kenntnisse sie nach und nach hervorrufen mußten. Solche Beobachtungen wurden unzweifelhaft durch Jahrtausende fortgesetzt, ehe sie zu einem erklecklichen Resultate führten: so langsam war der Gang der geistigen Entwickelung. Der Wechsel des Mondes ist diejenige Erscheinung, welche am auffallendsten hervortritt; so bald man anfing, die Tage zu zählen, ergaben sich vier Perioden, jede von sieben Tagen und damit die Eintheilung der Zeit in Wochen und Monate. Schwieriger war es schon, die Bewegung der Sonne zu erforschen, weil sie in längerer Zeit vor sich geht und daher ihr Stand am Himmel in kurzer Zeit sich nur wenig verändert; aber endlich gelangte man doch dahin und fand, daß sie ungefähr 360 Tage brauchte, um wieder an denselben Ort zu kommen. Da nun die Sonne scheinbar einen Kreis am Himmel beschreibt, so führte dies dahin, den Umfang des Kreises in 360 Theile zu theilen; auch die Theilung in vier Theile nach den Jahreszeiten trat hier wieder ein. Hier ist jedoch nicht zu übersehen, daß auch die früh entdeckte Leichtigkeit der Vier- und Sechstheilung des Kreises mitgewirkt hat. Eine oberflächliche Vergleichung des Mondes mit der Sonne gab Veranlassung zur Abmessung nach zwölf Theilen, und alle diese Eintheilungen wurden gemacht, ehe die Zeiträume durch Beobachtungen genauer bestimmt waren, und auch nachher noch fest gehalten. Auf diese Weise entstand die Zeiteintheilung in Wochen, Monate und Jahre und die des Kreises in vier Theile oder in zwölf Zeichen oder in 360 Grade; wenn wir hier also bei den verschiedensten Völkern Uebereinstimmung finden, so sind wir zur Herleitung aus einer gemeinsamen Quelle nicht berechtiget. Hierdurch war schon eine Beschäftigung mit Zahlen und Figuren gegeben, neue Zahlensysteme entsproßten: das Duodecimalsystem, das Sexagesimalsystem und andere. Alle diese Systeme sind späterer Entstehung als das Decimalsystem, denn sie haben keine Begründung in der Sprache und haben nur Spuren in derselben hinterlassen, sie wurden auch nie vollkommen ausgebildet und nur zu besonderen Zwecken verwandt. Es lag in der Natur der Sache, daß man sich bestrebte, die Wiederkehr der Erscheinungen vorherzusagen, also die Perioden genau zu bestimmen, wodurch die schriftliche Aufzeichnung geboten wurde. Die erste Astronomie, durch viele Jahrhunderte hindurch, hatte nur ein Ziel, die Zeit zu bestimmen von einer Erscheinung bis zu ihrer Wiederkehr. Von einer Theorie konnte lange keine Rede sein; aus diesen Aufzeichnungen, welche durch eine große Reihe von Menschenaltern gingen, wurden dann Vorherbestimmungen versucht, zuweilen mit zufälligem Erfolge, am öftesten aber ohne einen solchen. Da wo mit Sorgfalt beobachtet und die ganze Erscheinung in allen ihren Theilen genau angemerkt wurde, wo schon eine ganze Reihe von Perioden zur Vergleichung vorlag, da mußte man endlich zum Ziele kommen. Es konnte nicht fehlen, daß man im Laufe so langer Zeiten, durch so viele fortgesetzte Beobachtungen, manche Erscheinung kennen lernte, und manche Veränderung erkannte, für welche man kein Gesetz auffinden, keine Periode anzugeben vermochte. Hierdurch wurde aber das Nachdenken angeregt und die Thatsachen, mit größerer oder geringerer Genauigkeit angegeben, gingen zur weiteren Verarbeitung auf die Nachwelt über.

Eine Erscheinung, welche die Aufmerksamkeit der Menschen frühe erregen mußte, war ferner die veränderliche Länge des Schattens, zuerst an ein und demselben Tage und dann im Verlaufe einer längeren Zeit. Der erste Fall führte bald zur Bestimmung der Tageszeiten und der andere ließ die verschiedene Höhe der Sonne zu verschiedenen Jahreszeiten erkennen. Diese Erscheinung wurde bald künstlich hervorgerufen durch Aufstellung lothrechter Gegenstände auf

horizontalem Boden und diente nun zur Bestimmung der Jahreszeiten und später zur Schiefe der Ekliptik. Der lothrechte Gegenstand, der Schatten und der begrenzende Sonnenstrahl bilden ein rechtwinkeliges Dreieck, welches nun der Betrachtung hingegeben war. Der Kreis und das rechtwinkelige Dreieck waren die ersten Figuren, welchen die Menschen ihre Aufmerksamkeit zuwandten. Einige Eigenschaften des Kreises sind so hervortretend, daß sie sogleich erkannt wurden, bei anderen wurde ein Zweifel durch den Versuch gehoben. Alle Völker, die einen gewissen Grad der Kultur zu erreichen vermochten, kannten die Thatsache, daß der Radius des Kreises sich sechsmal auf dem Umfange auftragen lasse, und alle hatten daher den Satz: der Umfang des Kreises ist sechsmal so groß als der Radius oder dreimal so groß als der Durchmesser. Viel später noch wurden solche empirische Formeln gemacht und das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang wie 1 zu $\sqrt{10}$ hat keine andere Begründung als die wirkliche Ausmessung. Aehnlich verhält es sich mit dem rechtwinkeligen Dreiecke. Der pythagoräische Satz ist Eigenthum aller Kulturvölker und reicht so weit in das Alterthum hinauf, daß sich seine Entstehung gar nicht verfolgen läßt. Die häufige Beschäftigung mit diesem Dreiecke führte bald zur Erkenntniß, daß wenn 3 und 4 die Seiten waren, welche den rechten Winkel bildeten, alsdann 5 die dritte Seite war und daß für andere Zahlen die dritte Seite nur dann durch eine ganze Zahl dargestellt werden konnte, wenn, wie hier, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Die Nothwendigkeit zur Bestimmung der Flächenräume führte zu einer andern Klasse, von welcher noch die Rede sein wird. Solcher Sätze aus der Arithmetik, wie aus der Geometrie, hat die vorgriechische Zeit gewiß eine große Menge aufzuweisen gehabt, aber ihre Erfindung geschah nicht auf wissenschaftlichem Wege; sie wurden nur errathen und dann erprobt. Dieses Verhältniß ist ganz natürlich. Vor der Entstehung des wissenschaftlichen Denkens war ein anderer Weg der Erfindung gar nicht möglich; auf demselben Wege haben die Chinesen alle ihre Erfindungen gemacht und alle Zeiten liefern uns Beispiele ähnlicher Vorgänge. Man hat diese Bemühungen der Vorzeit viel zu sehr unterschätzt, indem man sie immer nur mit den höhern Leistungen späterer Zeiten verglichen hat, ohne zu bedenken, daß diesen jene zu Grunde lagen, und daß überhaupt die Begründung einer Wissenschaft viel schwieriger war, als der Fortbau derselben auf vorhandener Grundlage.

In den Sagen aller Völker werden die Anfänge ihrer Kulturzustände auf eine erste Quelle zurückzuführen versucht, und hier zeigt sich gleich die eigenthümliche Auffassungsweise der zwei großen Gruppen des Menschengeschlechtes. Die asiatischen Rassen führten ihre Einrichtungen, ihre nützlichsten Erfindungen und die Anfänge der Wissenschaften auf geistig hervorragende Menschen zurück, die durch ihre Geistesgröße die Führer der Völker wurden und die ersten Herrscherfamilien stifteten. Die afrikanischen Rassen nahmen alle diese Dinge als hervorgegangen aus einer unmittelbaren Offenbarung der Götter. Dieser Unterschied war durchgreifend und entsprach völlig dem geistigen Wesen der Rassen; auf der einen Seite gingen daraus die profanen Schriften, auf der andern die heiligen Bücher hervor. Da, wo die Wissenschaften als von Menschen ausgegangen betrachtet wurden, da waren auch alle Menschen aufgefordert, an ihnen Theil zu nehmen, alle gleich verpflichtet, sie zu fördern. Dennoch waren hier die Fortschritte gering, weil ein Zusammenwirken von Mehreren zu gleichem Zwecke nicht stattfand, weil die Mittheilung und Verbreitung des von Einzelnen Erzeugten sehr schwierig war und dann weil die Individuen nicht ausschließlich auf die Beschäftigung mit wissenschaftlichen Gegenständen angewiesen waren.

Die Wissenschaften als göttliche Offenbarungen dagegen verlangten einen eigenen Stand, welchem die Pflege und Erhaltung der heiligen Ueberlieferungen übergeben wurden und konnten schon ihres Ursprunges wegen nicht ein Gemeingut Aller sein; der Priesterkaste allein kam es zu, sie kennen zu lernen und weiter zu führen. Dieses Verhältniß war weit günstiger für die Entwickelung der Wissenschaften als das vorige; einer Anzahl Männer, durch die Erziehung dazu schon vorbereitet und nicht abgezogen durch irgend andere Beschäftigungen, wurde die Pflege und Förderung eines Zweiges der Wissenschaften übertragen, sie standen unter sich in der engsten Verbindung, und was sie Neues hervorriefen, bildete einen Theil der heiligen Bücher und wurde durch diese den Anderen bekannt. Die profane Wissenschaft erlangte wohl eine größere Verbreitung, aber nur eine geringe Höhe; die heiligen Bücher dagegen blieben auf einen kleinen Kreis beschränkt, führten aber die Menschen desto weiter. Die Priesterwissenschaft trug jedoch den Keim ihres Verfalles in sich; sie sollte nicht als ein menschliches Erzeugniß dastehen, kein Individuum konnte und durfte sich rühmen, durch seine Anstrengungen etwas geleistet zu haben; jede Anregung zu erhöhter Thätigkeit fehlte, und als das Bestehen der Priesterkasten gesichert war, schwand auch jedes geistige Streben und selbst das Ueberkommene wurde zuletzt nur noch nothdürftig verstanden. Die Wissenschaften nahmen hierdurch selbst eine ihrer Fortbildung höchst schädliche Form an, was die Götter den Menschen geoffenbart hatten, mußte absolut wahr sein, duldete daher keinen Zweifel, keine Untersuchung, keinen Beweis. Alle Wissenschaften bestanden aus einer Reihe einzelner Sätze, Aussagen, Behauptungen, Vorschriften; diese waren, um sie dem Gedächtnisse besser einprägen zu können, in Verse gebracht worden, wodurch nicht selten die Bestimmtheit des Ausdruckes verletzt, ja dieser selbst ganz unverständlich wurde. Diese Art Poesie war es, welche man in der vorgriechischen Zeit Wissenschaft nannte, und welche von den afrikanischen Rassen und von Aegypten ausgegangen, sich weithin über Asien und Europa verbreitete. In Bezug auf die Mathematik muß nun besonders hervorgehoben werden, daß in dieser ganzen Entwickelung die Form höher stand als die Zahl, daß die Aegypter daher vorzugsweise der Geometrie ihre Aufmerksamkeit zuwandten, daß selbst ihre wenigen arithmetischen Sätze unter geometrischen Formen dargestellt wurden, und daß sie überhaupt mehr konstruirend als rechnend verfuhren, worüber noch alte Zeugnisse vorhanden sind. Eines gleich günstigen Erfolges konnten sich die asiatischen Rassen nicht rühmen, denn die größere Verbreitung von weniger Kenntnissen vermochte die höhere Entwickelung im engeren Kreise nicht aufzuwiegen. Wie weit die Arier bei ihren Berührungen mit der mongolischen Rasse gekommen waren, läßt sich nicht mehr unterscheiden, und wenn sie auch bei ihrem Zuge nach Westen schon einen gewissen Kulturgrad erlangt haben mochten, so kann dieser doch mit der ägyptischen Kultur nicht verglichen werden; was insbesondere die Lebenskultur betrifft, so stand jene gegen diese unvergleichbar zurück. Die Chinesen dagegen haben uns noch ein treues Bild ursprünglich asiatischer, durch fremde Einflüsse nicht beträchtlich veränderter Kultur erhalten, wie bereits oben dargestellt wurde; hinsichtlich der Mathematik aber im Besondern sind sie aus sich zu keinem nennenswerthen Resultate gekommen; es läßt sich nur soviel sagen, daß sie mehr rechnend als konstruirend verfuhren, obgleich sie am wenigsten unter allen Völkern zum abstrakten Zahlenbegriffe sich erheben konnten, was in der Eigenthümlichkeit ihrer Sprache liegt. Wie sehr übrigens bei den Chinesen die Zahl die Form überwog, beweist einmal ihr dreifaches System: sie haben eine Eintheilung in vier, in zehn und in zwölf, das erste und letzte hauptsächlich nur zu wissenschaftlichen Zwecken; sodann auch der Zustand ihrer darstellenden Kunst in allen

ihren Anwendungen. Eben so bezeichnend für beide Rassen ist die von einander unabhängige Erfindung einer Bilderschrift, welche in Aegypten zu großer Ausbildung gelangte. Hier ist es nur fremdem Einflusse zuzuschreiben, wenn einzelne Bilder zugleich eine phonetische Geltung erhielten, während dagegen in China schon frühe die Bilder in, vom Gegenstande unabhängige Zeichen übergingen, welche nie eine lautliche Bedeutung zu erlangen vermochten.

Der nächste Schauplatz einer höheren Geisteskultur war natürlich da, wo die beiden Hauptrassen zusammentrafen und wo die Beschaffenheit des Landes schon eine höhere Kultur begünstigte. In dem großen Flußgebiete, welches seine Wasser dem persischen Meerbusen zusendet, begegnen wir einer Kultur, deren Anfänge über alle Sagen hinausgehen, wo die erste Verbindung der Rassen sich im Dunkel der Zeiten verliert, aber ununterbrochen durch Jahrtausende hindurch fortgedauert hat. Hier war es, wo die Buchstabenschrift erfunden wurde, mit welcher die Städte- und Schiffebauenden Phöniker an das Mittelmeer kamen, wo in den frühesten Zeiten schon ein lebhafter und ausgedehnter Verkehr mit Erzeugnissen der Natur und Kunst unterhalten wurde und die Lebensbedürfnisse schon bis zum Luxus erhöhet waren. In der Mitte zwischen beiden Extremen entfaltete sich hier, in verschiedenen Abstufungen, eine Priesterschaft, die zugleich einen Gelehrtenstand bildete; aber nichts berechtiget uns zu der Annahme, daß die Wissenschaften ihr ausschließliches Eigenthum geblieben seien. In dieser höheren Form lag schon ein großer Fortschritt: durch einen besonderen Stand wurden die Wissenschaften gefördert, aber die Theilnahme an ihnen stand allen offen. Babylon war der Hauptsitz der geistigen Bewegung in diesen Ländern arisch-semitischer Bevölkerung, und von den Chaldäern insbesondere wissen wir, daß sie sich mit Astronomie und Mathematik von jeher viel und mit Erfolg beschäftiget hatten. Die Arithmetik wurde mehr kultivirt als die Geometrie, und bei dieser gingen sie mehr rechnend als konstruirend zu Werke, im Gegensatze zu dem Verfahren der Aegypter. Im Allgemeinen läßt sich annehmen, daß die Bildung hier höher stand, als in China und Aegypten; die Ansichten in religiösen wie in wissenschaftlichen Dingen wichen sehr von einander ab, denn es fehlte die Einheit, welche die Meinungen beherrschte; aber aus dieser Mannigfaltigkeit war auch ein höherer Grad der geistigen Thätigkeit hervorgegangen. Es ist sehr zu bedauern, daß gerade von hier so wenig Nachrichten auf uns gekommen sind, allein, welche Aufschlüsse uns noch werden mögen, sie können das Gesagte nur bestätigen, so wie auch die späteren Zustände ganz damit übereinstimmen. Die großen Reiche des Euphratgebietes haben einen weithin gehenden und mächtig bildenden Einfluß auf das geistige Leben ausgeübt. Nach Osten und Westen drangen ihre Heere vor, oder gingen friedliche Züge, sich eine neue Heimath suchend, und so groß war das Streben, den ausgedehnten Verbindungsprozeß auszuführen, daß ganze Völkerschaften aus ihren alten Wohnsitzen in entlegene Gegenden versetzt wurden, aus welchen sie zuweilen, wie die Juden, von neuen Ideen erfüllt, in ihre alte Heimath wieder entlassen wurden, wo sie sich aber wieder in den Stämmen verloren, die unterdessen ihre Stelle eingenommen hatten. Instinktartig streben die Menschen diesen Prozeß zu fördern, und noch in den letzten dreihundert Jahren hat man Millionen Neger nach der neuen Welt versetzt, wo ihrer eine ganz andere Zukunft wartet, als man ihnen bestimmt hatte.

Von Aegypten und den Euphratländern aus ging die geistige Anregung einerseits nach Indien, andrerseits nach Griechenland. Hier begegnen wir denn auch zwei Kulturen, obgleich unter sich sehr verschieden, doch beide höher stehend

als alle früheren. In beiden Ländern begünstigte ein vielgetheiltes Staatswesen die allgemeine geistige Bewegung; aber die freiere Entwickelung des öffentlichen Lebens in Griechenland gestattete diesem, sich eine neue Grundlage zu schaffen, auf welcher allein nur die wahre Wissenschaft möglich war. Wir gehen daher nun über zu einer genauen Darstellung der wissenschaftlichen Entwickelung bei den Griechen.

Die Mathematik der Griechen.

Erster Abschnitt.

Entwickelung der reinen Geometrie.

Erste Periode. Von der ältesten Zeit bis zur Erfindung der analytischen Methode und der Kegelschnitte.

Als 560 v. Chr. Aegypten durch den König Psametich den Griechen geöffnet wurde, da entstand nicht allein ein lebhafter Handelsverkehr zwischen beiden Ländern, sondern es zogen auch wißbegierige Griechen nach diesem Lande, um die Weisheit seiner Priester kennen zu lernen. In Aegypten lag der Schlüssel zur griechischen Mythologie, der ägyptische Ideenkreis wurde nun nach Griechenland übertragen, und jetzt erst seiner wahren Bedeutung nach aufgefaßt; er übte daher auch einen mächtigen Einfluß auf das geistige Leben der Griechen. Es ist früher nachgewiesen worden, wie, aus der eigenthümlichen Zusammenwirkung verschiedener Ursachen, der griechische Geist frei war von den Banden, welche die geistige Bewegung anderer Völker hemmte, und frei nahmen sie alles ihnen Dargebotene auf. Diese Freiheit bestand nun aber darin, daß kein Ausspruch, keine Satzung, keine Vorschrift, keine Behauptung für sie von vorne herein Geltung hatte, wie es der Fall war bei denen, von welchen sie dieselben erhielten, sondern daß, um Geltung zu erlangen, sie erst als wahr und richtig erkannt werden mußten. Aber die Griechen blieben hierbei nicht stehen, sie begnügten sich nicht zu wissen, daß Etwas ist und wie es ist, sondern sie suchten auch zu erforschen, warum es so ist, warum es so nothwendig und daher auch am besten so ist. Dieses Streben, angewandt auf alle Sphären ihres Lebens, bezeichnet hauptsächlich die Richtung des griechischen Volkes und nur dadurch begründeten sie einen neuen Abschnitt in der geistigen Entwickelung des Menschengeschlechtes. Von jetzt an begann erst das reine, wissenschaftliche Denken, was sich natürlich zuerst nur an den einfachsten Dingen, an Zahl und Form, üben konnte. Die Griechen fingen jetzt an, die Wege ihrer Vorgänger zu verlassen, sie umfaßten nicht mehr ausschließlich das All in einem großen Phantasiegemälde, sie wandten ihren Blick immer mehr dem Einzelnen zu, und suchten dieses auf wissenschaftliche Weise zu erfassen. Von der Eröffnung Aegyptens an kann man beide Richtungen, neben einander herlaufend, leicht verfolgen, bis nach ungefähr 300 Jahren, die griechische Weise überwog und dadurch die Grundlage der neuern Bildung festgestellt wurde. Faßt man dabei besonders die Mathematik ins Auge, so lassen sich ihre Entstehung, die Ursachen ihrer eigenthümlichen Gestaltung und die angewandten Methoden leicht erklären.

Den Griechen wurden durch die Aegypter eine Menge als Sätze anerkannte, unzweifelhafte Wahrheiten geboten. Diese Sätze, welche sie Theoreme nannten,

d. h. Angeschautes, durch Betrachtung Gefundenes und erst zu Erweisendes, konnten daher für sie erst dann Werth und Geltung erhalten, wenn sie im Stande waren, ihre Richtigkeit zu beweisen. Der Beweis war nun allerdings mit großen Schwierigkeiten verbunden und konnte anfänglich nur unvollkommen geführt worden sein. Es waren dazu vorerst scharfe Begriffsbestimmungen nöthig, wie sie früher wahrscheinlich nie versucht wurden, sodann gewisse Ursätze, an und für sich klar und unzweifelhaft, welche mit Bestimmtheit gefaßt, ebenso wenig schon im Gebrauche waren; dazu kamen nun noch gewisse Forderungen, deren Erfüllung als möglich vorausgesetzt wurde. Die Betrachtung eines vorgegebenen Satzes A mußte zunächst dahin führen, daß A nur dann wahr sein kann, wenn B wahr ist; das Gleiche galt nun wieder für den Satz B u. s. f.; wodurch man endlich auf Ursätze und Begriffsbestimmungen zurückkam. Es ist klar, daß hierbei im Anfange die Fortschritte nur sehr langsam sein konnten und daß in derartigen Untersuchungen die Kundgebung einer neuen Zeit lag. Man kann die Bemühungen der Griechen zur Begründung einer wissenschaftlichen Mathematik als das Streben der Menschheit bezeichnen, aus dem Zeitalter der ungebundenen, regellosen, oft nur instinktartigen Geistesbewegung sich loszuwinden und in das des bestimmten, gesetzlichen Denkens überzutreten. Die Mathematik und später die Grammatik waren der Ausdruck dieses Strebens und neue, früher nicht gekannte, Erzeugnisse. Wie überhaupt Alles in der Natur nur in allmäligen Uebergängen erfolgt, so läßt sich auch hier keine Grenze ziehen, aber durch die Zusammenfassung aller Thatsachen steht fest, daß erst in Griechenland die Verhältnisse so günstig zusammenwirkten, um diese neue Richtung ins Dasein rufen zu können, wofür das ganze geistige und materielle Leben der Griechen den Beweis liefert.

Die Vorbereitungen zu der höhern Geistesrichtung der Griechen fallen in die Zeit von der Gründung der Kolonien in Kleinasien bis zur Eröffnung Aegyptens. Obschon durch die Sprache zur Einheit verbunden, waren die Griechen doch nichts weniger als ein gleichartiges Ganzes, aber eben in der Abweichung der einzelnen Stämme lag der Keim des regsten Geisteslebens, das durch die ununterbrochene Einwirkung auf einander stets wach erhalten wurde. Von den asiatischen Kolonien ging die erste Anregung meistentheils aus, dort floßen die Resultate der früheren Kulturen zusammen und fanden in den reichen und blühenden Handelsstädten eine günstige Aufnahme. Es lebte daselbst eine Bevölkerung, die nach beiden Seiten mit den Kulturrassen verbunden in glücklicher Mischung fähig war, die verschiedenen Ideenkreise prüfend aufzunehmen und weiter zu verarbeiten. Die Menge der kleinen Staaten, von welchen jeder seine Eigenthümlichkeiten hatte, und die eben ihrer Kleinheit wegen im Stande waren, die aufgenommenen und erzeugten Ideen schnell zur Verbreitung zu bringen, bildete eben so viele Mittelpunkte kleiner Kulturkreise. Herrschte nun schon in diesem kleinen Gemeindewesen eine rege Thätigkeit durch die Verschiedenheit der Elemente, so wirkten sie auch wieder als Ganzes auf einander und auf das Mutterland zurück. Unter solchen günstigen Verhältnissen mußten die Schranken fallen, welche die verschiedenen Gruppen des Menschengeschlechtes früher umfaßten und beschränkten; allmälig wurden die Bande gelöset und die freiere Bewegung zeigte sich in weltlichen und religiösen Dingen, in Staat und Kirche, in jeder Sphäre der geistigen Thätigkeit. Diese große Veränderung wurde nur allein dadurch hervorgerufen, daß den Griechen fremde Ideen in steigender Ausdehnung geboten wurden, welche sie zum Nachdenken veranlaßten, weil sie dieselben, als nicht aus ihrem Wesen hervorgegangen, nicht passiv aufnehmen konnten, sondern genöthiget waren, auf den Grund der

Sache zurückzugehen. Dieses Zurückgehen auf den Grund der Dinge, diese stete Frage nach dem Warum, nicht beantwortet durch eine neue Dichtung, war aber das schwierigste Problem, welches den Menschen vorgelegt werden konnte, und einen Erfolg konnten diese Bemühungen nur haben, wenn man das Große verließ und sich zu dem Kleinen wandte. Das thaten nun die Griechen und so entstand die reine Mathematik, sie wurde ihre Lieblingsbeschäftigung, weil die Bemühungen mit Erfolg gekrönt waren und die Richtung der Zeit hier ihren Ausgangspunkt finden konnte.

Die ägyptische Auffassung ging auf die Griechen über, die Form trat bei ihnen noch mehr in den Vordergrund, die Größe überhaupt wurde nur anschaulich als Raumgröße dargestellt, so daß sich nur eine Geometrie entwickelte. Die Arithmetik machte einen Theil der Geometrie aus, indem alle ihre Sätze geometrisch aufgefaßt wurden. Dieses Verhältniß ist sehr wichtig; es zeigt, daß die Griechen nach Klarheit und Bestimmtheit strebten und daher Alles zur sinnlichen Anschauung zu bringen suchten. Eine wissenschaftliche Mathematik in der Vollendung, wie sie uns von den Griechen hinterlassen wurde, konnte aber auch nur auf diesem Wege gewonnen werden, die Anschauung mußte anfänglich nothwendig die Ueberzeugung stützen helfen und die Klarheit und Sicherheit fördern. Die Geometrie bestand, ihrer Entstehung gemäß, aus einzelnen Sätzen, die unter sich in einen künstlichen Zusammenhang gebracht wurden in der Art, daß jeder folgende Satz den vorhergehenden voraussetzte. Bevor eine solche Reihe vollständig vorhanden war — und dies muß einmal der Fall gewesen sein — muß es einzelne Sätze gegeben haben, welche, obgleich nicht streng erwiesen, doch als richtig vorausgesetzt wurden, weil dies entweder der Augenschein lehrte oder weil sie sich beim Erproben als wahr zeigten; doch wurden zuletzt auch diese Lücken durch strenge Beweise ausgefüllt. Die Art der Darstellung war nun folgende: voraus stand der Satz, in seiner Voraussetzung und Behauptung scharf ausgedrückt: Wenn eine Figur die Eigenschaft A hat, so hat sie auch die Eigenschaft B. Die Behauptung mußte nun bewiesen werden, es folgte daher im zweiten Theile der Beweis. Zur Beweisführung gehörte nun das Ziehen gewisser Hülfslinien, wodurch man in Stand gesetzt wurde, den Beweis des Satzes auf einen frühern Satz zurückzuführen. Hier wurde nun eine Forderung gestellt, und es mußte eine Konstruktion ausgeführt werden. Gehörte die Forderung unter die, welche man als unmittelbar ausführbar sich dachte, so genügte die bloße Angabe, im andern Falle aber mußte erst gezeigt werden, wie die Forderung erfüllt werden könne. Diese Forderungen führten nun zu einer andern Klasse von Sätzen, den Problemen; ein Problem ist aber das Vorgelegte, zu Lösende, die Aufgabe. Ein solcher Satz bestand aus drei Theilen, der eigentlichen Aufgabe, in welcher ausgesprochen wurde, was geleistet werden sollte, dann kam die Auflösung, eine genaue und deutliche Vorschrift zur Ausführung der Zeichnung, zuletzt folgte der Beweis, daß durch die Vorschrift erreicht werde, was gefordert wurde. Wenn nun ein Theorem im Beweise eine solche Konstruktion erforderte, so mußte das bezügliche Problem vorausgegangen sein, und deßhalb war die Reihe der Theoreme mit Problemen untermischt. So war die griechische Geometrie der ersten Zeit im Allgemeinen beschaffen, und wenn man auf ihre Entstehungsweise zurück sieht, so wird man erkennen, daß alle ihre Eigenthümlichkeiten sich nothwendig so entwickeln mußten. Die aphoristische Form ist nicht etwa mit Bewußtsein und vorsätzlich als die der Geometrie am angemessensten gewählt und ausgebildet worden; sie erklärt sich vielmehr einfach daraus, daß eben den Griechen die Theoreme zum Theile schon geboten wurden und sie dann dafür die Beweise erfinden mußten. Auf die schon angegebene

Weise gelangten sie auch zu neuen Sätzen und machten dann verschiedene Versuche, alle zu einem Systeme zu verbinden. Eben so erklärt sich auch die rein konstruktive Methode, der gänzliche Ausschluß jeder Rechnung, da die Griechen eben nur eine Geometrie, aber keine Arithmetik überkommen hatten. Hier ist aber noch zu beachten, daß die Geometrie nicht ihrer Anwendung wegen kultivirt wurde; sie wurde als eine reine Geistesgymnastik betrachtet, das Erforschen der Eigenschaften der Figuren war ihr Zweck; das wirkliche Messen und die Darstellung der Größen durch Zahlen lag dieser Richtung ferne. Dieß schließt nicht aus, daß die Griechen nicht auch eine praktische Geometrie hatten; sie wurde aber wohl mehr als ein Gewerbe betrachtet und in den wissenschaftlichen Werken geschieht davon keine Erwähnung.

Aus dem Angeführten ist klar, daß von einem Erfinden der Arithmetik oder der Geometrie überall nicht die Rede sein kann, und daß wir eben so wenig anzugeben vermögen, wer zuerst einen mathematischen Satz bewiesen habe. Wir übergehen daher alle jene ungewissen Nachrichten, in welchen bloß Namen genannt werden, und wenden uns sogleich zu dem Geometer, von welchem bestimmte Leistungen vorliegen.

Thales von Milet, einer jonischen Kolonie in Kleinasien, war einer der hervorragendsten Männer seiner Zeit, Staatsmann, Philosoph, Mathematiker und Astronom. Als sein Geburtsjahr wird gewöhnlich das Jahr 640 v. Chr. angegeben; er war ein Phöniker aus dem Geschlechte der Theliden und lebte theils bei Krösus, theils in Milet. Sein Leben fiel in die Zeit, als die jonischen Städte durch Krösus unterjocht wurden und hieraus schreibt sich wohl sein Verhältniß zu diesem Fürsten her. In dem Kriege des Krösus gegen Cyrus soll Thales den Uebergang des lydischen Heeres über den Fluß Halys durch Abgraben des Flusses erleichtert, so wie auch eine Sonnenfinsterniß auf den 17. Mai 603 vorhergesagt haben. An diesem Tage war aber das lydische Heer mit dem medischen in Kampf gerathen und die eintretende Finsterniß führte das Ende der Schlacht und den Friedensschluß herbei. Sonst berichtet man noch von Thales, daß er sich frühe von den Staatsgeschäften zurückgezogen und nur den Wissenschaften gelebt habe. In schon vorgerücktem Lebensalter ging er noch nach Aegypten, wo er einige Jahrzehnte verweilte und mit den ägyptischen Ideen und Wissenschaften vertraut wurde; seine Philosophie liefert hierzu den Beweis, denn sie ist ganz den ägyptischen Lehren entnommen. Es wird erzählt, daß die Priester, die den Thales wahrscheinlich in der Mathematik für unerfahren hielten, ihm ein Verfahren angaben, die Höhe einer Pyramide zu messen. Sie steckten einen Stab senkrecht in den Boden und warteten den Zeitpunkt ab, wo der Schatten genau so lang war, wie der Stab hoch, und alsdann schlossen sie, daß auch der Schatten der Pyramide so groß sein werde, als die Höhe derselben. Hierauf soll nun zum großen Erstaunen der Priester Thales eine andere Methode angegeben haben, welche unabhängig von dem angegebenen Zeitpunkte war. Er bezeichnete nämlich zu irgend einer Zeit die Endpunkte beider Schatten, des Stabes und der Pyramide, in demselben Augenblicke und schloß dann: die Höhe der Pyramide enthält eben so oft die Höhe des Stabes, als die Länge des Schattens von jener in der Länge des Schattens von diesem enthalten ist. Diese Geschichte, von Vielen geglaubt, von Andern verworfen, ist vielfach ausgebeutet worden, besonders um zu beweisen, daß die Griechen von den Aegyptern nichts hätten lernen können, weil sie selbst diesen überlegen gewesen seien. Die Priester hatten bei ihrer Methode wohl keinen andern Zweck, als einen Weg anzugeben, wie man die gesuchte

Höhe ohne Konstruktion und Rechnung ganz einfach durch direktes Messen finden könne, während nach dem Verfahren des Thales dazu eine Rechnung nöthig war. In dieser Zeit war nun eine wissenschaftliche Begründung der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke, auf welcher die Methode des griechischen Philosophen beruhte, noch nicht vorhanden; er wandte daher bloß eine jener mechanischen Vorschriften an, deren Entstehung im innern Asien über alle Forschung hinausliegt, und welche auch von den Griechen in ihrer praktischen Geometrie längst angewandt wurden. Die Regel für den vorliegenden Fall würde etwa gelautet haben: Willst du die Höhe der Pyramide finden, so multiplieire den Schatten derselben mit der Höhe des Stabes und dividire das Produkt durch den Schatten des Stabes. Thales hat keine Schriften hinterlassen, es werden ihm jedoch bestimmte Entdeckungen in der Geometrie zugeschrieben. Er soll zuerst bewiesen haben, daß Dreiecke, welche eine Seite und die anliegenden Winkel wechselweise gleich haben, congruent sind; daß im gleichschenkligen Dreiecke die Winkel an der Grundlinie gleich sind; daß ein Kreis von seinem Durchmesser in zwei gleiche Theile getheilt wird und endlich, daß alle Winkel im Halbkreise rechte sind. Es wird ihm ferner zugeschrieben, zuerst den Kreisbogen als Maß für den Winkel gebraucht zu haben, was wohl kaum erst damals entstanden sein dürfte, so wie Anderes mehr. Thales war der Stifter der sogenannten jonischen Schule, unter seinen hervorragendsten Schülern waren Anaximander und Anaximenes, beide aus Milet; auch Pherekydes aus Syros wird als sein Schüler genannt. Obschon bei diesen der ägyptische Ideenkreis noch vorwaltet, so finden doch schon Abweichungen statt; sie beschäftigten sich, wie alle Philosophen der ersten Zeit, viel mit Mathematik und werden sie ohne Zweifel auch mit neuen Sätzen und Beweisen bereichert haben.

Viel bedeutender als die Vorhergehenden war **Pythagoras** aus **Samos** (570—471), ein Schüler des Pherekydes. Sein Vater war ein reicher Kaufmann aus Samos und seine Mutter eine Phönikerin. Er widmete sich ganz den Wissenschaften, ging dann auf Reisen (550) und wurde zu Milet mit Thales und Anaximander persönlich bekannt. In Tyrus zunächst wurde er mit der hohen Kultur der Phöniker bekannt und ging dann (546) nach Aegypten, von Polykrates, Fürsten zu Samos, an den König Amasis empfohlen. Er wurde in den ägyptischen Priesterstand aufgenommen und lebte bis 524 zu Theben. Durch des Kambyses' Zug nach Aegypten gelangte er in persische Gefangenschaft und wurde nach Babylon geführt. Durch einen Bürger aus Kroton, dem der König Darius zu Danke verpflichtet war, wurde er endlich (512) befreit und kehrte nach Samos zurück. Nachdem er verschiedene Städte besucht hatte, nahm er endlich seinen ständigen Aufenthalt in Kroton, wo er als Sittenlehrer auftrat und großen Einfluß erlangte. Das Leben des Pythagoras fiel in eine höchst bewegte Zeit; in Persien war Zoroaster (599 — 522) mit der Erneuerung des arischen Glaubenskreises aufgetreten, in Indien verbreitete Gautama (548 — 468) seine neuen Lehren und in China suchte Konfuzius (550 — 477) eine bessere Zeit zu begründen. Unterdessen waren die kleinasiatischen Griechen durch Darius in persische Abhängigkeit gekommen und gleiches Schicksal drohte ganz Griechenland. Die griechischen Kolonien in Unteritalien hatten gleichfalls eine hohe Blüthe erlangt, aber auch hier hatte sich ein neues Element festgesetzt durch das Einrücken der Karthager in Sicilien. In Griechenland hatte die Demokratie endlich die Oberhand behalten, Athen seine Tyrannen verjagt. Italien war in dieselbe Bewegung eingetreten, Rom hatte das Königthum abgeschafft, die griechischen Kolonien kämpften noch mit ihrem Adel. Auch in Kroton waren diese Kämpfe nach 500 ausgebrochen. Pythagoras stand auf

der Seite der Aristokratie oder eigentlich der Priesterpartei. Obgleich er in seinen Lehren das persische Element aufgenommen hatte, war er doch in seinen politischen Ansichten den ägyptischen Einrichtungen zugethan und hätte sie gerne bei seinen Landsleuten eingeführt. Die Demokraten überfielen die Adeligen in der Akademie des Pythagoras; letztere unterlagen und wurden vertrieben, mit ihnen der Philosoph. Er ging hierauf nach Tarent, dann nach Metapontum, wo er in einem Aufstande der Demokraten gegen den Adel umkam.

Eine große Bedeutung hat Pythagoras dadurch, daß durch ihn und seine Schule das persische Element nach Griechenland kam und durch seine Schüler, die nicht blind den Lehren ihres Meisters folgten, eine immer größere Verbreitung erhielt. Außerdem stiftete er einen Bund von Gelehrten, der zuletzt die Rolle der ägyptischen Priesterschaft übernommen haben würde, wenn er nicht an dem gesunden Sinne des griechischen Volkes gescheitert wäre. Er dauerte jedoch einige Jahrhunderte hindurch fort und erhielt sich besonders lange in Italien.

Das Hauptstudium der Pythagoräer war Mathematik, und dem Meister selbst schreibt man die Erfindung des nach ihm benannten Satzes zu. Allein da dieser sicher schon viel früher bekannt war, so kann man wohl nur sagen, er habe zuerst bewiesen, daß im rechtwinkeligen Dreiecke das Quadrat über der Hypotenuse so groß ist, als die Quadrate über den Katheten zusammengenommen. Dieser Satz ist die Grundlage vieler anderer Sätze, welche durch ihn bewiesen werden können; es mußten ihm aber wieder andere vorangehen, von deren Erfindung wir keine Nachricht haben. Pythagoras zeigte ferner zuerst, daß unter allen ebenen Figuren von gleichem Umfange der Kreis den größten Flächeninhalt habe und die Kugel unter allen Körpern von gleicher Oberfläche den größten Raum einnehme. Ebenso wichtig ist es aber, daß er die Zahlenlehre zuerst nach Griechenland verpflanzt hat. Gerechnet haben wohl alle Völker, sobald sie nur einige Kultur erreicht hatten; etwas anderes aber ist es mit der Lehre von den Eigenschaften der Zahlen, und mit diesem Zweige besonders haben sich die Pythagoräer beschäftiget. Die Griechen unterschieden die Lehre von dem Mechanismus der Operationen, die Rechenkunst, Logistik, von der eigentlichen Zahlenlehre, der Arithmetik. Auf die Logistik suchte Pythagoras in so ferne einzuwirken, als er höchst wahrscheinlich bei seinem Aufenthalte in Babylon mit der indischen Art zu rechnen bekannt geworden war, und diese nun zu den Griechen zu verpflanzen sich bemühte. Diese Bemühungen fanden keinen Eingang, weil das Columnensystem, welches er einführen wollte, keine so große Vorzüge gegen die alte Methode zu gewähren schien, an welche man einmal gewöhnt war; die Methode, welche Pythagoras gelehrt, hat sich aber in Italien erhalten. Mit der Arithmetik waren die Pythagoräer vertraut, sie kultivirten dieselbe neben der Geometrie und meistentheils nicht in geometrischer Form. Von Pythagoras selbst wird erzählt, daß er die harmonische Proportion aus Babylon mitgebracht und eine Vorschrift gegeben habe, zwei Zahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist. Nach dieser Vorschrift nimmt man irgend eine ungerade Zahl als erste Zahl; diese erhebt man ins Quadrat, vermindert sie um eins und theilt den Rest durch 2, so erhält man die zweite Zahl; diese um eins vergrößert, gibt die dritte, deren Quadrat so groß ist, als die Summe der Quadrate der beiden ersten. Mit Hülfe dieser Vorschrift kann man rechtwinkelige Dreiecke konstruiren, deren Seiten ganze Zahlen sind; sie hat aber ganz das Ansehen, als ob auch sie aus dem Orient gekommen wäre. Es ist unbekannt, ob Pythagoras auf diesem Gebiete sonst noch Neues geschaffen oder Früheres mitgetheilt hat, er neigte sich aber zu einer mystischen

Zahlensymbolik hin, welche gewiß vielfach mißverstanden und mißbraucht worden ist; jedenfalls trat sie reellen Fortschritten in der Arithmetik hindernd entgegen. Aus der Verbindung der Arithmetik mit der Geometrie und der Anwendung der Zahlenbegriffe auf die Körperwelt gingen noch einige Fortschritte hervor. Zuerst erkannte man die Incommensurabilität gewisser Linien, d. h. daß sie kein gemeinschaftliches Maß haben können, wie die Seite des Quadrats und die Diagonale desselben; dann entstand durch solche Betrachtungen die Theorie der regulären Körper, welche wieder vieles Andere voraussetzt. Pythagoras eröffnete die Zeit, wo eine neue Richtung auch in die Mathematik der Griechen kam; auch hier fand das Gesetz nach Ausgleichung der Gegensätze, nach Verbindung der entgegenstehenden Elemente, seine Bestätigung; er gab die ersten Impulse, sie wirkten aber nur schwach und erst nach vielen Jahrhunderten kam eine Vermittelung zu Stande, obgleich selbst dann noch die beiden Richtungen neben einander herliefen, wenn auch nicht mehr ganz in derselben Bedeutung wie früher. Dem Pythagoras und seinen Schülern schreibt man auch die Kenntniß der wahren Einrichtung unseres Sonnensystemes zu. Es liegt hierin nichts Unglaubliches; von Zeit zu Zeit tritt dieses hervor, aber immer mehr auf sicheren Grundlagen gestützt; es ging hier, wie mit den mathematischen Sätzen, welche erst dann wahr wurden, als man sie zu beweisen im Stande war.

Wichtig bei den Pythagoräern ist die Ansicht, daß in der Natur Alles nach bestimmten Gesetzen vor sich gehe, denn ihr Hauptsatz ist: Die Zahl ist das Wesen aller Dinge, und die Einrichtung des All ist ein harmonisches System von Zahlen und deren Verhältnissen. Aus der Einheit (Monas, der Geist), die sie aber nicht als ein einmaliges Eins, sondern als Vielheit fassen, geht die ganze sichtbare Welt hervor. Die Zweiheit (Dyas) geht aus der Monas hervor, nicht durch bloßes Nebeneinandersein, sondern gewissermaßen durch gegenseitiges Umfassen, durch eine Verbindung zu einem, der Monas gegensätzlichen, Ganzen, zu einem neuen Eins, zur Dyas, was für uns das materielle Theilchen, das Atom, ist. Indem die Dyas von Neuem an der Monas Theil nimmt, entsteht die Dreiheit, Trias, die höhere Form, das bewegliche veränderliche Molecul, im Gegensatze zum starren Atom, in seiner Veränderlichkeit ein Bild der Zeit. Aus der Trias entsteht die Körperwelt; aber indem sie diese bildet, nimmt sie die Monas noch einmal auf und steigert sich zum höchsten sinnlichen Ausdrucke, zur Vierheit, Tetras. Das sinnliche und übersinnliche All umfaßt nun alle vier, es ist dieß die thätige, wirksame Vier, die Tetraktys des Pythagoras. Da nun $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, die Zehnzahl, Dekas, so umfaßt diese die Tetraktys als Bild des Universums. Wir haben hier eine ganz orientalische Anschauung, zugleich aber auch die erste Grundlage der Atomistik und das Bestreben, die Vorgänge in der Körperwelt auf bestimmte Gesetze und deren Ausdruck durch Zahlen zurückzuführen. Aus dieser Richtung ergibt sich von selbst die Hinneigung zur Beobachtung und zu Versuchen, um diese Gesetze zu erkennen. Dieß ist ein sehr bedeutsamer Punkt in dem Kulturgange der Griechen, und seine Folgen würden früher hervorgetreten sein, wenn nicht die mystische Darstellung der Pythagoräer die Sache verdunkelt und dadurch ihre Verbreitung verhindert hätte.

Obschon es wahrscheinlich ist, daß alle Philosophen dieser Zeit sich mit Mathematik beschäftiget haben, so sind doch von dem Stifter der eleatischen Schule, Xenophanes (566 — 475) und seinen Schülern keine Leistungen in dieser Wissenschaft bekannt. Diese Schule leitete den Skepticismus ein. Erwähnung verdient Heraklit aus Ephesus (530 — 470) durch seine Naturansichten, welche, obgleich dem persischen Kreise entnommen, doch von ihm eine

höhere Auffassung erhielten. Anaxagoras aus Klazomenä in Kleinasien (500 — 428) war in Aegypten gewesen und verpflanzte zuerst die Philosophie in das eigentliche Griechenland. Er lebte seit 455 in Athen, ein Freund des Perikles und im Umgange mit Sokrates und Euripides. Wegen seiner Lehren als Götterläugner angeklagt, oder vielmehr aus politischen Gründen, floh er von Athen nach Lampsakus, wo er starb. Von ihm weiß man, daß er sich mit Mathematik beschäftiget und über die Quadratur des Kreises nachgedacht habe. Um dieselbe Zeit lebte auch Oenopides von Chios, der mehrere einfache geometrische Aufgaben gelöst haben soll, z. B. einen Winkel zu zeichnen, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist; von einem Punkte eine Senkrechte zu fällen auf eine gerade Linie u. a. m. Doch können hierin seine Verdienste nicht bestanden haben, und selbst diese Aufgaben möchten wohl schon früher gelöst worden sein. Sein Schüler Zenodorus zeigte die Unrichtigkeit der Meinung, welche man früher hatte, daß Figuren von gleichem Umfange auch gleichen Flächeninhalt haben müßten; er ist der erste unter den alten Mathematikern, von welchem noch jetzt eine geometrische Schrift erhalten ist. Solche falsche Sätze waren früher viele verbreitet, und sie bestätigen nur das, was über die erste Entstehung aller mathematischen Sätze in der frühesten Zeit angegeben worden ist. Zu den Philosophen, die sich der Naturbetrachtung im Einzelnen zuwandten, gehört vorzüglich Demokrit von Abdera (460 — 357). Er hat große Reisen in Aegypten und Persien gemacht, lehrte den persischen Dualismus und war ein Anhänger der Atomenlehre, welche unterdessen von Leukipp nach pythagoräischer Anschauungsweise hervorgerufen worden war. Hierher gehört noch Empedokles (495 — 335) aus Agrigent in Sicilien, der gleichfalls auf dem Gebiete der Naturforschung thätig war.

Athen war der Sammelplatz der großen Geister Griechenlands geworden und ragte wie in politischer, so in geistiger Größe über alle Staaten hervor. Durch Klisthenes war (509) die alte Verfassung in der Art verändert worden, daß die Demokratie völlig das Uebergewicht erhielt. Von jetzt an nahm eine größere Zahl athenienfischer Bürger aus allen Klassen Theil an der Staatsverwaltung, während diese früher mehr auf einige einflußreiche Familien beschränkt war. Welche Nachtheile mit dieser Neuerung nun auch sonst verknüpft sein mochten, so trug sie doch wesentlich dazu bei, die Bildung in einen weitern Kreis zu verbreiten. Die Bildung wurde gesucht und dadurch auch die Gelegenheit geschaffen, sie zu erhalten. Ein jeder berechtigte Bürger hatte die Pflicht, dem Staate im Kriege wie im Frieden zu dienen, und mußte sich dazu auch die Kenntnisse und Fähigkeiten erwerben. Es wurde deshalb auch für die allseitige Ausbildung des Geistes wie des Körpers Sorge getragen. Man muß nun hierbei besonders die Verhältnisse in den griechischen Staaten vor Augen haben. Athen hatte zur Zeit seiner höchsten Macht etwa 21,000 Bürger, 10,000 Schutzverwandte und 400,000 Sklaven. Die meisten Bürger beschäftigten sich nur mit den Staatsangelegenheiten, und ihre Geschäfte und Arbeiten wurden durch die Sklaven besorgt. Die Jugenderziehung hatte nur ein Ziel, sie sollte dem Staate einen Verwalter, dem Heere einen Feldherrn liefern. Die Staatsangelegenheiten gewährten aber nicht immer und nicht Allen eine ausreichende Beschäftigung; so war der reichere Bürger dem Müssiggange hingegeben, da er es unter seiner Würde erachtete, seine Geschäfte selbst zu besorgen. So hatten die Athener Zeit, sich an öffentlichen Orten zu versammeln und nicht bloß über politische, sondern auch über wissenschaftliche Dinge sich zu unterhalten. Archelaus aus Milet (um 450), ein Schüler des Anaxagoras, brachte zuerst den öffentlichen Lehrvortrag von Lampsakus nach Athen. Vor

T Strewicki

ihm verbreiteten sich die philosophischen Ansichten nur durch Mittheilung an Einzelne, er aber trug zuerst an öffentlichen Orten seine Lehren vor. Im Anfange trieb wohl nur die Neuheit der Sache die neugierigen Athener in die Vorträge der Philosophen, doch bald wurden Viele von dem Gegenstande ergriffen, und die Philosophie gewann einen größeren Boden. Die Lehrer waren weder von dem Staate berufen, noch empfingen sie für ihre Vorträge Belohnungen von den Zuhörern; dieß würde die Sache zu einem Geschäfte herabgewürdiget und den Gelehrten zum Geschäftsmanne gestempelt haben. Die Philosophen hatten also keine andere Triebfeder, als die Begeisterung für die Sache und den Beifall ihrer Zuhörer. Natürlich verband sich mit diesen Vorträgen die Beredsamkeit, an welche der Athener durch das öffentliche Leben schon gewöhnt war: die Zuhörer mußten gefesselt, überzeugt, hingerissen werden. Wenn man sich an dem Bilde erfreut, wie eine ganze freie Bevölkerung mit den Wissenschaften sich beschäftiget und den Vorträgen eines Mannes folgt, der über die höchsten Dinge seine Ansichten entwickelt, so darf man nicht vergessen, daß hinter diesen Zuhörern eine zwanzigfach größere Anzahl stand, die weder hieran, noch überhaupt an einer freien Thätigkeit theilnehmen konnten. Aber auch die athenienſischen Bürger waren bei weitem nicht alle im Stande, auf diese Weise zu leben; nur die reicheren konnten ungehindert sich dem Staate und den Wissenschaften hingeben und vermochten allein an allen derartigen öffentlichen Vorgängen Theil zu nehmen, wozu sie auch durch eine sorgfältige Erziehung befähiget waren, während der arme Bürger seine Zeit dem nothwendigen Erwerbe widmen mußte. Dieses Verhältniß wurde geändert, als Perikles, die Demokratie zu seinen Zwecken begünstigend, die Versäumniß im öffentlichen Dienste bezahlen ließ und auch beim Heere den Sold einführte, wodurch der arme Bürger nicht allein keinen Schaden erlitt, sondern seine Theilnahme am öffentlichen Dienste sogar eine Quelle des Erwerbes wurde. Athen war durch die Perserkriege und durch seinen Handel mächtig und reich geworden, asiatische Verschwendung und Ueppigkeit trat an die Stelle der frühern Einfachheit. Die Reichen wurden übermüthig, der bezahlte Pöbel unverschämt, Alle waren genußsüchtig im höchsten Grade. Aus dem Staatsschatze wurden Summen ausgesetzt für öffentliche Vergnügungen, an welchen der Unvermögende unentgeltlich Theil nehmen konnte. Eine allgemeine Verfeinerung, aber auch eine Verweichlichung und Verschlechterung wurde dadurch hervorgerufen, Kunst und Poesie, Musik und Gesang, selbst die Wissenschaften waren mehr Geisteskitzel als Bildungsmittel, und eine physische und geistige Liederlichkeit verbreitete sich immer mehr. Die Bildung und die Wissenschaften wurden ein Haupthebel zur Erreichung persönlicher Zwecke, und nahmen daher auch die Form an, welche sie hierzu tauglich machte. Die Philosophie bewegte sich immer noch in den alten Dichtungen, und obgleich sie theilweise schon eine höhere Form angenommen hatte, konnte sie doch keine Befriedigung gewähren, weil sie keine wissenschaftliche Begründung hatte. Dieß führte somit zur Skepsis. Nebenher liefen die Bestrebungen zur Begründung einer empirischen Naturwissenschaft, begünstiget durch das Studium der Mathematik, welche ihrerseits, ihrer Natur nach, die Skepsis fördern mußte. Diese nun, verbunden mit jener Bildung, oder vielmehr Abrichtung, welche nur zur Erreichung selbstsüchtiger Absichten erworben ward, erzeugte das, was man die Sophistik nannte.

Als Mathematiker ausgezeichnet, etwa um 450, war Hippokrates von Chios; er trieb zuerst Handel zur See, hatte aber so wenig Anlagen für seinen Beruf, daß er auf die gröbste Weise betrogen wurde, wodurch er in seinen Verhältnissen bedeutend herunter kam. Um sich wieder etwas aufzuhelfen, ging

er nach Athen und lernte daselbst zum erstenmale die Geometrie kennen, welcher er sich nunmehr ganz hingab. Den gewandten Griechen mußte ein Mann, der so wenig auf sein Geschäft sich verstand, als sehr einfältig erscheinen; er zeigte aber bald, daß man ein schlechter Kaufmann sein könne, dabei aber doch ein denkender Kopf, denn er wurde einer der ausgezeichnetsten Geometer. Er stellte zuerst die vereinzelten Sätze zusammen und schrieb Elemente der Geometrie, welche zu ihrer Zeit sehr geschätzt waren, später aber durch die Elemente des Euklides verdunkelt wurden und in Vergessenheit geriethen. Besonders berühmt geworden ist er aber durch die Quadratur seiner mondförmigen Figuren. Er zeigte nämlich, daß, wenn man über den Seiten eines rechtwinkeligen Dreieckes Halbkreise zeichnet, wobei der auf der Hypotenuse nach innen über den rechten Winkel gehen muß, die zwei Monde, welche hierdurch entstehen, zusammen so groß sind, als das Dreieck; daraus folgt weiter, daß, wenn das Dreieck gleichschenkelig ist, der eine Mond gleich ist der Hälfte des Dreieckes, also einem andern gleichschenkeligen Dreiecke. Dieß war das erste Beispiel der Zurückführung eines Flächenraumes, gebildet von krummen Linien, auf eine Figur von geraden Linien umschlossen. Der Beweis des Hippokrates erfordert eine Verallgemeinerung des pythagoräischen Lehrsatzes, nämlich den Satz: Wenn man über den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks ähnliche Figuren zeichnet, so sind die beiden Figuren über den Katheten zusammen so groß, wie die Figur über der Hypotenuse. Ueberhaupt zeigt die Geometrie jetzt schon eine bedeutende Entwickelung, was auch durch das Folgende seine Bestätigung erhält. Um diese Zeit war schon die Lösung eines Problems gestellt worden, welches noch lange die größten Geometer beschäftigte und über welches auch Hippokrates nachgedacht hat. Man sollte die Seite eines Würfels finden, welcher doppelt so groß ist, als ein gegebener Würfel. Hippokrates soll nun gefunden haben, daß es bei der Auflösung darauf ankomme, zu zwei gegebenen geraden Linien zwei mittlere Proportionallinien zu finden, wovon die eine die Seite des gesuchten Würfels ist. Sind a und b die gegebenen Linien und x und y die mittleren Proportionalen, so muß sein $a : x : y : b$; also zuerst $a : x = x : y$ und dann $x : y = y : b$; mithin $x^2 = a y$ und $y^2 = b x$, woraus sich ergiebt $x^3 = a^2 b$, und wenn $b = 2 a$ ist, $x^3 = 2 a^3$. Ist die Seite des gegebenen Würfels a und des gesuchten x, so verlangt die Aufgabe $x^3 = 2 a^3$, was also mit dem vorhergehenden zusammenfällt. So weit war nun Hippokrates gekommen, aber die Auflösung selbst, d. h. die Konstruktion der Seite x, konnte er noch nicht geben. Das unglückliche Talent dieses Mannes für den Handel sollte ihn auch in seiner neuen Laufbahn nicht verlassen; er war der erste, der, wahrscheinlich durch seine Umstände gedrängt, für Geld unterrichtete, und wurde deßwegen von der pythagoräischen Schule, welcher er sich angeschlossen, verstoßen.

Die Sophisten waren in dieser Beziehung weniger empfindlich: sie übernahmen es für Geld, durch ihren Umgang und Belehrung, Andre zu unterrichten und, wie sie sagten, besser zu machen. Sie gehörten sicher zu den bestunterrichteten und gewandtesten Männern ihrer Zeit; aber aus ihrer ganzen Richtung geht hervor, daß sie zur Erweiterung der Wissenschaften nichts beitragen konnten, und daß ihnen eben so wenig eine eigenthümliche Speculation angehörte. Die berühmtesten Sophisten waren erst Philosophen der pythagoräischen Schule, dann Skeptiker und wandten sich von diesem Standpunkte der Sophistik zu. Dieses Verhältniß bezeichnet einen Uebergang. Bis jetzt war in der Philosophie ein Hauptsatz die Einheit von Gott und Natur, welchen das ganze Wesen des griechischen Volkes schon negirte; die Sophisten stellten diesen Satz in Zweifel, und die nächste Philosophie sprach die Trennung aus. Die Sophisten

schloßen sich deßhalb auch dem Volke näher an, sie waren Anhänger der Demokratie, während die Philosophen der Aristokratie sich zuneigten. Dieses Verhältniß wurde nun besonders dadurch begünstiget, daß die Philosophen alle aus der ägyptischen Quelle schöpften und, wenn sie auch persische Ansichten einmengten, doch immer Verehrer der ägyptischen Einrichtungen blieben. Am hervorragendsten war Sokrates, ein Lehrer und Freund des Plato. Als Demokrat von dem Aristokraten Aristophanes vergeblich gegeißelt, wurde er später, bei veränderter Richtung, als Aristokrat von den Demokraten zum Tode verurtheilt.

Zweite Periode. Von dem Aufblühen der höhern Geometrie bis zur alexandrinischen Schule.

Eine neue Zeit eröffnete Plato aus Athen (429—347) aus einem vornehmen Geschlechte, gleich berühmt als Philosoph wie als Mathematiker. Er war ein Schüler des Sokrates (409) und entfernte sich auch nach dessen Tode (399) aus Athen. In diese Stadt zurückgekehrt, errichtete er (397) daselbst eine sogenannte philosophische Schule, die akademische genannt, zugleich mit politischen Tendenzen. Er machte verschiedene Reisen nach Aegypten, Phönizien und Italien, und war zweimal in Sicilien. Mit den Pythagoräern unterhielt er Verbindungen und neigte sich, wie diese, der Aristokratie zu. Als Philosoph sprach er die Trennung von Gott und Natur aus, was eigentlich schon von Sokrates begonnen wurde. Es gibt, so lehrte er, eine geistige Gottheit und eine ungeschaffene ewige Materie. Alles Folgende ist ein Gemenge ägyptisch-persischer Lehren meist auf pythagoräischer Grundlage. So beseitigte Plato das Chaos der Aegypter und die ursachlose Gestaltung der Welt, ebenso die mißverstandene persische Lehre der Schöpfung der Welt aus Nichts.

Es ist bereits früher schon angegeben worden, welche Methode die Griechen in der Geometrie befolgten und welche Form sie dieser Wissenschaft gegeben und naturgemäß ihr geben mußten. Diese synthetische Methode besteht ihrem Wesen nach darin, daß man von einer bereits als wahr erkannten Sache ausgeht und durch Folgerung aus Folgerung zu einer gesuchten Sache gelangt. Will man z. B. beweisen, daß im Parallelogramme je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind, so ist die Behauptung die zu suchende Sache. Die Voraussetzung ist die Parallelität der gegenüberliegenden Seiten. Man zieht eine Diagonale, hierdurch entstehen Wechselwinkel und die Gleichheit derselben ist die bekannte Sache, von welcher man ausgeht. Aus der Gleichheit einer Seite und der beiden anliegenden Winkel in den entstandenen Dreiecken schließt man jetzt auf die Congruenz derselben, und von dieser auf die Gleichheit der entsprechenden Seiten als der gesuchten Sache. Man sieht, daß die Synthesis mit der aphoristischen Form nichts zu thun hat, daß eben so gut die genetische Form gewählt werden kann, und daß der ganze Unterschied allein darin besteht, daß bei jener der Satz als Behauptung voransteht, während er bei dieser als Ergebniß der Forschung zuletzt folgt. Es ist ferner deutlich, daß die erste Form der Jugend der Wissenschaft angemessener war; denn durch die gleich Anfangs ausgesprochene Behauptung ist zugleich das Ziel schon gesetzt, zu welchem man gelangen will, die Voraussetzung tritt mehr hervor, die Konstruktion wird leichter gefunden. Die genetische Form setzt ein natürliches System und die zu einem gewissen Grade schon entwickelte Wissenschaft voraus. Das umgekehrte Verfahren wurde oft nöthig, wenn die Beweise zu gegebenen Sätzen gefunden werden sollten, z. B. ist A wahr, so muß B wahr sein, ist B wahr, so muß C wahr sein; nun ist aber C wahr, folglich muß auch A wahr sein. Man

nannte dies die analytische Methode, und ihr Wesen bestand darin, daß man die gesuchte Sache als gegeben betrachtete und von Folgerung zu Folgerung überging, bis man die gesuchte Sache als wahr erkannte. Bei der Auflösung von Aufgaben leistet sie besonders gute Dienste und ist deßhalb von großem Werthe. Plato war es, der diese Methode in Schwung brachte. — Wie bei den Pythagoräern, so war auch bei Plato die Mathematik die Grundlage aller höheren Bildung; denn einmal war sie die erste strenge Schule für ein folgerichtiges Schließen und Denken und dann auch, bei der höheren Ausbildung der Wissenschaften überhaupt, eine nothwendige Hülfswissenschaft geworden.

Er schloß daher jeden von seinem Unterrichte aus, der in der Geometrie nicht erfahren war, indem er voraussetzen mußte, daß ein solcher weder die geistige Kraft, noch diejenigen Hülfsmittel mitbringe, welche nöthig waren, seine Lehren zu verstehen. Die Mathematik wurde daher durch die platonische Schule ungemein gefördert, und so erweitert, daß sie eine ganz andere Gestalt gewann. Von Plato selbst besitzen wir zwar keine mathematischen Schriften, es wird ihm aber die Einführung höchst wichtiger Zweige der Geometrie zugeschrieben, und selten soll ein Tag vorübergegangen sein, an welchem er nicht seinen Schülern irgend einen neuen Satz mitgetheilt habe. Zuerst schrieb man ihm, wie erwähnt, die Erfindung der analytischen Methode zu, was nach dem oben Angeführten wohl nur so viel heißen kann, daß er von dieser Methode zuerst, bei seinen Forschungen, eine ausgedehnte und systematische Anwendung gemacht habe. Wichtiger sodann ist, daß man auf Plato die Aufnahme der Kegelschnitte in die Geometrie zurückführt, ein Erzeugniß, was nie da war, zu keiner Zeit und bei keinem Volke, und welches wir allein den Griechen verdanken. An die Kegelschnitte knüpft sich eigentlich beinahe die ganze Mathematik, und ihr erstes Auftreten, an sich schon Epoche machend in der Geschichte der geistigen Entwickelung, wird noch wichtiger durch die Bedeutung, welche diese Linien in der Natur haben.

Aus einem geometrischen Satze weiß man, daß alle Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe auch gleichen Flächeninhalt haben. Wenn man sich nun die Frage stellt, wo liegen die Scheitel aller Dreiecke über derselben Grundlinie und von gleichem Flächeninhalte mit einem gegebenen, so wird man sogleich antworten können: in der geraden Linie, welche parallel der Grundlinie, durch den Scheitel des gegebenen Dreieckes geht. Diese Parallellinie heißt der geometrische Ort, der Scheitel aller Dreiecke über derselben Grundlinie von gleichem Inhalte. Eben so ist der geometrische Ort aller Dreiecke über derselben Grundlinie, welche den gleichen Winkel im Scheitel haben, ein Kreis. Wenn man sich nun die Aufgabe stellt, ein Dreieck zu finden, welches eine gegebene Grundlinie und einen gegebenen Winkel im Scheitel hat, so gibt es hier nicht eine, sondern eine unendliche Menge von Auflösungen, aber alle Scheitel müssen auf dem Umfange des Kreises liegen, welcher die Grundlinie zur Sehne hat und den gegebenen Winkel am Umfange faßt. Solchen unbestimmten Aufgaben entspricht eine ganze Reihe von Punkten, welche in ihrer Aufeinanderfolge eine gerade oder eine krumme Linie bilden, und diese nennt man alsdann den geometrischen Ort. Wenn man die einfache Forderung stellt, einen Punkt zu finden, welcher von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung habe, so wird man aus dem gegebenen Punkte, als dem Mittelpunkte mit der gegebenen Entfernung als Radius, einen Kreis beschreiben, und jeder Punkt des Kreises wird die verlangte Eigenschaft haben. Fügt man dieser Bedingung noch die weitere bei, daß der gesuchte Punkt auch noch von einem anderen gegebenen Punkte eine andere Entfernung habe, so löst man sie auf

gleiche Weise. Der gesuchte Punkt muß demnach sowohl auf dem ersten Kreise als auch auf dem anderen liegen, folglich kann er nur da liegen, wo beide Kreise sich scheiden. Die Aufgabe, einen Punkt zu finden, welcher von zwei gegebenen Punkten gegebene Entfernungen hat, läßt sich also durch die Konstruktion geometrischer Oerter lösen, der gesuchte Ort ist der Durchschnitt der beiden Linien. Man sieht an diesen einfachen Beispielen, daß solche Untersuchungen schon frühe da gewesen sein müssen, und daß eine Menge von Aufgaben durch die Konstruktion von geraden Linien und Kreisen gelöst wurden. So weit war man nun auch zur Zeit des Plato gekommen, aber es wurden gewiß auch schon vor seiner Zeit Aufgaben gestellt, welche die vorhandenen Hülfsmittel überstiegen und nicht durch gerade Linien und Kreise konstruirt werden konnten. Dafür gibt das schon oben erwähnte Problem des Hippokrates von der Verdoppelung eines Würfels ein Beispiel, und solche Fälle waren es, welche die Erfindung der Kegelschnitte herbeiführten. Da die Griechen, in ihrer wissenschaftlichen Mathematik, keine andere Art der Darstellung zuließen, so wurden die unbekannten Größen nur durch Konstruktion anschaulich ausgedrückt; die Art, wie dies geschah, bestand aber in Folgendem.

Irgend eine, von geraden Linien begränzte Fläche kann man in ein Dreieck und dieses in ein Rechteck oder ein Parallelogramm verwandeln; es kann dieses auf unzählige Arten geschehen; ist aber die eine Seite des Rechtecks und beim Parallelogramm außerdem noch ein Winkel gegeben, so ist die Aufgabe bestimmt, also auch das gesuchte Viereck. Eine der unentbehrlichsten Forderungen der griechischen Geometrie nun war, an eine gegebene gerade Linie ein Rechteck so anzulegen, daß der Inhalt desselben einer gegebenen beliebigen Fläche A gleich sei. Sollte die gesuchte Figur ein Parallelogramm von gegebenem Winkel sein, so war dieser Fall leicht auf den vorigen zurückzuführen und kann hier unberücksichtiget bleiben. Dieses Geschäft, eine Figur an eine Gerade als ein solches Viereck anzulegen oder anzustrecken, heißt bei Plato parateinein, bei den späteren Geometern paraballein; es entspricht, in unserer arithmetischen Auffassung, der Auflösung einer Gleichung vom ersten Grade. Ist A der Inhalt der gegebenen Fläche, a die gegebene Seite des gesuchten Rechteckes und x die unbekannte andere Seite, so ist die Bedingung $a\ x = A$, die Konstruktion gibt x; sie ist also eine geometrische Methode zur Auffindung der Unbekannten. So wie man eine Figur in ein Rechteck verwandeln kann, so kann man dieses wieder in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandeln, also auch die Figur in ein Quadrat. Ist wieder A die gegebene Fläche und x die Seite des Quadrates, also x^2 der Inhalt, so ist die Bedingung $x^2 = A$. Diese zweite Konstruktion gab denn auch die Auflösung einer reinen Gleichung des zweiten Grades; man nannte das Verfahren dabei tetragonizein. Das Anstrecken und das Quadriren (in ein Quadrat verwandeln) waren also die zwei wichtigsten Hülfsmittel und entsprachen unserer Auflösung der Gleichungen des ersten und der reinen Gleichungen des zweiten Grades. Das Anstrecken wurde aber durch angefügte Bedingungen noch erweitert und führte selbst zur geometrischen Auflösung der gemischten Gleichungen des zweiten Grades. Wenn eine Gerade a und eine Fläche A gegeben sind, so kann verlangt werden, die Fläche A so an die Gerade a als Rechteck anzustrecken, daß dieses sich nicht über die ganze Linie ausdehnt, sondern noch ein Rechteck übrig bleibt, für welches noch besondere Bedingungen festgesetzt werden müssen. Die einfachste Bedingung ist, wenn das Uebrigbleibende ein Quadrat sein soll; in diesem Falle haben Rechteck und Quadrat die gleiche Höhe und die Summe der Grundlinien beider Vierecke ist gleich a. Ist nun die Basis des Rechteckes $= x$, so ist die des Quadrates $a - x$, und dies ist

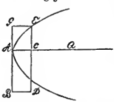
zugleich die Höhe; man hat daher die Bedingung $x(a - x) = A$ oder $x^2 - ax = -A$, also eine gemischte Gleichung vom zweiten Grade. Soll das übrigbleibende Viereck ein Rechteck sein, welches einem gegebenen Rechtecke ähnlich, so seien m und n Höhe und Grundlinie des gegebenen und h und $a - x$ die des gesuchten Rechteckes, alsdann ist $h : a - x = m : n$ oder $h . n = m(a - x)$, aber auch $h . x = A$, daher $m x (a - x) = n A$ oder $x(a - x) = \frac{n}{m} A$. Dieser Fall ist also dem Wesen nach von dem vorhergehenden nicht verschieden und führt auf dieselbe Art von Gleichungen. An diese Konstruktionen reiht sich noch eine vierte von gleicher Art. Eine Fläche A und eine Gerade a sind gegeben; man soll die Fläche an die Gerade als Rechteck so ausstrecken, daß dieses die Gerade um ein gewisses Rechteck überragt, welches noch besonderen Bedingungen unterworfen ist. Nimmt man auch hier den Fall, daß das Ueberragende ein Quadrat, so ergibt sich auf dieselbe Art die Gleichung $x(a + x) = A$ oder $x^2 + ax = A$. Die Auflösung dieser Aufgaben, d. h. die Konstruktion der Unbekannten, war Plato bekannt, wie aus einer vielbesprochenen Stelle eines seiner Dialoge (Menon) unzweifelhaft hervorgeht. Die Griechen waren also schon aller Aufgaben mächtig, welche, nach unserem Sprachgebrauche, den zweiten Grad nicht übersteigen, sie kannten die Gerade und den Kreis als geometrische Oerter und ihre Anwendung, aus den Durchschnitten derselben die Auflösung bestimmter Aufgaben herzuleiten. So wie nun durch Plato und seine Schule die Geometrie überhaupt einen ungewohnten Aufschwung nahm, so müssen wir auch annehmen, daß diese schon vorhandene Keime jetzt zur Entwickelung gelangten und als Methoden erst ausgebildet wurden. Die Griechen gaben zwei Forderungen als unmittelbar ausführbar und möglich zu, eine gerade Linie und einen Kreis zu zeichnen: was auf die Konstruktion dieser beiden Linien zurückgeführt werden konnte, war, nach ihrer Ansicht, auflösbar. Diese Fälle sind nun im Obigen berührt worden, und was aufgelöst werden konnte, ließ sich auf eine der vier Konstruktionen oder die geometrischen Oerter zurückführen.

Hippokrates hatte bereits gefunden, daß, um das Problem von der Verdoppelung des Würfels zu lösen, man im Stande sein müsse, zu zwei gegebenen Geraden a und b zwei mittlere Proportionalen x und y zu finden, so daß $a : x : y : b$ wäre. Dieß erfordert nun, daß $a : x = x : y$ und $x : y = y : b$ oder daß $x^2 = a y$ und zugleich $y^2 = b x$. Beide Ausdrücke sind von derselben Form, enthalten die gleiche Forderung: an eine Gerade a oder b ein Rechteck so anzustrecken (paraballein), daß der Inhalt gleich sei einem Quadrate x^2 oder y^2. Nun ist aber die Fläche, welche angestreckt werden soll, selbst unbekannt; jeder bestimmten Fläche entspricht aber ein bestimmter Ort; einer Reihe auf einander folgender Flächen entspricht eine Reihe auf einander folgender Punkte; die beiden Ausdrücke stellen geometrische Oerter derselben Art dar, deren Durchschnitt die Linien x und y gibt. Der hier entstandene geometrische Ort ist aber keine Gerade und kein Kreis, sondern eine andere krumme Linie, welche man ihrer Eigenschaft wegen Parabel (Parabole) genannt hat. Menächmus hat später diesen Weg zur Auflösung des Problems angegeben, aber die Hauptschwierigkeit bestand eben darin, die krumme Linie zu zeichnen; man konnte nur, wie noch jetzt, einzelne Punkte bestimmen und mußte diese dann aus freier Hand verbinden, während Gerade und Kreis in einem Zuge fort gezeichnet werden können. Ein anderes Beispiel der Art ist, einen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen; diese Aufgabe liegt so nahe und sieht so einfach aus, daß man frühe schon darauf kommen mußte; sie war aber mit ähnlichen Schwierigkeiten verbunden und beschäftigte die größten Geometer. Bei

einer gewissen Klasse von Aufgaben wurde man auf neue Forderungen geführt: man sollte eine gegebene Fläche als Rechteck an eine gegebene Gerade so anstrecken, daß ein Rechteck überbleibe, oder die Gerade überrage, so daß das zurückbleibende oder überstehende Viereck dem verlangten Rechtecke ähnlich ist. Sind die gegebenen Größen wieder A und a, und die Grundlinie und Höhe des gesuchten Rechteckes x und y, so sind diese Größen für das zurückbleibende Rechteck y und a — x; man hat nun die zwei Bedingungen $x \cdot y = A$ und $x : y = y : a - x$ oder $y^2 = x\,(a - x)$, woraus folgt: $x \cdot \sqrt{x(a-x)} = A$. Für den Fall, daß das Rechteck die Gerade überragen soll, sind die Bedingungen $x \cdot y = A$ und $x : y = y : x - a$ oder $y^2 = x\,(x - a)$; daher: $x \sqrt{x\,(x - a)} = A$. Die Konstruktion der unbekannten x hängt nun auf das Innigste mit den Kegelschnitten zusammen, und so mußte man allmälig auf diese Kurven geleitet werden.

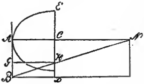
Es sei A Q eine unbegränzte Gerade und A ihr Anfangspunkt; durch diesen ziehe man G B senkrecht zu A Q und schneide darauf $AB = p$ eine gegebene Länge ab. Alsdann nehme man beliebig A G als Seite eines Quadrates und strecke an A B ein Rechteck, welches gleich diesem Quadrate ist, was nach einem bekannten Satze durch die Konstruktion eines Kreises, welcher A Q in C schneidet, geschehen kann; nunmehr ist A C die andere Seite des gesuchten Rechteckes. Man zeichne Rechteck A D, verlängere D C und errichte in G eine Senkrechte; diese Linien schneiden sich in E; da nun $EC = AG$, so ist: Quadrat EC = Rechteck AD, oder $EC^2 = AB \cdot AC$. Nimmt man nun nach und nach andere A G, und wiederholt damit dieselbe Konstruktion, so gelangt man zu andern A C und durch beide Linien zu einer Reihe auf einander folgender E. Alle diese E haben aber die gleiche Eigenschaft. Bezeichnet man überhaupt irgend ein E C mit y und das zugehörige A C mit x, so ist für alle $y^2 = p \cdot x$. Die Folge der Punkte E stellt einen geometrischen Ort dar, eine krumme Linie, welche, wie oben bemerkt, Parabel genannt wird; man kann auch die Konstruktion umkehren, A C annehmen und alsdann dazu C E zeichnen.

Fig. 1.



Es sei $AN = a$ eine gegebene Gerade und A der Anfangspunkt, und durch diesen gehe senkrecht $AB = p$; man ziehe BN und nehme C beliebig an, durch diesen Punkt gehe E C D senkrecht zu A N, welche B N in H schneidet, man ziehe G H senkrecht zu A B, so entsteht Rechteck A H; zu diesem suche man das gleich große Quadrat und trage dessen Seite von C auf E. Man hat also hier zu einem Quadrate E C ein Rechteck A H, welches an eine Gerade A B so angestreckt ist, daß ein anderes Rechteck G D überbleibt, welches dem Rechtecke B N ähnlich ist. Bestimmt man auf gleiche Weise andere Punkte E, so bilden diese in ihrer Folge einen geometrischen Ort, eine krumme Linie, welche Ellipse genannt wird, von elleipein, übrig bleiben. Zuerst ist hier Quadrat E C = Rechteck A H oder $CE^2 = AG \cdot AC$, sodann ist $GB : AB = AC : AN$ oder $GB : p = AC : a$, also $a \cdot GB = p \cdot AC$. Man hat ferner $AG = AB - GB = p - \frac{p}{a} \cdot AC$, daher: $CE^2 = AC\left(p - \frac{p}{a} \cdot AC\right)$ oder CE^2

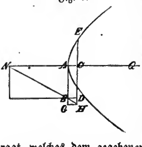
Fig. 2.



$= p \cdot AC - \frac{p}{a} \cdot AC^2$. Setzt man nun wieder irgend ein $CE = y$ und das zugehörige $AC = x$, so ist $y^2 = p \cdot x - \frac{p}{a} \cdot x^2$.

Es sei zuletzt $AN =$ a eine gegebene Gerade, AQ ihre Verlängerung, $AB = p$ im Anfangspunkte senkrecht auf AN. Man ziehe NB und verlängere sie unbestimmt nach H; durch einen beliebigen Punkt C ziehe man ECH senkrecht auf AQ, welche NB in H schneidet; man ziehe HG senkrecht auf AB, so entsteht das Rechteck AH; zu diesem Rechtecke suche man das gleich große Quadrat und trage dessen Seite von C nach E, so wird hierdurch der Punkt E bestimmt. Durch diese Zeichnung wird an eine gegebene Gerade AB ein Rechteck AH angestreckt, welches einem Quadrate gleich ist, doch so, daß dieses Rechteck die Gerade AB um ein anderes Rechteck BH überragt, welches dem gegebenen Rechtecke BN ähnlich ist. Es entsteht hier auf gleiche Weise eine andere krumme Linie, welche Hyperbel (hyperbole, von hyperballein, übertreffen, überragen) genannt wird. Man setze $AC = x$, $CE = y$, so ist $y^2 = AG \cdot AC = AG \cdot x$; nun ist aber $BG : GH = AB : AN$ oder $BG : x = p : a$, also $BG \cdot a = p \cdot x$; ferner ist $AG = AB + BG = p + \frac{p}{a} x$, somit: $y^2 = x \cdot \left(p + \frac{p}{a} x\right)$ oder $y^2 = px + \frac{p}{a} x^2$.

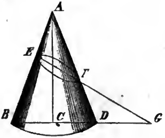
Fig. 3.



Der Kreis gehört gleichfalls in die Reihe dieser Kurven, und zwar ist er eine Ellipse von besonderer Beschaffenheit, bei ihm ist nämlich $AB = AN$, hierdurch wird das übrigbleibende Rechteck ein Quadrat und daher die Gleichung $y^2 = px - x^2$.

Wir haben diese Konstruktionen hier erwähnt und sie ihrer Wichtigkeit wegen in die heutige algebraische Sprache übersetzt, weil die angeführte Stelle in Plato's Menon zeigt, daß sie in dieser Zeit nicht allein schon bekannt, sondern unter den Gelehrten auch verbreitet gewesen sein müssen, indem sonst nicht eine derselben so allgemein als Beispiel hätte hingestellt werden können. Eben so belehrt uns diese Stelle über die schon verbreitete Anwendung der analytischen Methode auch außerhalb des Gebietes der Mathematik und zuletzt, daß man schon gewohnt war, zu untersuchen, welche Bedingungen die gegebenen Größen erfüllen müssen, damit die vorgelegte Aufgabe überhaupt möglich sei. Hieraus ergibt sich nun, daß auch hier wieder von einer eigentlichen Erfindung der Kegelschnitte wohl nicht die Rede sein kann; solche Dinge werden, wie die Geschichte zeigt, überhaupt nicht mit einem Male erfunden, sondern nur, daß von der platonischen Schule dieser Gegenstand aufgenommen und mit dem glücklichsten Erfolge kultivirt worden ist. Wie viel nun aber schon vorhanden war und wie dieses Material zusammengestellt und vermehrt wurde, wird wohl kaum je mehr unterschieden werden; aber schon ein älterer Freund Plato's und ein Mitglied seiner Schule, Aristäus, soll unter Anderem fünf Bücher über die Kegelschnitte geschrieben haben, was für eine bereits bedeutende Entwickelung spricht. Wahrscheinlich ist jetzt erst die Ableitung dieser Kurven aus dem Kegel gefunden und sie sind von der platonischen Schule als Kegelschnitte in die Wissenschaft eingeführt worden.

Fig. 4.



Es stelle ABD einen geraden Kegel dar, dessen Grundfläche ein Kreis ist. Man verbinde den Mittelpunkt C der Grundfläche BD mit A, so ist AC senkrecht zu BD. Durch die Achse AC denke man sich eine Ebene gelegt, so wird diese senkrecht auf BD und der Schnitt ein Dreieck ABD sein, welches im gegenwärtigen Falle gleichschenkelig ist, AB = AD. Man nennt dieses Dreieck das Achsendreieck; der Winkel BAD sei zuerst ein spitzer Winkel. Man schneide nun den Kegel durch eine Ebene, welche senkrecht auf das Achsendreieck und zur Seite AB ist, so ist die Fläche des Schnittes durch den Kegel eine Ellipse. Die hier gemachten Beschränkungen in Bezug auf den Kegel und die Lage der Schnittfläche sind nicht nothwendig, die Sache wurde aber von den Griechen zuerst so betrachtet.

Fig. 5.

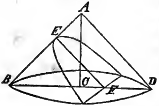
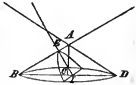


Fig. 6.



Ist unter denselben Voraussetzungen der Winkel BAD Fig. 5 des Achsendreiecks ein rechter, so gibt der Schnitt eine Parabel; und ist zuletzt dieser Winkel stumpf Fig. 6, so entsteht eine Hyperbel. Jeder Schnitt, welcher zur Grundfläche parallel ist, erzeugt einen Kreis, welcher also gleichfalls zu den Kegelschnitten gehört. Die Ellipse hieß wegen dieser Erzeugung ursprünglich Schnitt des spitzwinkeligen Kegels, die Hyperbel Schnitt des stumpfwinkeligen Kegels und die Parabel Schnitt des rechtwinkeligen Kegels. Man muß sich die Kegel in der Richtung AC unbegränzt denken und außerdem nach oben hin, durch Verlängerung der Seiten, wiederholt; hierdurch wird in Bezug auf die Ellipse nichts geändert, der Schnitt kann nicht mehr den oberen Kegel erreichen, und diese Linie schließt, wie der Kreis, einen Raum ein. Bei der Parabel erreicht der Schnitt auch nicht den oberen Kegel, indem die Schnittfläche einer Seite parallel geht; sie tritt aber auch nicht mehr aus dem unteren Kegel heraus, die Zweige kehren nicht mehr zu sich zurück und laufen in das Unendliche fort. Der Hyperbelschnitt geht durch beide Kegel und läuft in beiden fort, diese Kurve besteht daher aus zwei getrennten Theilen und läuft mit vier Aesten in das Unendliche aus. Alle Kegelschnitte können an ein und demselben geraden oder schiefen Kegel, dessen Basis ein Kreis ist, erzeugt werden, wenn man die angegebenen Verhältnisse berücksichtiget; eine Parabel entsteht nur, wenn die Schnittfläche parallel einer Seite und eine Hyperbel, wenn sie beide Kegel trifft. In Bezug auf die Entstehungsweise der Kegelschnitte bezeichnete man die drei Kurven als körperliche Oerter im Gegensatze zur geraden Linie und dem Kreise, welche man sich in der Ebene erzeugt dachte und deßhalb ebene Oerter nannte.

Zur Lösung des Problems von der Verdoppelung eines Würfels soll Plato ein Instrument erfunden haben, durch welches die Konstruktion ausgeführt werden konnte. Der Gedanke war sehr richtig und zeugt keineswegs von geringen Kenntnissen in der Geometrie, denn wenn wir Instrumente hätten, mit welchen

die Kegelschnitte eben so richtig und leicht gezeichnet werden könnten, wie der Kreis mit dem Zirkel, so würden alle Probleme, welche zu ihrer Lösung die Konstruktion dieser Kurven verlangen, eben so gut der Elementargeometrie anheimfallen, wie die, zu welchen die Zeichnung des Kreises nöthig ist. Hierin liegt auch der Grund der damals eingeführten Eintheilung der Geometrie in die elementare und in die transcendente Geometrie; die erste umfaßte die ebenen Figuren von geraden Linien begränzt, so wie den Kreis, und die Körper von Ebenen umschlossen, nebst Cylinder, Kegel und Kugel; unter der zweiten begriff man die Kegelschnitte, überhaupt alle anderen krummen Linien außer dem Kreise und die übrigen krummflächigen Körper. Die Arithmetik scheint in der platonischen Schule gleichfalls kultivirt worden zu sein, wenigstens führt man auf Plato eine Vorschrift zur Bildung zweier Zahlen zurück, deren Quadratsumme wieder ein Quadrat ist. Man nehme irgend eine gerade Zahl als erste; die Hälfte derselben erhebe man ins Quadrat, so ist die zweite um 1 kleiner und die dritte um 1 größer als dieses, und die Quadratsumme der beiden ersten gibt das Quadrat der dritten.

Die platonische Schule war reich an ausgezeichneten Mathematikern und eine Erfindung drängte die andere; dabei kennen wir ihre Arbeiten nur aus allgemeinen Andeutungen. Aristäus ist oben schon erwähnt worden, eben so Menächmus, der zur Auffindung der zwei mittleren Proportionalen, oder der Verdoppelung des Würfels zwei Parabeln mit gemeinschaftlichem Scheitel und zu einander senkrechten Achsen anwandte; eine andere Lösung fand er durch die Konstruktion einer Parabel und einer Hyperbel. Sein Bruder Dinostratus beschäftigte sich mit der Aufgabe, einen Winkel nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen, und erfand dazu eine neue Kurve, die Quadratrix. Diese Erfindung wird aber auch dem Hippias, einem Geometer und Philosophen zur Zeit Plato's, zugeschrieben. Eudoxus aus Knidus soll zur Verdoppelung eines Würfels eine neue Kurve, verschieden von den Kegelschnitten, erdacht haben. Dieser Geometer war der Erfinder des Satzes, daß eine Pyramide der dritte Theil ist eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe, und daß das Gleiche gilt von einem Kegel und Cylinder. Er hat außerdem noch Elemente der Geometrie geschrieben, die Lehre von den Proportionen soll er erweitert haben und von einigen wird ihm das fünfte Buch der Elemente Euklid's zugeschrieben. In diese Zeit fällt wahrscheinlich auch noch die Erfindung der Schneckenlinie durch Perseus.

In Italien war unterdessen die Wissenschaft auch nicht stehen geblieben. Bei den Pythagoräern bildete immer noch die Mathematik den vornehmsten Zweig ihrer Studien; sie kultivirten besonders die Arithmetik, aber ihre Fortschritte können nicht von Bedeutung gewesen sein. Archytas von Tarent, ein Freund und Zeitgenosse Plato's, war Staatsmann, Feldherr und Gelehrter; siebenmal siegten seine Mitbürger unter seiner Leitung im Kriege, und als Gelehrter nahm er eine der höchsten Stellen unter seinen Zeitgenossen ein. Man schreibt ihm die erste Anwendung der Mathematik auf die Mechanik zu und bezeichnet ihn dadurch als den eigentlichen Begründer der wissenschaftlichen Mechanik. Von seinen Leistungen in der praktischen Mechanik wird nur Fabelhaftes erzählt. Er gehörte zu den Geometern, welche sich am ersten mit Erfolg der analytischen Methode bedienten; zur Lösung des Problems von der Verdoppelung des Würfels erfand er eine Linie doppelter Krümmung, das erste Beispiel solcher Kurven. Eine Kurve einfacher Krümmung ist eine solche, deren Punkte sämmtlich in einer Ebene liegen; ist dieß nicht der Fall, wie z. B. bei den Windungen einer Schraube, so ist sie eine Kurve doppelter Krümmung. Das tragische Ende

dieses Mannes berichtet uns Horaz; er litt an der illyrischen Küste Schiffbruch und ertrank.

In der verhältnißmäßig kurzen Zeit von nahezu 300 Jahren hatten also die Griechen ein Geistesprodukt hervorgebracht, von welchem ihre Vorgänger auch nicht einmal eine Ahnung hatten. Von Asien war diese geistige Thätigkeit ausgegangen, sie hatte sich mit Pythagoras nach Unteritalien gewendet und ihren Glanzpunkt im eigentlichen Griechenland in der platonischen Schule erreicht, als schon der allgemeine Verfall begonnen hatte und das nationale Wesen in der Auflösung begriffen war. Plato schließt die Reihe jener großen Männer, denen Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaften gleichsam ein untrennbares Ganzes waren. Von jetzt an sind die Philosophen immer weniger Mathematiker, und diese verstehen immer weniger von der Philosophie, und beide trennen sich immer mehr von der Natur, welche sich ihrerseits von jenen lossagt. So schreitet die Trennung nothwendig fort, die Vereinzelung muß ins Aeußerste gehen, wenn der Zweck des allgemeinen Fortschrittes erreicht werden soll. Für die folgende Entwickelung ist nun Plato's Schüler, **Aristoteles** aus Stagira in Makedonien (384—322), von der größten Bedeutung. Er begab sich in seinem 17ten Jahre mit ärztlicher Vorbildung nach Athen und lebte 20 Jahre im Umgange mit Plato. Nach dessen Tode ging er nach Kleinasien und wurde hier von Philipp II von Makedonien berufen, die Erziehung Alexanders des Großen, der damals 15 Jahre alt war, zu übernehmen (342—334). Hierauf lehrte er zu Athen (334—324), wurde aber nach Alexanders Tode von den Athenern der Gottlosigkeit angeklagt und entfloh, um den Folgen dieser Anklage zu entgehen, nach Chalkis auf Euböa, wo er 322 starb. Obgleich als Mathematiker nicht von Bedeutung, ist Aristoteles doch eine so hervorragende Persönlichkeit und sein Einfluß auf die Folgezeit so groß, daß er hier nicht übergangen werden kann. Er brachte zuerst eine systematische Ordnung in die bis zu seiner Zeit unzusammenhängenden wissenschaftlichen Kenntnisse, er erweiterte bedeutend einzelne Wissenschaften, von anderen war er Begründer. Er bildete den Uebergang in eine neue Periode; das antike Wesen schloß mit ihm ab, die moderne Bildung ward durch ihn eingeleitet. In der Philosophie folgt er dem Grundzuge nach Plato, aber der ganze religiöse Theil fehlt, die Dichtung weicht der Herrschaft des Verstandes, sein ganzes Streben ging auf das Empirische. Zum ersten Male sprach sich jetzt mit Bewußtsein das Bestreben aus, durch Erforschung des Gegebenen in seinem inneren Zusammenhange vom Besonderen auf das Allgemeine zu schließen und so durch die Wirklichkeit zur Wahrheit zu gelangen.

Die verflossenen 300 Jahre gehören zu den merkwürdigsten der ganzen Menschengeschichte. Die Berührungen der Griechen mit Asien und Aegypten waren immer inniger geworden. Den Perserkriegen folgte der Zug Alexanders, welcher der Herrschaft der Achämeniden den Untergang brachte. Die Waffen des großen Königes eröffneten den Griechen alle Länder vom Nil bis zum Indus und die griechische Kultur verbreitete sich allerwärts. Die reinen Lehren Zoroasters hatten nicht mehr vermocht, den Verfall des sinkenden Staatskörpers zu verhüten, sie waren nicht ins Leben eingedrungen, eine zügellose Despotie hatte sich zwar der äußeren Gottesverehrung angenommen, aber die Sittenlehre war ein todter Buchstabe geblieben, ein Vermächtniß für die Nachwelt. Auch Aegypten war unter den Persern gleichfalls von seiner Höhe herabgekommen, die stolze Priesterschaft war gedemüthiget, sie hatte ihre Bedeutung verloren; jedem wissenschaftlichen Streben entfremdet, waren sie der Unwissenheit, der geistigen Armuth verfallen. Die Griechen, welche nach Asien strömten, ver-

mochten dem zerrütteten Lande nicht mehr aufzuhelfen, ihrer eigenen Sittlichkeit war schon der Boden gewichen, ihre Käuflichkeit, ihre Verschwendung, ihre Ueppigkeit fanden dort nur bessere Nahrung, und statt zu erheben, gingen sie selbst unter. Zwar kann nicht bezweifelt werden, daß die in Griechenland erblüheten Wissenschaften auch nach Asien übergingen und sich daselbst verbreiteten, aber aufblühen konnten sie daselbst nicht, und die Völker wurden dadurch eben so wenig zu neuer Thätigkeit gehoben, als Griechenland selbst durch die Bestrebungen seiner Gelehrten. Eine große Zeit war abgelaufen, eine neue im Werden. Die Gegensätze hatten sich gelöst, die volksthümlichen Elemente waren verschwunden, die religiösen Grundlagen aufgehoben, Alles war verwischt und verflossen, einem großen, seichten, unbewegten Wasser gleich, aus welchem durch die Fäulniß ein neuer Lebensbaum erwachsen sollte. Ein jugendlich frisches Element, **Rom**, entwickelte sich jetzt erst lebenskräftig und hatte daher auch die Bestimmung, alles Uebrige sich zu unterwerfen.

Nach Alexanders Tode erfolgte ein vierzigjähriger Kampf seiner Generale um die Herrschaft der Provinzen. Griechenland, durch innere Kämpfe zerrüttet, erhob sich nicht wieder. Noch einmal gelang es Seleukus I, beinahe sämmtliche asiatische Länder des großen Perserreiches zu vereinigen, aber nur auf kurze Zeit. Die Seleukiden theilten das Schicksal aller Despoten: sie erlagen dem Einflusse der unbeschränkten Herrschergewalt und der allgemeinen Verweichlichung und Sittenlosigkeit. Im Westen löste sich ein Ländertheil nach dem andern ab, im Nordosten entstand das baktrische Reich, und vom Tigris bis zum Indus fiel das Land den Parthern zu. Daß hier kein Boden zur Hebung und Pflege der Wissenschaften war, begreift sich von selbst, aber eben so, daß alles Vorhandene aufgenommen wurde, was das materielle Leben und die Lebensgenüsse fördern konnte.

Zweiter Abschnitt.

Fortbildung der Geometrie unter dem Einflusse der arithmetischen Richtung.

Dritte Periode. Erste Alexandrinische Schule. Entstehung der metrischen Relationen. Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaften.

Unter allen Provinzen des großen Reiches Alexanders war Aegypten am glücklichsten. Ptolemäus, ein Halbbruder Alexanders, hatte sich hier gleich anfangs festgesetzt und mit schlauer Berechnung sich zu erhalten gewußt. Der Fanatismus der Perser hatte auch das Heiligste nicht verschont und die im innersten Wesen des Volkes gegründeten Ideen zu vernichten gesucht. Ptolemäus hob das Land wieder, indem er alles Volksthümliche ehrte und schützte, und den Wohlstand durch Handel und Verkehr förderte. Sein Hauptstreben ging dahin, das griechische Wesen mit dem ägyptischen zu verschmelzen, was ihm durch die vorausgegangenen Zerrüttungen erleichtert wurde. Aegyptische Beharrlichkeit, verbunden mit griechischer Kunst und Wissenschaft, schufen noch einmal einen blühenden Staat, während alle andere Staaten um ihn her immer tiefer sanken. Außer Griechen zog Ptolemäus aber auch viele Juden, selbst mit Gewalt, nach Aegypten; überhaupt strömten jetzt hier die verschiedenartigsten Elemente zusammen und erzeugten noch einmal ein reges Geistesleben. Die Juden waren schon aus der Gefangenschaft als ein anderes Volk hervorge-

gangen; in Babylon hatten sie an der östlichen Kultur Theil genommen, die Kultur der Griechen war ihnen nicht fremd geblieben, und mit Aegypten wurden immer Verbindungen unterhalten. Sie waren gezwungen, mit zu vielen Völkern in Berührung gekommen und hatten selbst zu viele fremde Bestandtheile aufgenommen, um nicht endlich aus ihrer Abgeschlossenheit theilweise hervorzutreten. Handels- und gewerbthätig verbreiteten sie sich über ganz Asien, Aegypten und Griechenland, ohne die Verbindung mit dem Mutterlande aufzugeben, sie wurden die Träger der Ideenkreise aller Kulturvölker von Indien bis nach Italien, welche dann in dem Halbkreise der Länder am Mittelmeere von Aegypten über Kleinasien nach Griechenland zusammenflossen. Der Glaubenskreis der Juden war auf ähnliche Weise aus verschiedenen unverstandenen Bestandtheilen erwachsen, wie der der Griechen, und auch hier die Trennung von Gott und Natur vollständig. Aber dem jüdischen Geiste fehlte die Freiheit des griechischen; die Götter Griechenlands, obgleich im griechischen Volksgeiste gedacht, standen doch über der Nationalität, sie waren die Götter der Welt. Der Gott der Juden war ein Jude, der erste von Allen, ihr unsichtbarer König; auf ihn übertrugen sie ihr ganzes eigenes Wesen; er war der Inbegriff der jüdischen Nation. Dazwischen leuchten nur fremde Ideen hervor; an eine eigene Speculation ist nicht zu denken: wenn Gott erscheint, erscheint er im Feuer, wie bei den Ariern. Durch Aufnahme der persischen Idee, der Weltschöpfung aus Nichts, war für die Juden die schwierige Frage über das Verhältniß von Geist und Materie gelöst, das Uebrige war nach dem Aegyptischen gemodelt, wie die politischen Einrichtungen. Dieses Element war aber ganz geeignet, mit dem griechischen zusammen zu wirken: bei den Juden herrschte noch die Phantasie, bei den Griechen die klare Anschauung vor.

Zur Hebung und Pflege der Wissenschaften hatte schon Ptolemäus I. um 320 das Museum in Alexandrien gegründet, hier entstand nun eine Schule, die sogenannte alexandrinische, welche trotz der großen Umwälzungen in der politi[illegible] Welt nahe an 1000 Jahre in Wirksamkeit blieb. Es kann nun nach dem Vorhergehenden keine Frage sein, welche Richtung diese Schule befolgte und befolgen mußte: sie war auf die Natur und das Leben angewiesen, die Mathematik mußte hier den Verstand schärfen, das reine Denken üben und als Wissenschaft der Zahl und Form, von welcher alle natürlichen Dinge abhängen, diese Bestrebungen unterstützen. Es ist Einseitigkeit, diese Richtung zu verwerfen; sie war nothwendig so gekommen mit der Trennung von Gott und Natur. Sobald die Glaubenssätze von der Natur unabhängig geworden waren, mußten sie aufhören, Gegenstände der Forschung zu sein und das religiöse Element hatte mit den Wissenschaften nichts mehr zu thun. Der Uebergang aus dem einen Zustand in den andern hat mehrere Jahrhunderte gedauert, und glücklich hat die alexandrinische Schule aufgenommen, was Plato und Aristoteles begründet. Es + war aber auch kein Ort günstiger gelegen als Alexandrien, der Stapelplatz des Welthandels, wo die Erzeugnisse der alten Welt zusammenflossen und alle Rassen und Nationen ihre Repräsentanten hatten. Während die früheren Griechen weite und mühevolle Reisen zu fremden Völkern unternehmen mußten, um sich mit ihren Kenntnissen und ihren Ideenkreisen bekannt zu machen, floß den Alexandrinern Alles von selbst zu, sie erfüllten aber auch vollkommen ihre Aufgabe; insbesondere hat die Geschichte der Mathematik keine glänzenderen Namen aufzuweisen, als die der alexandrinischen Mathematiker. Noch durch ein anderes Verhältniß wird diese Schule merkwürdig: sie zeigt in steigender Reihe auch in der Mathematik den Einfluß des Orientes. Zur ursprünglich räumlichen Anschauung der Mathematik der Griechen war durch Pythagoras schon aus

+ Su i diversi elementi offerti da Alessandria in quel tempo V. un articolo della R. dei 2 mondi . .

Persien die arithmetische gekommen und hätte sich, ohne bedeutende Fortschritte zu machen, auch in der akademischen Schule erhalten; wir kennen übrigens ihren Einfluß nicht. In der alexandrinischen Schule müssen neue Anregungen dazu gekommen sein, das arithmetische Element bricht sich immer mehr Bahn, und man kann diesen steigenden Einfluß durch die ganze produktive Zeit dieser Schule verfolgen. Die neue Richtung war schon aus einer Zusammenwirkung verschiedenartiger Kräfte hervorgegangen und ihre Erscheinung in der Mathematik konnte natürlich nicht ausbleiben.

Die alexandrinische Schule hat schon in der ersten Zeit ihrer Entstehung einen sehr berühmten und allgemein gekannten Namen aufzuweisen. Euklides soll bereis 308 in Alexandrien gelehrt und sich seine Bildung in der platonischen Schule erworben haben. Sein Vaterland und seine Lebensumstände sind unbekannt geblieben, aber sein Charakter wird auf die vortheilhafteste Weise dargestellt. Die Werke Euklids, welche der reinen Mathematik angehören, sind folgende: Die Elemente der Geometrie in fünfzehn Büchern, von welchen aber die beiden letzten über die fünf regelmäßigen Körper sehr wahrscheinlich dem Alexandriner Hypsikles angehören; die sogenannten Dedomena oder Data, 95 Sätze; drei Bücher Porismen; vier Bücher über die Kegelschnitte, deren Theorie von ihm beträchtlich erweitert wurde; endlich vier Bücher über die Oerter auf der Oberfläche. Die beiden ersten Werke sind vollständig vorhanden, die drei letzten aber verloren gegangen und nur aus Andeutungen späterer Schriftsteller läßt sich auf ihren Inhalt schließen.

Die Versuche, die Elemente der Geometrie systematisch zu bearbeiten, waren bei den Griechen nicht selten. Auf Hippokrates folgte Leon, dessen Arbeit vollständiger und brauchbarer war, Theudius von Magnesia, der die einzelnen Sätze in eine bessere Ordnung brachte und Hermotius von Kolophon, der alles Neue in seine Arbeit aufnahm und auch eigene Forschungen zufügte. Hierauf folgte Euklides, der natürlich nun gleichfalls seine Vorgänger benutzte, die bereits bekannten Sätze sammelte, neue hinzufügte, die Beweise verbesserte und vervollständigte und die Ordnung einführte, von welchem noch heute sein Werk Zeugniß ablegt. Euklids Elemente sind die Grundlage der Geometrie der Folgezeit geworden und schon deswegen von großer Wichtigkeit für die Geschichte der Mathematik, wenn sich auch sonst nichts weiter daran knüpfte. Kaum hat wohl jemals ein wissenschaftliches Werk so viel Aufsehen erregt und eine gleich große Verbreitung gewonnen; nicht eines hat, wie dieses, das Schicksal gehabt, nach länger als 2000 Jahren von Vielen noch für das Höchste gehalten zu werden, was je der Menschengeist in dieser Art hervorzubringen vermochte. Der beschränkte Standpunkt solcher Beurtheiler kann übrigens hier nicht maßgebend sein: es ist gezeigt worden, wie die Geometrie der Griechen sich entwickelt hat, wie sie aus einzelnen Sätzen erwachsen ist, wie die Beweise, oft noch unvollkommen, sich stützen mußten auf noch unerwiesene Sätze, welche als wahr angenommen wurden; wie endlich diese Lücke nach und nach ausgefüllt und es alsdann möglich wurde, die Sätze aneinander zu reihen und eine künstliche Ordnung herzustellen. Versuche solcher künstlichen Systeme liegen in Andeutungen vor, sie mußten erneuert werden mit jeder bedeutenden Erweiterung der Wissenschaft, und das letzte dieser Systeme haben wir in den Elementen Euklids. Daß dieses einen höheren Grad von Vollkommenheit zeigt, ist natürlich, es ist aber eben so gut, wie die früheren, der Fortbildung fähig und als künstliches System auch der Verbesserung bedürftig. Die Geschichte einer jeden Wissenschaft zeigt uns, wie sie in ihrer ersten Entstehung nur mit großen Schwierigkeiten sich fortbewegt, wie sie sich an Kleinigkeiten hängt und dem

Unwesentlichen hohen Werth beilegt. Der Geist ist noch nicht frei, er kann sich nicht erheben, das Einzelne fesselt ihn noch; nur dieses vermag er zu fassen und sich mit ihm zu beschäftigen, und dies spricht sich in der Form und der Art der Behandlung der Wissenschaft aus. Die Mathematik konnte von einer solchen Schwerfälligkeit um so weniger verschont bleiben, als zur Zeit ihrer Entwickelung überhaupt Nichts feststand, und sie allein die einzig sicheren Resultate darbot. Man suchte sie deswegen mit einem Gerüste zu umgeben, welches keinen einzigen Ausweg darbot und auch dem begründetsten Zweifel nicht zugänglich war. Das jugendliche, wissenschaftliche Denken bedurfte eines solchen Apparates, wie wir ihn im Euklid erblicken; ohne ihn würde es gar nicht zu seiner Entwickelung gelangt sein. Dieses Alles thut der geistreichen Behandlung der Geometrie keinen Eintrag; im Gegentheile muß man erstaunen, mit welcher Gewandtheit und mit welchem Scharfsinne die Griechen die größten Schwierigkeiten zu überwinden wußten. Mit diesem Verhältnisse hängt nun die aphoristische Form enge zusammen, sie ist der Ausdruck dieser Vereinzelung; diese kleineren Kreise waren leichter zu überschauen und zu fassen, und deswegen wird auch heute noch beim ersten Unterrichte der Jugend davon ein vortheilhafter Gebrauch gemacht. Die Weitläufigkeit der Beweise bei Euklid besteht nun besonders darin, daß die Griechen alles durch Worte ausdrückten, wo wir jetzt uns gewisser Zeichen bedienen, mittelst deren wir dieselbe Sache kürzer, leichter und übersichtlicher und doch eben so genau und scharf auszudrücken vermögen; sodann in vielfältigen Wiederholungen, vorzüglich bei Konstruktionen, die immer wiederkehren, und jedesmal umständlich von Neuem angegeben werden. Hierin findet das eben Gesagte seine Bestätigung. Was aber zu den Zeiten Euklids Bedürfniß war, kann es heute nicht mehr sein und wenn ein Geometer, wie es auch meistens geschieht, diese Umständlichkeiten vermeidet, so kann ihn der Vorwurf, von der alten Gründlichkeit und Schärfe abgewichen zu sein, gewiß nicht treffen, im Gegentheile, es gewinnt seine Darstellung an Klarheit und Sicherheit; denn nichts schadet in mathematischen Dingen mehr, als viele Wortmacherei.

Die Beweise unterscheidet man als directe und indirecte. Die Formel der ersten Art ist: Wenn A wahr ist, so muß auch B wahr sein, nun ist aber A wahr, folglich ist auch B wahr. Die der zweiten ist: P ist wahr, denn wenn P nicht wahr wäre, so müßte A oder B oder C 2c. wahr sein, nun ist aber A nicht wahr und nicht B und C 2c., folglich muß P wahr sein. Die letzte Formel erscheint auch oft unter folgender Fassung: P ist wahr, denn angenommen, es wäre nicht wahr, so müßte A wahr sein (wenn sonst noch irgend ein Anderes nicht stattfinden kann), wenn aber A wahr ist, so muß auch B wahr sein; diese letzte Behauptung ist aber widersinnig: es ist also B nicht wahr, folglich auch A nicht, und wenn dies nicht, so muß P wahr sein. In dieser Form nannte man die Beweisart die Reductio ad absurdum (die Zurückführung auf Widersinniges), und schrieb ihre Einführung in die Geometrie Euklides zu. Beim directen Beweise gelangt man also mit Hülfe bekannter Sätze zur Erkenntniß der Wahrheit der Behauptung, der indirecte Beweis zeigt, daß die Behauptung wahr ist, weil Anderes, was noch sein könnte, nicht wahr ist, indem es auf einen Widerspruch mit bekannten Sätzen oder auf etwas Widersinniges führt. Wenn ein Satz auf directe Weise bewiesen worden ist, so verlangt der umgekehrte Satz in der Regel den indirecten Beweis; diese indirecten Beweise mußten also viel früher schon eingeführt worden sein. Je vollständiger aber ein System der Geometrie wurde, desto häufiger mußte die Anwendung dieser Beweisart werden, und so mag es wohl sein, daß Euklides zuerst einen durch-

greifenden Gebrauch davon gemacht hat. Man bezeichnet mit Recht die indirecten Beweise als eine unvollkommene Beweisart, welche aber die Geometrie noch nicht ganz entbehren kann; man hat jedoch in der Neuzeit hierin Ausgezeichnetes geleistet, und diese Beweisführung so verändert und vereinfacht, daß sie der directen vollkommen gleichsteht, — einen schlagenden Beweis gegen Jene, die den geistigen Fortschritt läugnen und in Euklid nur die höchste, unerreichbare Vollkommenheit erkennen wollen.

Die Anordnung wird sich am besten aus einer allgemeinen Inhaltsangabe erkennen lassen; die Folge der Sätze und Bücher ist in gewisser Art nothwendig, indem das Vorhergehende dem Folgenden immer als Stütze dienen muß. Das erste Buch beginnt mit 35 Erklärungen und Begriffsbestimmungen, hierauf folgen sechs Forderungen oder vielmehr Zugeständnisse: nämlich es wird zugestanden, daß man eine gerade Linie ziehen und verlängern und einen Kreis zeichnen kann, daß alle rechten Winkel gleich sind, daß zwei gerade Linien keinen Raum einschließen können, und daß, wenn zwei gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden und die beiden inneren gegenüberliegenden Winkel zusammen weniger als zwei rechte ausmachen, die beiden Geraden gehörig verlängert zusammentreffen müssen. Hier bietet sich schon Stoff zu Betrachtungen dar, und die heutige Wissenschaft muß über diese Dinge ganz anders urtheilen, als Euklid. Die drei ersten Forderungen sind nicht zu erfüllen: wir können weder eine Gerade noch einen Kreis zeichnen; die Dinge, welche wir dafür ausgeben, sind es nicht, beide existiren bloß in der Idee, nicht in der Wirklichkeit, lassen sich daher auch nicht darstellen. Beide Arten von Linien sind aber denkbar, und insoferne sie zum Gegenstande der Untersuchung gemacht werden, wird dies schon zum Voraus zugestanden. Die Zeichnung, welche niemals richtig ist und sein kann, soll uns das Denkbare bloß anschaulich wiedergeben und die innere Anschauung unterstützen. An diesem Orte fehlt aber Anderes. Es ist immer denkbar, daß eine gerade Linie oder auch ein Winkel in beliebige gleiche oder ungleiche Theile getheilt sei; ob wir eine solche Theilung auszuführen vermögen oder nicht, thut nichts zur Sache; das Denkbare wird dadurch nicht aufgehoben. Hierher gehört noch manches Aehnliche. Der Standpunkt Euklids war aber ein ganz anderer, als der unsrige; ihn kann kein Tadel treffen, denn er hat die Sachen genommen, wie er sie nehmen mußte, und er kann nur in Bezug auf seine Zeit beurtheilt werden. Die drei folgenden Zugeständnisse sind unnöthig, weil sie bei gehörigen Definitionen von gerader Linie, Winkel und rechter Winkel bewiesen werden können. Bei einer Definition ist besonders darauf zu achten, daß sie das Wesen eines Dinges umfasse, und nicht bloß eine hieraus hervorgehende Eigenschaft darstelle, wie jetzt noch häufig geschieht. Mit solchen unzulänglichen Definitionen ist nichts anzufangen, sie bleiben unfruchtbar, und die Darstellung wird ungenügend und lückenhaft. Wenn man von einer geraden Linie spricht, so drückt schon der Begriff **gerade** aus, daß alle Punkte, welche in der Linie gedacht werden können, in einer und derselben Richtung liegen müssen. Wenn man ferner eine Gerade hat, und in ihr einen Punkt und außer ihr einen andern Punkt, und wenn man durch beide Punkte eine zweite Gerade zieht, so sind die Richtungen beider Geraden verschieden, weil schon ein Punkt der einen nicht in der Richtung der andern liegt; in diesem Falle sagt man aber, die Linien bilden einen Winkel mit einander, Winkel ist daher der Richtungsunterschied zweier Geraden; der Winkel zeigt, um wie viel die Richtung einer Geraden von der einer andern verschieden ist. Mit diesen Definitionen lassen sich die angegebenen Beweise führen. Das erste Buch selbst besteht aus 48 Sätzen, Probleme und Theoreme untermischt, immer an der Stelle, wo sie

nöthig werden. Die ersten 32 Sätze beziehen sich auf Dreiecke, Winkel und Parallellinien; vom 33. Satze an handeln sie von Parallelogrammen und ihren Flächenräumen, und in gleicher Weise von Dreiecken; zuletzt folgen der pythagoräische Satz und sein umgekehrter. Das zweite Buch hat 14 Sätze, die ersten 10 enthalten arithmetische Wahrheiten in geometrischer Auffassung: 1) $a b + a c + a d + - = a (b + c + d +)$, 2) $(a + b)^2 = a (a + b) + b (a + b)$, 3) $a (a + b) = a^2 + a b$, 4) $(a + b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2$, 5) $a b + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$, 6) $(a + b) b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} a + b\right)^2$, 7) $(a + b)^2 + a^2 = 2 (a + b) a + b^2$, 8) $4 (a + b) a + b^2 = (2 a + b)^2$, 9) $a^2 + b^2 = 2 \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$, 10) $b^2 + (a + b)^2 = 2 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$. Der 11. Satz enthält eine Aufgabe, deren Lösung die positive Wurzel der Gleichung $a (a - x) = x^2$ oder $x^2 + a x = a^2$ gibt. Die beiden folgenden Sätze enthalten den allgemeinen pythagoräischen Satz für die verschiedenen Arten der Dreiecke, und die Aufgabe 14 zeigt, wie irgend eine geradlinige Figur in ein Quadrat verwandelt werden kann. Das dritte Buch enthält 11 Erklärungen und 37 Sätze über den Kreis, verbunden mit geraden Linien. Das vierte Buch enthält 7 Erklärungen und 16 Aufgaben über die Vielecke im Kreise und um den Kreis. Das fünfte Buch enthält 20 Erklärungen und 4 Grundsätze, sodann in 25 Sätzen die Lehre von den Proportionen in geometrischer Darstellung. Der Inhalt des fünften Buches findet im sechsten seine Anwendung: dieses enthält 4 Erklärungen und 33 Sätze, welche sich meistens auf die Aehnlichkeit der Figuren und auf Flächenräume beziehen.

Die Bücher 7, 8 und 9 sind unter dem Namen der arithmetischen Bücher bekannt; sie enthalten die Arithmetik der Griechen bis auf Euklid, das siebente enthält 41, das achte 27 und das neunte 36 Sätze, welche sich größtentheils über die Eigenschaften der Zahlen verbreiten. Das zehnte Buch endlich ist das größte und schwierigste; es umfaßt nicht weniger als 117 Sätze, und obschon es in späteren Zeiten seine Bedeutung verloren hat, so ist es doch dasjenige, in welchem sich am meisten ausspricht, wie weit es die Griechen im abstracten Denken gebracht hatten. Die drei vorhergehenden Bücher handeln von der rationalen Arithmetik, das zehnte von der irrationalen oder von den incommensurabeln Größen; dieser Gegenstand ist von den Griechen nicht weiter ausgebildet worden. Die Bücher 11, 12 und 13 enthalten die Lehre von den Ebenen in Verbindung mit Geraden und unter sich, so wie die Lehre von den Körpern; es finden sich jedoch auch andere Sätze damit untermischt, wie sie eben die Folge gerade nöthig machte. In diesen Büchern wird von einem Beweisverfahren Gebrauch gemacht, welches man die Exhaustionsmethode genannt hat, die später erläutert werden soll.

Diese Inhaltsangabe läßt nun zwei hervorragende Eigenthümlichkeiten der Arbeit Euklids erkennen, einmal die beständige Vermengung der Probleme mit den Theoremen und dann die scheinbare Unordnung, in welcher die Sätze aufeinander folgen. Die Ursache zu beiden Dingen ist die gleiche und früher schon angegebene: sie liegt in der ganzen Art der Entwickelung der griechischen Geometrie, in dem Streben, gründlich zu überzeugen und auch nicht den geringsten Zweifel oder Einwurf übrig zu lassen. Sie konnten sich auf ihrem Standpunkte

nicht begnügen, eine denkbare, mögliche Forderung als ausgeführt anzunehmen; sie mußten zuerst zeigen, wie sie ausgeführt werden könne. Ein natürliches System war schon außerdem nicht möglich, wegen der beständigen Vermengung der Arithmetik und der Geometrie. Dem Systeme Euklids ist viel übertriebenes Lob und eben so übertriebener Tadel gespendet worden, und zu allen Zeiten hat es nicht an einer Reaction gegen einen gesunden Fortschritt in diesem Zweige gefehlt. Diese ging so weit, überhaupt zu läugnen, daß es eine bessere Anordnung geben könne und daß jedes natürliche System ungenügend sei. Die Widerlegung einer solchen Behauptung liegt nun freilich schon in ihr selbst; denn was natürlich ist, ist jedenfalls am einfachsten und besten, aber darin gehen die Meinungen auseinander, was hier natürlich sei. Der Gegenstand ist aus vielen Gründen schwieriger, als er scheint; in Bezug auf die Elemente möchte nun aber wohl eine natürliche Anordnung des Stoffes möglich sein, wobei jedoch keine Folge in der Art stattfinden kann, daß, ohne Ausnahme, jeder folgende Satz von einem der vorhergehenden abhängig sein muß. In der Elementargeometrie werden drei Klassen von Sätzen wohl unterschieden werden müssen, welche auf eine natürliche Weise nicht aufeinander zurückgeführt werden können. Der erste Satz der Geometrie kann nur auf Definitionen und den Ursätzen beruhen, die folgenden der ersten Klasse aber werden von diesem abhängen. Die erste Klasse bezieht sich auf Gerade und Winkel, Nebenwinkel und Scheitelwinkel, welche alle durch einen Punkt in Verbindung stehen. Die zweite Klasse umfaßt die Parallellinien, wenn sie von einer Geraden durchschnitten werden; diese Sätze beziehen sich auf Winkel, welche an verschiedenen Punkten liegen: hier ist ein Uebergang durchaus unmöglich, der erste Satz dieser Klasse muß ebenfalls wieder auf Definitionen und Ursätze zurückgeführt werden, dann stützen sich die folgenden auf diesen und die früheren; hierher gehören auch noch die Sätze über die Winkel des Dreiecks. Die Sätze der dritten Klasse endlich beziehen sich auf die Congruenz der Dreiecke, und diese können schon ihrer Natur nach von denen der beiden ersten nicht abhängig sein. Wenn man daher nicht das verlangt, was seinem Wesen nach nicht sein kann, so lassen sich die Sätze in eine natürliche Ordnung bringen, so daß vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortgeschritten wird. Die Forderung der Griechen war aber nach dem Dargelegten eine ganz andere und Euklid hat sie auf eine höchst befriedigende Weise gelöst.

Das zweite Werk Euklids, seine Data, enthält im Ganzen 95 Sätze, in welchen gezeigt wird, daß, wenn gewisse Dinge gegeben sind, dadurch auch andere Dinge gegeben sein müssen. Die ersten 24 Sätze beziehen sich auf Größen überhaupt, obschon sie durch gerade Linien dargestellt werden; die übrigen gehören alle der Geometrie an. Was diese Sätze zu bedeuten haben, wird sich an Beispielen am besten ergeben. 1. Satz. Wenn zwei Größen a und b gegeben sind, so ist auch ihr Verhältniß gegeben. 2. Satz. Wenn eine gegebene Größe mit einer andern ein gegebenes Verhältniß hat, so ist auch diese Größe gegeben. 6. Satz. Wenn zwei Größen, welche ein gegebenes Verhältniß haben, vereiniget werden, so wird auch die vereinigte Größe mit jeder der beiden Größen ein gegebenes Verhältniß haben. 24. Satz. Wenn drei Größen proportional sind, und das Verhältniß der ersten zur dritten gegeben ist, so wird dadurch auch das Verhältniß der ersten zur zweiten gegeben sein. S. 66. Wenn in einem Dreiecke ein Winkel gegeben ist, so wird das Rechteck aus den Seiten, welche den Winkel bilden, mit dem Dreiecke ein gegebenes Verhältniß haben. S. 58. Wenn an eine gegebene Gerade ein gegebenes Flächenstück als Rechteck so angestreckt wird, daß es um ein Rechteck

zurückbleibt, welches einem gegebenen Rechtecke ähnlich ist, so ist auch dieses fehlende Rechteck gegeben.

Die Data sind eine Art geometrischer Sätze, deren Vorhandensein vor Euklid sich nicht nachweisen läßt, und es ist sehr wahrscheinlich, daß, wenn sie nicht von ihm zuerst eingeführt wurden, sie doch nicht lange vor ihm entstanden sein können. Hier soll nicht gezeigt werden, wie eine vorgelegte Aufgabe gelöst, selbst nicht, wie eine Behauptung bewiesen werden könne, obschon dieß äußerlich so scheint; diese Sätze bilden vielmehr kleine Kreise selbstständiger Forschungen, welchen bloß das Resultat vorangestellt wurde. Man erkennt in den Beweisen den Weg des Forschers, auf welchem er zu neuen Ergebnissen gelangte. Die Betrachtungen, welche hier angestellt wurden, zeigten bloß, daß mit gewissen Dingen auch andere gegeben waren, aber noch nicht wie diese gefunden werden konnten: die Forschung lieferte den Stoff zur weiteren Verarbeitung. In dieser Beziehung sind die Data höchst wichtig; sie gestatten uns eine Einsicht in den Uebergang der griechischen Geometrie in eine neue Richtung, sie bilden das Mittelglied zwischen den Elementen und den Porismen. Weniger von Bedeutung ist es, daß aus einigen Sätzen der Data die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades hergeleitet werden kann: diese Gleichungen sind schon gelöst in den Elementen, z. B. Buch 6. Satz 28 und 29, welche die Konstruktion enthalten.

Ueber den Inhalt der verloren gegangenen Porismen sind schon sehr viele Ansichten geltend gemacht worden. Wir würden über diesen Gegenstand völlig in Unwissenheit sein, wenn nicht spätere Schriftsteller des Namens und der Sache Erwähnung gethan hätten. **Pappus** hat in seinen mathematischen Sammlungen dreißig Sätze Porismen aufgeführt, aber in einer Weise, die keine Entscheidung zuläßt. Der Ausdruck Porisma hatte schon bei Euklid zwei verschiedene Bedeutungen: in der einen zeigte er einen Satz an, welcher ohne weiteren Beweis aus dem Hauptsatze floß; die andere Bedeutung scheint aber frühe bei den Griechen selbst in Abgang gekommen zu sein und wurde später nicht mehr verstanden. Pappus drückt sich hierüber auf folgende Weise aus: „Die Porismen gehören weder zu den Theoremen, noch zu den Problemen, sondern stehen ihrer Form und ihrem Wesen nach zwischen beiden mitten inne, so daß sie sowohl als Theoreme als auch als Probleme ausgesprochen werden können. Daher kommt es, daß einige Geometer dieselben für Theoreme, andere für Probleme gehalten haben, indem sie sich an die bloße Form des Satzes hielten. Die Alten haben aber den Unterschied dieser drei Gattungen besser aufgefaßt, wie aus ihren Definitionen erhellet. Nach ihnen bezweckt ein Theorem die Beweisführung für das, was der Satz ausspricht; ein Problem die Konstruktion dessen, was vorgelegt ist; **ein Porisma dagegen bezweckt die Auffindung und Erforschung des Vorgelegten.** Diese Definition des Porisma's ist von den Neueren geändert worden, die nicht Alles erforschen (porismiren) können, sondern, auf diese Elemente gestützt, nur zeigen, daß das, was gesucht wird, ist, nicht aber dieses selbst aufsuchen."

Der letzte Theil scheint kaum einen Zweifel über die Bedeutung zuzulassen; Pappus drückt sich deutlich genug aus, und man darf sich nur durch das Vorausgehende nicht irre machen lassen. Porizein ist identisch mit unserem deutschen Forschen, beide von einem Stamme mit der Sanskritwurzel „pri", bewegen, vorwärtsbringen; daher die Bedeutung des griechischen Zeitwortes: etwas in Gang oder vorwärtsbringen, fördern; bildlich, in der Wissenschaft hervorbringen, erforschen. Die Porismen waren daher Forschsätze, d. h. solche, welche in genetischer Form entwickelt das Resultat der Forschung darstellten. Pappus

belehrt uns zugleich, wenn auch nur dürftig, über deren Inhalt; die Untersuchungen bezogen sich auf die Theorie der Transversalen, die harmonischen und anharmonischen Verhältnisse und die Involution, überhaupt auf die Theile der Geometrie, welche die schönsten Erfolge der Neuzeit sind. Aus dem, was Pappus über die späteren Griechen und über ihr Verständniß der Geometrie sagt, ist kaum zu zweifeln, daß das, was er uns aufbewahrt hat, nur dürftige Reste des einst Vorhandenen sind; wie weit aber die Griechen in diesen Untersuchungen gekommen waren, ist nach den vorhandenen Hülfsmitteln nicht mehr zu erörtern. Die Grundlagen dieser Untersuchungen sind so allgemeiner Natur, daß sie eine reiche Quelle bilden, aus welcher, bei gehöriger Handhabung, mit Leichtigkeit zahllose Wahrheiten hergeleitet werden können: diese waren die Porismen. Man muß den Unterschied wohl ins Auge fassen: ein Porisma war nicht etwas zum Beweise Vorgelegtes oder zu Konstruirendes, sondern ein aus einer allgemeinen Grundlage zu Erfindendes, Abzuleitendes. Hieraus erklärt sich nun auch die zweifache Bedeutung des Wortes; in der Hauptbedeutung hatte man einen Satz zu erfinden, d. h. durch Verwendung der geeigneten Mittel einen allgemeinen Satz in einem bestimmten Falle zur Anwendung zu bringen, und dadurch einen neuen Satz daraus abzuleiten; in der andern Bedeutung hatte man nur aus einem Satze andere Sätze, welche in ihm ohne weiteres enthalten waren, abzuleiten. Wie leicht es hierbei möglich war, beide Bedeutungen zu vermengen und die Hauptsache nicht mehr zu verstehen, so wie die Griechen nicht mehr produktiv waren, leuchtet von selbst ein, und Pappus weist uns auch darauf hin.

In den vier Büchern des Euklid über die Kegelschnitte soll er die Theorie dieser Kurven erweitert haben; wahrscheinlich waren sie gleichfalls eine Zusammenstellung dessen, was bis auf seine Zeit geleistet worden war, in Verbindung mit seinen eigenen Forschungen. Eben so dürftig sind die Nachrichten über seine „Oerter auf der Oberfläche"; einerseits hat man vermuthet, daß hierunter die Oberflächen verstanden worden seien, welche durch Umdrehung der Kegelschnitte um ihre Achsen entstehen, was sehr wahrscheinlich ist; sodann auch, daß sie Bezug hatten auf Kurven doppelter Krümmung. Untersuchungen der ersten Art mußten zu Euklids Zeiten schon aufgenommen worden sein. Andere Werke, welche Euklid zugeschrieben werden, beziehen sich auf Astronomie und Optik, doch sind kürzlich wieder zwei Abhandlungen in arabischen Uebersetzungen entdeckt worden, deren eine von der Theilung der Figuren und die andere von dem Hebel handelt.

Von Plato bis zu Euklid hatte demnach die Geometrie sehr beträchtliche Erweiterungen erfahren, und während in den Elementen die ältere Form noch streng festgehalten ward, zeigte sich in den Data ein Uebergang, in den Porismen eine neue Form der Darstellung und eine neue Methode der Untersuchung. Diese Richtung scheint nicht weiter verfolgt worden zu sein, und es verflossen nahezu 2000 Jahre, ehe sie mit ergiebigem Erfolge wieder betreten wurde. Dagegen zeigt sich bald nach Euklid eine neue Erscheinung, welche von jetzt an für immer festgehalten wurde, und die für die praktische Anwendung der Mathematik von der größten Wichtigkeit war: die Einführung der Arithmetik in die Geometrie. Diese Neuerung verdankt man Archimedes aus Syrakus (287—212), einem Schüler Euklids. Kein Geometer vor Archimedes hat jemals eine Linie durch Zahlen dargestellt oder eine Rechnung zu geometrischen Zwecken ausgeführt; dieses war den Feldmessern, überhaupt jenen Personen vorbehalten, deren Geschäft es war, die Geometrie auf die gewöhnlichen Verhältnisse des Lebens anzuwenden. Hierbei wurden die Rechnungen höchst wahrscheinlich mit

kleinen Steinchen oder an Rechenschnüren oder an ähnlichen Apparaten vorgenommen. Die Arithmetik war sicher unterdessen kultivirt worden, aber nicht mit großem Erfolge, doch muß schon vor Archimedes das Tafelrechnen in Aufnahme gekommen sein, denn wir finden es bei ihm schon auf einer gewissen Stufe der Entwickelung. Bei der Art der griechischen Zahlenbezeichnung waren Zu- und Abzählen, so wie das Multipliciren nicht schwierig, aber weitläufig. Beispiele von einer Division und von einem wirklichen Wurzelausziehen sind nicht bekannt. Diese letzte Operation wurde wahrscheinlich versuchsweise ausgeführt. Archimedes rechnet nun in seinen Schriften nicht selbst, sondern setzt bloß die Resultate hin, und die Methode wird erst durch spätere Erklärer auseinander gesetzt. Wir besitzen nun von Archimedes eine Schrift, die Berechnung der Sandeszahl, welche keinen andern Zweck hatte, als zu zeigen, daß die Griechen durch ihre Art der Zahlbezeichnung im Stande seien, jede noch so große Zahl ausdrücken zu können. In dieser Schrift, an den König Gelon gerichtet, setzt er zuerst sein Zahlensystem auseinander; er zählt, wie früher angegeben, nach Myriaden und nimmt Myriaden mal Myriaden oder 100 Millionen als eine Einheit der nächst höhern Ordnung an. Er theilt also von 8 zu 8 Stellen ab; die erste Abtheilung enthält die Einheiten der ersten Ordnung, die zweite Abtheilung die Einheiten der zweiten Ordnung u. s. w., diese Ordnungen führt er fort bis zur 100 millionsten, und nennt diese ungeheure Zahl die erste Periode. In entsprechender Weise bildet er eine zweite, dritte . . . . 100 millionste Periode, was einer Zahl gleichkommt mi 80,000 Billionen Stellen. Archimedes hielt die Zahlen der ersten Periode für seinen Zweck ausreichend, zeigt aber in der Bildung der folgenden Perioden, wie man auf gleiche Art weiter gehen könne. Um nun eine Unterlage für eine recht große Zahl zu haben, geht er auf die Ansicht Aristarch's von Samos zurück, der schon gelehrt hatte, die Erde bewege sich um die Sonne, welche selbst feststehe, eben so wie die Fixsterne; diese seien aber so weit entfernt von jener, daß der Durchmesser der Erdbahn dagegen ein Punkt sei. Man sieht leicht ein, daß Aristarch durch dieses Verhältniß nur die ungeheuere Entfernung der Fixsterne von der Erde habe angeben wollen; er wird aber darüber von Archimedes getadelt, weil ein Punkt, welcher keine Größe habe, auch kein Verhältniß zu einer andern Größe haben könne. Er nimmt daher an, Aristarch habe sagen wollen, die Erdkugel verhalte sich zur Welt wie die Kugel der Erdbahn zur Sphäre der Fixsterne, wo er zuletzt das, was er Welt nennt, als zusammenfallend mit der Kugel der Erdbahn ansieht. Zunächst ist es ihm nur darum zu thun, alle Dimensionen so groß zu nehmen, daß sie gewiß nicht kleiner gesetzt werden können. Den Umkreis der Erde nimmt er zu 3 Millionen Stadien an, vom Durchmesser der Welt zeigt er, daß er kleiner sein müsse, als 10,000 Millionen Stadien, und aus seiner angenommenen Proportion ergibt sich auch der Durchmesser der Fixsternkugel. Nunmehr legte er Mohnkörner dicht neben einander und fand, daß 25 auf einen Zoll gingen; er nahm dafür aber 40 an, setzte ferner, daß ein Mohnkorn einen Raum von 10,000 Sandkörnern einnehme. Ein Mohnkorn als Kugel gedacht von $^{1}/_{40}$ Zoll Durchmesser gibt für eine Kugel von 1 Zoll 64,000 Mohnkörner oder 640,000,000 Sandkörner. Nun geht er zu immer größern Kugeln über und findet zuletzt, daß die Zahl der Sandkörner in der Weltkugel weniger betragen müssen, als 1000 Einheiten der 7. Ordnung, und in der Fixsternkugel weniger als 1000 Myriaden der 8. Ordnung, was Alles ihm nicht widersprechen werden könne.

Nach diesen Angaben über die Beschäftigung des Archimedes mit den Zahlen wird seine ganze übrige Richtung in der Geometrie nicht befremden.

Es schließt sich hieran seine **Kreismessung** oder die Berechnung des Verhältnisses des Umfanges zum Durchmesser. Er ging von dem ordentlichen Sechsecke um den Kreis aus, und indem er den Mittelpunkt mit einem Berührungspunkte und der entsprechenden Ecke verband, erhielt er ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Basis der Radius und dessen Senkrechte die halbe Seite des Sechseckes war. In einem solchen Dreiecke ist der spitze Winkel an der Basis 30° und im Scheitel 60°; daher die Senkrechte die Hälfte der Hypotenuse, also ihr Verhältniß 1 : 2. Hieraus war nun das Verhältniß der Senkrechten zur Basis zu bestimmen, was mit Hülfe des pythagoräischen Satzes geschehen konnte: zuerst erhielt er das Verhältniß der Quadrate und durch Wurzelausziehen das der Linie selbst. Statt des Verhältnisses 1 : 2 oder des umgekehrten 2 : 1 setzte er nun das gleichwerthige 306 : 153, damit er bei dem folgenden Wurzelausziehen eine Zahl erhielt, welche um Weniges größer war, als eine Quadratzahl, und, indem er den Rest vernachläßigte, das gesuchte Verhältniß um Weniges größer, als der gefundene Zahlenwerth. Nun halbirte er den Winkel von 30°, und erhielt so die halbe Seite des ordentlichen Zwölfecks um den Kreis, mit Hülfe des Satzes, daß in einem Dreiecke, in welchem ein Winkel halbirt worden, die dem Winkel gegenüberliegende Seite, durch die Halbirungslinie, im Verhältniß der anliegenden Seiten getheilt wird, und mit Hülfe des pythagoräischen Satzes erhielt er auf gleiche Weise das Verhältniß der halben Seite des Zwölfeckes zum Radius. Auf diese, mit vieler Kunst und Geschicklichkeit geleitete, Weise gelangte er zum Verhältnisse der halben Seite des 96eckes zum Radius und von diesem zu dem des Umfanges zum Durchmesser. Auf diese Art fand er nun, daß der Umfang des Kreises kleiner ist, als $3^{10}/_{70}$ oder $3^{1}/_{7}$ des Durchmessers. Durch eine ähnliche Rechnung, wobei er von dem ordentlichen Sechsecke im Kreise ausging, gelangte er zu dem Resultate, daß der Umfang des Kreises größer ist, als $3^{10}/_{71}$ des Durchmessers. — Der erste Satz dieser Abhandlung über die Ausmessung des Kreises enthält das Theorem: Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Inhalte eines Dreieckes, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Kreises und dessen Höhe gleich dem Radius ist. Der Beweis wird geführt durch die Exhaustionsmethode und die Reductio ad absurdum, wovon Archimedes einen sehr ausgedehnten Gebrauch macht. In einer andern Abhandlung sagt er hiervon im Eingange: „Ich habe die Sache bewiesen und zwar mittelst des folgenden Lehrsatzes:

Wenn zwei Flächenräume ungleich sind, so ist es möglich, den Unterschied, um welchen der größere den kleineren übertrifft, so oft zu sich selbst zu setzen, daß dadurch jeder gegebene endliche Flächenraum übertroffen wird.

Auch die frühern Geometer haben sich dieses Lehrsatzes bedient" u. s. w. Man denke sich einen Kreis und in diesem eingeschrieben ein Quadrat, so ist offenbar der Umfang des Quadrates kleiner, als der des Kreises, und die Senkrechte auf eine Seite gefällt, kleiner als der Radius. Halbirt man hierauf die Bogen und konstruirt das ordentliche Achteck im Kreise, so läßt sich dasselbe beweisen: der Umfang des Achteckes ist größer, als der des Viereckes, aber kleiner, als der des Kreises, und eben dasselbe ergibt sich in Bezug auf die Senkrechten und den Radius. Man kann diese Beweise auf alle Vielecke ausdehnen; sie nähern sich dem Kreise, ohne ihn je zu erreichen, eben so die Senkrechten dem Radius; der Unterschied zwischen beiden Figuren wird immer mehr erschöpft, mit der Vermehrung der Seitenzahl des Vieleckes. Ein ähnlicher Beweis läßt sich führen in Bezug auf den Kreis und umschriebene Vielecke. Diese bleiben immer größer als jener, nähern sich ihm aber beständig, ohne ihn zu erreichen; die Senkrechte und der Radius dagegen sind immer einander gleich. Man denke

sich ferner ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich ist dem Umfange eines Kreises und dessen Höhe gleich dem Radius, so wird behauptet: Kreis und Dreieck hätten gleichen Flächeninhalt. Wäre dieses nicht der Fall, so müßte der Kreis etwa größer sein als das Dreieck, um ein Gewisses. Man denke sich nun in den Kreis ein Vieleck eingeschrieben, und die Seiten desselben so lange halbirt, bis ein Vieleck entsteht, welches von dem Kreise um weniger verschieden ist, als vom Kreise das Dreieck, was immerhin möglich ist, aber nur dann sein kann, wenn das Vieleck größer ist, als das Dreieck; nun ist aber das Vieleck kleiner, als das Dreieck, weil sein Umfang kleiner ist, als der des Kreises, also auch kleiner, als die Grundlinie des Dreiecks, und die Senkrechte des Vielecks kleiner, als der Radius, also kleiner, als die Höhe des Dreiecks. Es kann also das Vieleck nicht größer sein, als das Dreieck, folglich auch der Kreis nicht größer. Es könnte aber vielleicht der Kreis kleiner sein, als das Dreieck; in diesem Falle beschreibe man ein ordentliches Vieleck um den Kreis und halbire so lange die Seiten desselben, bis der Unterschied zwischen Vieleck und Kreis kleiner ist, als zwischen dem Dreiecke und Kreis, dies kann aber nur sein, wenn das Vieleck kleiner ist, als das Dreieck. Nun ist aber das Vieleck größer, als das Dreieck, weil sie zwar beide gleiche Höhen haben, aber der Umfang des Vielecks größer ist, als der Umfang des Kreises, also größer, als die Grundlinie des Dreiecks. Es kann daher, da dies nicht stattfinden kann, der Kreis auch nicht kleiner sein, als das Dreieck. Da nun hierdurch bewiesen ist, daß der Kreis nicht größer, aber auch nicht kleiner sein kann, als das Dreieck, so muß es demselben gleich sein.

In einer andern Abhandlung lehrt Archimedes, wie der Flächeninhalt der Parabel gefunden werden könne, einmal mit Hülfe von Sätzen aus der Statik und dann auf rein geometrischem Wege. Man denke sich eine Parabel und auf ihrer Achse eine Linie senkrecht, so erhält man einen Flächenraum, dessen Basis eine Gerade und übrige Gränzlinie eine Parabel ist. Die Basis wird von der Achse in zwei gleiche Theile getheilt; verbindet man den Scheitel mit den Endpunkten der Grundlinie, so entsteht ein Dreieck, außerhalb welchem zwei Abschnitte bleiben, von den Seiten des Dreiecks und der Parabel begränzt. Halbirt man die Hälften der Grundlinie abermals und zieht aus den Halbirungspunkten Parallellinien zur Achse, so werden auf der Parabel zwei neue Punkte bestimmt, welche, auf jeder Seite mit dem Scheitel und dem Endpunkte der Basis verbunden, zwei neue Dreiecke erzeugen, von denen nun Archimedes erweist, daß sie zusammen den vierten Theil des ersten Dreiecks ausmachen. Diese Dreiecke lassen auf jeder Seite wieder zwei Parabelabschnitte übrig, in welche auf gleiche Weise Dreiecke eingeschrieben werden können; auch hier zeigt er, daß diese vier Dreiecke zusammen so groß sind, als der vierte Theil der beiden vorigen, u. s. w. Es werden also auch hier in die Parabel, über der Grundlinie, Vielecke eingeschrieben von immer doppelter Seitenzahl, und jedes neue Vieleck fügt dem vorhergehenden etwas zu, was den vierten Theil der vorigen Zunahme beträgt. Nimmt man nun das erste Dreieck und die auf einander folgenden Zunahmen, so ist klar, daß man der Fläche der Parabel um so näher kommt, je weiter man hierin geht. Archimedes lehrt daher jetzt auch, wie man die Summe einer Reihe finden kann, in welcher jedes folgende Glied den vierten Theil des vorhergehenden beträgt. Auf eine eigenthümliche Weise findet er, daß, wenn man bei irgend einem Gliede stehen bleibt, die Summe der ganzen Reihe nebst dem dritten Theil des letzten Gliedes ist gleich $\frac{4}{3}$ des ersten Gliedes. Das erste Glied der Reihe ist nun das zuerst eingeschriebene Dreieck, so daß also jetzt der Flächeninhalt der Parabel nebst dem

dritten Theil des letzten Gliedes gleich ist $^1/_3$ dieses Dreiecks. Da man nun das letzte Glied so weit hinausrücken, also so klein machen kann, als man will, so ergibt sich der Satz, daß die Parabelfläche wirklich $^4/_3$ des ersten Dreiecks, oder $^2/_3$ des auf der Grundlinie bis zum Scheitel errichteten Rechtecks ist. Einen solchen Schluß gestatteten sich aber die Alten nicht, und Archimedes verfährt daher wie bei dem Kreise und beweist, durch die Reductio ad absurdum, daß die Parabelfläche nicht größer, aber auch nicht kleiner sein kann, also gleich sein muß $^4/_3$ des eingeschriebenen Dreiecks.

Ein anderes Werk, aus zwei Büchern bestehend, handelt von dem Cylinder und der Kugel. Hier bewies Archimedes, daß die Oberfläche der Kugel viermal so groß ist, als ein größter Kreis derselben, oder als die Seitenfläche eines Cylinders von gleicher Höhe und Durchmesser mit der Kugel, überhaupt, daß ein solcher Cylinder, sowohl in Bezug auf seine Oberfläche, als auch auf seinen Körperinhalt, noch ein halbmal größer ist, als die Kugel. Ferner wird hier bewiesen, daß die Oberfläche eines Kugelabschnittes gleich sei einem Kreise, dessen Radius so groß ist, als die Entfernung des Schnittes von dem Umfange des Grundkreises. Das zweite Buch enthält verschiedene Sätze und Aufgaben, z. B. wie die Oberfläche oder der Körperinhalt einer Kugel durch eine Ebene in zwei Theile getheilt werden, welche ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben u. a. m. Wie in den vorigen Abhandlungen tritt auch hier das Bestreben hervor, die in Untersuchung gezogenen Gegenstände auszumessen oder sie auf bekannte Dinge zurückzuführen, wodurch das Ziel erreicht wird. Das Gleiche gilt in der umfassenden Abhandlung von den Konoiden und Sphäroiden. Wenn Parabeln oder Hyperbeln um ihre Achse gedreht werden, so erzeugen sie Körper, welche Konoide (kegelähnliche Körper) genannt werden. Schneidet man einen solchen Körper senkrecht zur Achse, so ist der Schnitt ein Kreis; parallel zur Achse eine Parabel oder eine Hyperbel; ein schiefer Schnitt gibt eine Ellipse. Werden Ellipsen um ihre Achsen gedreht, so entstehen Sphäroiden (kugelähnliche Körper); auch bei diesen erzeugen Schnitte senkrecht zur Achse Kreise, andere Schnitte aber Ellipsen. Zuerst bringt nun Archimedes die Ellipse zurück auf den Kreis, indem er beweist, daß die Flächenräume von Kreis und Ellipse sich verhalten wie die große Achse zur kleinen, wenn vorausgesetzt der Kreis zum Durchmesser die große Achse der Ellipse hat. Sodann vergleicht er die Körperräume der Konoide mit Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe, und findet hier für parabolische Konoide das Verhältniß des Konoides zum Kegel wie $3 : 2$ und, wenn a die halbe Achse der Hyperbel und h die Höhe des geraden Kegels, also auch des entsprechenden Konoides — das gleiche Verhältniß $3\,a + h$ zu $2\,a + h$. Wenn ein Sphäroid senkrecht zur Achse durch den Mittelpunkt geschnitten, also in gleiche Hälften getheilt wird, so findet er das Verhältniß des halben Sphäroids zum eingeschriebenen Kegel wie $2 : 1$; wenn der Schnitt zwar, senkrecht zur Achse, aber nicht durch den Mittelpunkt geht, so verhält sich ein Abschnitt zum eingeschriebenen Kegel wie $3\,a - h : 2\,a - h$, wo a die halbe große Achse der Ellipse und h die Höhe des Abschnittes, also auch des Kegels ist. Archimedes dehnt seine Untersuchung auch auf schiefe Schnitte aus, und erhält entsprechende Resultate.

Die letzte bedeutende Arbeit, welche der reinen Mathematik angehört, ist die Untersuchung der Spirallinie, welche noch heute den Namen der archimedischen trägt, obgleich Konon, ein Freund des Archimedes, ihr Erfinder ist. Sie entsteht, wenn der Radius eines Kreises in gleichen Zeiten durch gleiche Winkel geführt wird und dabei der beschreibende Stift vom Mittelpunkte aus den Radius gleichförmig durchläuft, so daß er bei einer einmaligen Umdrehung

das Ende des Radius erreicht, oder überhaupt, wenn die beschreibenden Strahlen in ihren aufeinander folgenden Lagen den beschriebenen Winkeln proportional sind. Zuerst beschäftiget sich Archimedes mit der Erzeugung der Spirale, zeigt dann die Konstruktion der Tangente, und beweist, daß, wenn bei einmaliger Umdrehung auf dem Strahle im Mittelpunkte eine Senkrechte errichtet und an das andere Ende eine Tangente an die Kurve gelegt wird, bis sich beide Linien durchschneiden, die Senkrechte gleich ist dem Umfange des Kreises. Eben so bei einer zweimaligen Umdrehung ist diese Senkrechte das Doppelte des Umfanges des zweiten Kreises u. s. w. Am meisten beschäftiget er sich mit der Auffindung des Verhältnisses der Fläche der Spirale zu der des Kreises. Wenn der erzeugende Strahl n Umdrehungen gemacht hat, so ist die erzeugte Fläche $(n(n-1)+{}^1/_3)\,k$, wo k den Flächeninhalt des ersten Kreises bedeutet. In diesem Ausdrucke ist das Gesammtresultat der Untersuchungen des Archimedes enthalten; die erste Umdrehung erzeugt die Fläche ${}^1/_3\,k$, die zweite ${}^7/_3\,k$, die dritte ${}^{19}/_3\,k$, die vierte ${}^{37}/_3\,k$ u. s. w., folglich sind die Zunahmen ${}^6/_3\,k$, ${}^{12}/_3\,k$, ${}^{18}/_3\,k$, ... oder 2 k, 4 k, 6 k, ... , und die Flächen wachsen von einer Umdrehung zur andern um 2 k.

Außer den genannten Schriften ist noch eine vorhanden, welche eine Reihe Sätze über Kreise enthält und der Elementargeometrie zufällt. Es ist zwar wahrscheinlich, daß auch noch andere vorhanden waren, die diesem Gebiete angehören, die nicht auf uns gekommen sind, von welchen sich aber Andeutungen vorfinden; allein diese scheinen doch nicht aus seiner Feder geflossen zu sein; sie sind unter dem Namen der Lemmen des Archimedes bekannt. Jedenfalls sind wir im Besitze seiner wichtigsten Arbeiten. Für den Glanzpunkt seiner Entdeckungen scheint er den Satz gehalten zu haben, daß die Seitenfläche des der Kugel umschriebenen Cylinders gleich ist der Oberfläche der Kugel, da er gewünscht haben soll, sein Grabmal möge die Hinweisung darauf der Nachwelt überliefern. Bekannt sind seine großen Verdienste um die Mechanik. Wir besitzen über diesen Zweig der angewandten Mathematik zwei Abhandlungen von ihm; er zeigte auch zuerst, daß ein Körper im Wasser so viel von seinem Gewichte verliere, als das Gewicht des durch ihn verdrängten Wassers beträgt. Ruhmvoll beschloß er seine Laufbahn, indem er seine Mitbürger, in der Vertheidigung ihrer Vaterstadt gegen die Römer, durch seine Kenntnisse unterstützte, und bei der endlichen Einnahme derselben unerkannt von einem römischen Soldaten getödtet wurde. Bekannt ist die Sage von seiner Verwendung der Brennspiegel zur Zerstörung der Schiffe der Römer; wenn nun auch aus manchen Gründen die Sache nicht sehr wahrscheinlich erscheint, so dürfte die Wirkung solcher Spiegel in dieser Zeit gleichwohl nicht unbekannt gewesen sein.

Beinahe gleichzeitig mit Archimedes war Eratosthenes (geb. 276 v. Chr.), ein Mann von umfassender Gelehrsamkeit. Er war Vorsteher der Bibliothek zu Alexandrien, und hat sich mit Arithmetik und Geometrie beschäftigt, und seine Leistungen in der Geometrie werden sehr gerühmt; bekannt ist derselbe durch seine Methode, die Primzahlen aufzufinden. Obschon er berühmt war unter seinen Zeitgenossen, so läßt sich doch wenig Hierhergehöriges von ihm anführen, weil seine Arbeiten nicht auf uns gekommen sind. Das Gleiche gilt auch von manchen andern Geometern, so von Konon und Nikoteles u. A., welche über die Kegelschnitte geschrieben haben; ihre Werke, welche gewiß vieles Neue enthielten, sind durch andere, sie weit überragende, verdrängt und der Vergessenheit übergeben worden.

Auf Archimedes folgte bald ein nicht weniger bedeutender Geometer, der, wenn er seine berühmten Vorgänger auch nicht verdunkelte, ihnen doch mit Recht

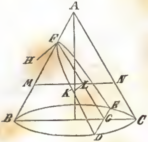
gleichgestellt wird. Apollonius aus Perga in Pamphilien (geb. 247), zu Alexandrien gebildet, lehrte daselbst und zu Pergamus. Seine zahlreichen Schriften sind, bis auf sein Hauptwerk über die Kegelschnitte, fast sämmtlich verloren gegangen; aus Andeutungen und Inhaltsangaben, welche sich bei späteren Gelehrten finden, sind sie aber von den Neuern ziemlich wiederhergestellt worden. Wenn nun diese Arbeiten auch nicht auf uns gekommen sind, so haben sie doch 18 Jahrhunderte später einen Wettstreit hervorgerufen, Aehnliches zu erzeugen, und Anregung zu einer Thätigkeit gegeben, welche manches Neue zu Tage gefördert hat. Diese Werke enthielten zum Theil Aufgaben, welche zu einer ausgedehnten Anwendung der geometrischen Analysis Veranlassung gaben, zum Theil gehörten sie in jenen Kreis von Untersuchungen, von welchen wir vermuthet haben, daß sie Gegenstände der Porismen Euklids gewesen sind.

Noch viel mehr hat das Werk über die Kegelschnitte die Aufmerksamkeit der späteren Geometer auf sich gezogen. Es war in acht Bücher getheilt, von welchen die vier ersten noch in griechischer Sprache vorhanden sind; die drei folgenden kennt man nur aus arabischen Uebersetzungen; das achte Buch ist verloren gegangen, im Allgemeinen aber seinem Inhalte nach bekannt. Ueber diese Arbeit spricht sich Apollonius selbst in einer Zuschrift an Eudemus kurz aus, was in Beziehung auf den Antheil, welchen er sich selbst zuspricht, nicht unwichtig ist. Er erwähnt hier, daß sein Werk aus acht Büchern bestehe, von welchen die ersten vier die Elemente enthielten, die vier andern aber der höhern Wissenschaft angehörten. „Das erste Buch, schreibt er, enthält die Erzeugung der Kegelschnitte und die Darstellung ihrer vorzüglichsten Eigenschaften; dieses Alles ist von mir in größerem Umfange und allgemeiner ausgearbeitet worden, als es von Anderen, die über die Sache geschrieben haben, geschehen ist. Das zweite Buch behandelt die Sätze über die Achsen und die Durchmesser der Kegelschnitte, so wie die Asymptoten. Das dritte Buch enthält viele und merkwürdige Theoreme, welche sich nützlich erweisen werden bei der Lösung bestimmter Aufgaben, wie auch bei solchen, welche auf geometrische Oerter führen; von diesen sind die meisten sehr schön und neu. Das vierte Buch enthält die Verbindungen der Kegelschnitte unter sich, auf wie viele Weisen sie unter sich oder mit dem Kreise zusammentreffen können, und auch noch vieles Andere, worüber von meinen Vorgängern nichts auf uns gekommen ist. Das fünfte Buch behandelt ausführlich die Lehre vom Größten und Kleinsten. Das sechste Buch enthält die Gleichheit und Aehnlichkeit der Kegelschnitte. In dem siebenten Buche finden sich Theoreme, welche bestimmten Aufgaben über die Kegelschnitte zur Grundlage dienen können; und das achte Buch ist solchen Aufgaben gewidmet."

Der ganze Verlauf in der Entwickelung der griechischen Geometrie gibt zur Genüge zu erkennen, wie man, durch die stets geforderte Ausführung der Konstruktionen, nothwendig auf die genannten Kurven kommen mußte, und zwar ehe man ihre Erzeugung am Kegel kannte. In den früher hierüber gegebenen Erläuterungen zeigte sich eine bestimmte Linie, durch die Aufgabe gegeben, von besonderer Wichtigkeit; an sie mußte ein Rechteck angestreckt werden, welches entweder über die ganze Linie sich erstreckte, oder um etwas zurückblieb, oder über die Linie hinausragte und dem Quadrate einer andern Linie gleich war. Bei der Ellipse und Hyperbel trat noch eine andere Linie hinzu, welche die Größe des zurückbleibenden oder überragenden Stückes bestimmen mußte. Diese Linie nun, an welche sich Alles knüpfte, trat aber gerade bei der Erzeugung am Kegel nicht hervor, und die Haupteigenschaft dieser Kurven, welche nach dem Früheren sich so natürlich ergab, mußte auf künstliche Weise erwiesen werden. Es ist daher, wie wir schon vermuthet haben, wahrscheinlich, daß diese krummen

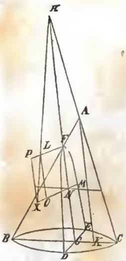
Linien schon frühe bekannt waren, als Kegelschnitte aber erst später erkannt wurden. Die Herleitung wurde an drei verschiedenen Kegeln genommen, so daß für jede Kurve nach dem Kegel eine Bezeichnung vorhanden war, neben welcher aber noch die jetzt gewöhnliche aus der Grundeigenschaft hervorgehende bestand. So stellt sich die Sache nun auch bei Archimedes, der sich der Ausdrücke, Schnitt des rechtwinkeligen Kegels und Schnitt des spitzwinkeligen Kegels bedient, dann aber gelegentlich auch einmal Parabel und Ellipse sagt. Apollonius bediente sich bei seiner Erzeugung nur eines einzigen Kegels, ja selbst des schiefen Kegels, dessen Basis ein Kreis war. Hierdurch wurden die vorzugsweise bisher gebrauchten Bezeichnungen der Kurven unanwendbar, und er ging wieder auf jene zurück, welche aus ihrer Grundeigenschaft hergenommen war. Auf diese Weise hat man die Sache zu nehmen, wenn gesagt wird, Apollonius habe die jetzigen Benennungen zuerst eingeführt.

Fig. 7.



Im 11. Satze des ersten Buches ist A B C das Achsendreieck eines geraden oder schiefen Kegels und der Schnitt D F E senkrecht zu demselben, und parallel zur Seite A C; hat nun die Linie H F, welche senkrecht zum Durchmesser F G in der Ebene des Schnittes gedacht wird, zu A F ein eben solches Verhältniß, wie B C^2 zu A C. A B, so beweist Apollonius, daß das Rechteck aus H F. F L gleich ist dem Quadrate von K L, und diese Kurve wird, wie wir wissen, Parabel genannt. Nun kann zwar diese Linie F H, welche Latus erectum, von uns aber Parameter genannt wird, leicht am Kegel selbst konstruirt werden, oder vielmehr, man kann den Beweis so einrichten, daß sie sogleich ohne jene Beziehung aufgenommen wird; hiervon weiß aber Apollonius noch nichts.

Fig. 8.



Ganz ähnlich verfährt er bei der Hyperbel. Unter denselben Voraussetzungen sei D F E der Schnitt und zur Achse F G sei A K parallel; H sei der Durchschnittspunkt von A C und G F. Ist nun F L so beschaffen, daß es sich zu A H verhält wie B K. K C zu A K^2 und zieht man H L X, so wird bewiesen, daß M N^2 = P F. F N. Hier gelten die gleichen Bemerkungen, wie bei der Parabel. Für die Ellipse gilt die gleiche Darstellung, nur liegt A K außer dem Kegel und K rückt also über C hinaus. Man erkennt hier sogleich die Uebereinstimmung mit den früher angegebenen Konstruktionen dieser Kurven, aber auch das zusammengesetzte Verhältniß, in welchem der Parameter zu gewissen Linien des Kegels steht, und daß daher diese Auffassung keine ursprüngliche ist. Es folgen sodann im ersten Buche die allgemeinsten Eigenschaften der Kegelschnitte, hierunter, der Uebergang von den Achsen zu conjugirten Durchmessern, und der Beweis, daß auch für diese die Grundeigenschaft in Bezug auf ihren Parameter stattfindet, so wie das Verhältniß derselben zu den Parametern der Achsen. Die Linie H F G ist die Achse. Sie hat die Eigenschaft, daß, wenn man eine Sehne zieht, welche zu ihr senkrecht ist, wie E D, diese durch die Achse

halbirt wird; zieht man aber überhaupt zwei zu einander parallele Sehnen und durch ihre Mittelpunkte eine neue Gerade, so ist diese ein Durchmesser, welcher auch durch die Mittelpunkte aller andern Sehnen geht, welche den ersten parallel sind. Bei den Kurven, welche einen Mittelpunkt haben, wie die Ellipse und Hyperbel, ist die Gerade, welche parallel mit den ersten Sehnen durch diesen Punkt gezogen ist, ein dem ersten conjugirter Durchmesser. Wenn man zu einem Durchmesser parallel eine Sehne zieht, so wird diese von dem andern Durchmesser halbirt. Wenn die conjugirten Durchmesser zu einander senkrecht sind, so nennt man sie Achsen; die genannten Kurven haben also zwei Achsen, eine Längenachse und eine Querachse, oder eine große und eine kleine Achse. Wenn man in einem Scheitel F einer Hyperbel eine Senkrechte zieht, so groß als die halbe kleine Achse, oberhalb und unterhalb von F G, Fig. 8, und wenn man durch den Mittelpunkt und die Endpunkte dieser Senkrechten gerade Linien zieht, so werden diese die Asymptoten der Hyperbel genannt. Diese Linien haben die Eigenschaft, daß die vier Aeste der Kurve an ihnen hinlaufen, sich ihnen immer mehr nähern, aber niemals sie erreichen können. Das zweite Buch enthält die meisten Sätze über die Asymptoten und die Durchmesser, und schließt mit einer Reihe von Problemen, welchen die Analysis beigefügt ist. Die 15 ersten Sätze des dritten Buches beziehen sich auf die Gleichheit gewisser Flächenräume von Tangenten und andern Linien gebildet; von den hierauf folgenden Sätzen lassen sich mehrere zusammenfassen in dem Satze: Wenn man von einem Punkte an einen Kegelschnitt zwei Tangenten zieht, und ihnen parallel zwei Sekanten bis zu ihrem Durchschnitte, so verhalten sich die Quadrate der Tangenten, wie die Rechtecke aus den Sekanten und ihren äußern Abschnitten. Der 27. Satz verdient besonders bemerkt zu werden, weil er in der neuern Zeit die Grundlage schöner Untersuchungen geworden ist. Wenn man von einem Punkte aus zwei Tangenten an einen Kegelschnitt zieht und die Berührungspunkte verbindet, hierauf durch den Durchschnittspunkt der Tangenten eine Transversallinie, welche sowohl diese Linie schneidet, als auch noch die Kurve in zwei Punkten, so sind die vier Punkte, welche hierdurch entstehen, vier harmonische Punkte. Im 45. Satze kommt Apollonius, — man sieht nicht wie, — auf die Brennpunkte; er nimmt in der großen Achse einen Punkt, von der Beschaffenheit, daß das Rechteck aus den Abschnitten der Achse gleich ist dem Rechtecke aus der halben großen Achse und dem halben Parameter, d. h. gleich dem Quadrate der halben kleinen Achse, eben so auf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunktes. Die Sätze 45—52 enthalten nun einige der Eigenschaften der Brennpunkte, z. B. der 48. Satz enthält, daß die Radien von den Brennpunkten nach einem Punkte des Umfanges gezogen, daselbst mit der Tangente an diesem Punkte gleiche Winkel bilden, und der 52. Satz, daß diese beiden Radien bei der Ellipse zusammen der großen Achse gleich sind. Die Brennpunkte sind die merkwürdigsten Punkte der Kegelschnitte, sie treten aber bei den Griechen gerade am wenigsten hervor. Wenn man die halbe große Achse als Hypotenuse und die halbe kleine Achse als Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks betrachtet, und zu beiden die andere Kathete sucht und mit dieser als Radius aus dem Mittelpunkte der Ellipse einen Kreis beschreibt, so gibt dieser zwei Durchschnittspunkte auf der großen Achse, welche die Brennpunkte sind. Der 52. Satz enthält nun die charakteristische Eigenschaft der Ellipse, nach welcher ein jeder Punkt derselben der Durchschnittspunkt zweier Kreise ist, welche aus den Brennpunkten als Mittelpunkte mit Radien beschrieben werden, deren Summe gleich der großen

Achse ist. Die Gerade, welche aus einem Brennpunkte nach dem Umfange gezogen wird, heißt ein Radiusvector. Auf dem 48. Satze beruht die Eigenschaft der Ellipse, welcher die Brennpunkte ihren Namen verdanken: wenn nämlich ein Schall-, Licht- oder Wärmestrahl von dem einen Brennpunkte ausgeht, so wird er an der Stelle der Kurve, welche er erreicht, unter demselben Winkel zurückgeworfen, und gelangt dadurch in den andern Brennpunkt, in welchem daher die Strahlen gesammelt werden und hier den ursprünglichen Effect wieder hervorbringen. Die Hyperbel hat ähnliche Eigenschaften: man beschreibt aus dem Mittelpunkte mit einem Radius, welcher gleich ist der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, wovon die halben Achsen die Katheten sind, einen Kreis, der die Achse in den Brennpunkten durchschneidet. Jeder Punkt der Hyperbel ist der Durchschnitt zweier aus den Brennpunkten beschriebenen Kreise, von der Beschaffenheit, daß der Unterschied ihrer Radien gleich ist der großen Achse. Die Parabel hat die Eigenschaft, daß irgend ein Punkt in ihr eben so weit vom Brennpunkte entfernt ist, wie von einer auf der Achse senkrechten Geraden. In allen Kegelschnitten ist der Parameter die Sehne des Brennpunktes. Im vierten Buche sind die 23 ersten Sätze nicht von Bedeutung; vom 24. Satze bis an das Ende betrachtet Apollonius Systeme zweier Kegelschnitte, und beweist, daß sie sich in nicht mehr als 4 Punkten schneiden können u. a. m.

Das fünfte Buch, welches über das Größte und Kleinste handelt, ist nichts Anderes, als eine Untersuchung über die Normalen aus einem Punkte an einen Kegelschnitt, es enthält 77 Sätze, in welchen der Gegenstand sehr vertheilt ist. Im 8. Satze wird z. B. bewiesen, daß, wenn in der Achse der Parabel irgend ein Punkt angenommen wird, und man von da aus gegen den Scheitel den halben Parameter aufträgt, daselbst eine Senkrechte errichtet und den so bestimmten Punkt der Kurve mit dem angenommenen Punkte verbindet, diese Linie die Kleinste ist, welche von diesem Punkte an die Kurve gezogen werden kann. Aehnliche Vorschriften werden für die beiden andern Kegelschnitte in Satz 9 und 10 gegeben, woraus sich denn ergibt, daß Apollonius unsre Ausdrücke für die Subnormale gekannt und darnach die Normalen konstruirt hat, welche bei ihm Kleinste oder Größte heißen. Viel schwieriger war die Aufgabe, von irgend einem Punkte außer der Achse an die Kurve eine Gerade so zu ziehen, daß der zwischen die Achse und die Kurve fallende Theil ein Kleinstes wurde. Hier zeigte nun Apollonius seine ganze Gewandtheit, denn es waren für den angenommenen Punkt die Bedingungen zu bestimmen, unter welchen überhaupt ein Kleinstes möglich war, und wenn, wie viele Fälle überhaupt stattfinden konnten. Wird die Frage unserer analytischen Methode unterworfen, und sucht man den Punkt der Kurve zu bestimmen, nach welchem von dem gegebenen Punkte aus eine Gerade gezogen werden muß, damit ein Kleinstes auf die erwähnte Art abgeschnitten werde, so gelangt man für die Parabel zu einer Gleichung vom dritten, für die beiden andern Kegelschnitte zu einer vom vierten Grade. Hier ist nun zu untersuchen, wie, für gewisse Bedingungen über die Lage des angenommenen Punktes, die Wurzeln der Gleichungen beschaffen und wie viele möglich sind; oder, wenn dieses vorausgesetzt wird, wie der Punkt gelegen sein muß. Dieser analytischen Betrachtung schließt sich Apollonius auf seine geometrische Weise an, und es bleibt schwer einzusehen wie es ihm, bei seiner Weise, gelungen ist, oft auf verwickelte Bedingungen zu kommen. Auf diesem Wege stellt er nun dar, daß es auf jeder Seite der Achse eines Kegelschnittes eine Reihe aufeinander folgende Punkte gibt, aus welchen man nach dem gegenüberliegenden Theile der Kurve nur eine Normale ziehen kann; er zeigt, wie diese Punkte gefunden werden können, und daß sie zwei

Räume von einander scheiden, welche so beschaffen sind, daß man von jedem Punkte des einen Raumes zwei Normalen, von jedem Punkte des anderen aber keine an die Kurve ziehen kann. Diese Punkte sind die Mittelpunkte der Berührungskreise, und bilden in ihrer Aufeinanderfolge neue Kurven, die Evoluten der Kegelschnitte, deren Kenntniß wir also schon bei Apollonius finden. Diese Untersuchungen kann man als das Höchste bezeichnen, was das Alterthum in dieser Art hervorgebracht hat. Weniger von Bedeutung ist das sechste Buch; dagegen bietet das siebente wieder um so mehr Interesse. In Satz 12 wird gezeigt, daß die Summe der Quadrate zweier conjugirten Durchmesser gleich ist der Summe der Quadrate der beiden Achsen; in 24, daß das Verhältniß zweier conjugirten Durchmesser kleiner ist, als das der Achsen; in 26, daß die Summe zweier conjugirten Durchmesser größer ist, als die der Achsen, und daß dieser Unterschied ein Maximum ist, wenn die ersteren gleich sind; in 31, daß, wenn man durch die Endpunkte solcher Durchmesser Tangenten zieht, welche ein Parallelogramm bilden, diese Flächen für alle Durchmesser gleich sind und gleich dem Rechtecke aus den beiden Achsen. Man erkennt hieraus, wie bedeutend die Verdienste des Apollonius um die Geometrie waren, selbst wenn nicht Alles, was er für sein Eigenthum ausgab, ihm wirklich angehörte, denn er wird uns als ein hochfahrender und ruhmsüchtiger Mann geschildert, der auch fremdes Verdienst sich anzueignen keinen Anstand nahm. Seine Thätigkeit muß übrigens sehr groß gewesen sein; es werden ihm zahlreiche Werke zugeschrieben, welche jedoch nicht auf die Nachwelt gekommen sind. Wenn nun auch die bekannten geometrischen Werke des Apollonius sich noch ganz an die eigentlich griechische Richtung anschließen, so kann ihm doch die Arithmetik nicht fremd gewesen sein, weil ihm Bemühungen zugeschrieben werden zur Verbesserung und Erweiterung der griechischen Zahlbezeichnung, worin er mit Archimedes zusammentraf. Auch soll er den Umfang des Kreises mit größerer Genauigkeit berechnet haben.

Um 210 lebte Heron aus Alexandrien, der besonders als Naturforscher bekannt ist; er war jedoch auch Mathematiker, und es ist in neuerer Zeit behauptet worden, daß in seinen Schriften eine Vorschrift zur Berechnung der Fläche des Dreiecks enthalten sei, von welcher später mehr die Rede sein wird.

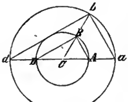
Aus dem zweiten Jahrhundert v. Chr. sind noch zwei Geometer anzuführen, die der alexandrischen Schule angehörten. Nikomedes erfand die Muschellinie oder Conchoide und wandte sie auf das Problem der mittleren Proportionalen und auf die Dreitheilung des Winkels an. Kurz nach Nikomedes hat Geminus über verschiedene Kurven geschrieben und unter andern über die Schraubenlinie, eine Kurve doppelter Krümmung; ein anderes Werk desselben scheint eine Darstellung der Entwickelung der griechischen Geometrie gewesen zu sein.

Vierte Periode. Zweite alexandrische Schule. Vorherrschen der arithmetischen Richtung und der Naturwissenschaften. Arithmetiker und Astronomen.

Die alexandrinische Schule verfolgte consequent ihre Richtung, und die Erforschung der Natur in ihren Theilen machte immer größere Fortschritte. Mit Glück hatte man angefangen, die Mathematik auf die Naturwissenschaften anzuwenden, Euklid in der Optik und Mechanik, und Archimedes in der Mechanik. Die Astronomie besonders blühte in Alexandrien; von der bloßen Beobachtung war man bereits zu wirklichen Messungen vorgeschritten, aber die Mathematik konnte diesem Zweige noch wenig Unterstützung gewähren. Die Rückwirkung konnte jedoch nicht ausbleiben, und was die Zeit bedarf, erzeugt sie sich

unabweislich. Die Verwendung des Kreises zum Messen der Winkel ist uralt und allein durch die Astronomie herbeigeführt worden. Man theilte den ganzen Umfang in 4 gleiche Theile, Quadranten; jeden Quadranten wieder in 90 gleiche Theile, welche wir jetzt Grade nennen; eben so den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden. Der Ursprung dieser Eintheilung ist eben so wenig zu verfolgen. Wenn die Seiten eines Dreiecks gegeben sind, so kann man dasselbe zeichnen; legt man nun auf eine Ecke, in geeigneter Weise, einen getheilten Kreis, so kann man sehen, wie viele Theile des Kreises den Winkel umfaßt oder wie viele Grade er enthält. Diese Methode setzt eine genaue Zeichnung, ein gut getheiltes Instrument und den Gebrauch voraus, die Linien und Winkel durch Zahlen darzustellen, was die Griechen bisher in ihren wissenschaftlichen Werken nicht gethan hatten; dabei gewährte sie nur eine geringe Annäherung. Es mußte daher eine Methode erfunden werden, die unbekannten Stücke einer Figur durch Rechnung mit größerer Genauigkeit, wenn auch nur annäherungsweise, zu erhalten. Den Grund zu einer solchen Methode hatte schon Archimedes in seiner Kreisrechnung gelegt; er hatte die Verhältnisse der Seite des Sechseckes und aller Halbirungen derselben bis zum 96eck, zum Durchmesser des Kreises berechnet; es war nur ein kleiner Schritt weiter, den Durchmesser in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen, und die Seiten dieser Vielecke in solchen Theilen auszudrücken. Mit der Kenntniß solcher Sehnen des Kreises hat es aber folgende Bewandtniß.

Fig. 9.



Es sei A B die Seite des ordentlichen Sechsecks im Kreise, so ist der Winkel A C B der 6. Theil von 360°, also = 60°. Man nehme nun an, der Durchmesser enthalte oder sei eingetheilt in 120 gleiche Theile, so kommen dann auf A B 60 solcher Theile. Ist nun dieses bekannt, und wollte man in einem rechtwinkeligen Dreiecke a b d, in welchem Winkel a d b = 30°, Winkel a b d = 90° und a b = 142 Längeneinheiten beträgt, die Seite a d berechnen, so würde folgende Betrachtung zum Ziele führen: Man denke sich, es sei a b d das Dreieck, also a d b = 30° und a b = 142 Theile; beschreibt man über a d als Durchmesser einen Kreis, so geht dieser über b, weil alle Dreiecke im Halbkreise rechtwinkelig sind. Man beschreibe ferner aus demselben Mittelpunkte einen zweiten Kreis, dessen Durchmesser A D = 120 und zeichne das Dreieck A B D, so daß wieder Winkel A D B = 30°. Die Dreiecke A B D und a b d sind ähnlich. Zieht man jetzt C B, so geht die Verlängerung dieser Linien durch b und es ist der Winkel a C b = A C B das Doppelte von A D B oder a d b, also 60°. Wenn nun der Durchmesser A D 120 Theile enthält, so enthält die Sehne A B 60 Theile, und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke kann man jetzt folgende Proportion ansetzen: A B : a b = A D : a d oder 60 : 142 = 120 : a d; hieraus folgt a d = $\frac{120 . 142}{60} = 2 . 142$ = 284. Auf diese Weise kann man also finden, daß wenn in einem rechtwinkeligen Dreiecke a b d die Seite a b = 142 und der Winkel a d b = 30° die Hypotenuse a d = 284 ist. In derselben Weise kann man auch b d berechnen, sobald man die Sehne B D kennt für den Durchmesser A D = 120; diese Sehne entspricht dem Winkel B C D = 2 . < A C B = 2 . 60 = 120°. Ueberhaupt, wenn man für alle Mittelpunktswinkel von 0° bis 180° die Längen der zugehörigen Sehnen in Theilen des Durchmessers ausgedrückt kennt, so kann man alle vorkommenden Rechnungen über das rechtwinkelige Dreieck aus-

führen, und auch für jedes schiefwinkelige Dreieck, da sich dasselbe in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegen läßt. Man denke sich nun eine Tafel, in welcher auf der einen Seite die Winkel und auf der andern die Längen der zugehörigen Sehnen stehen, so lassen sich aus den Seiten auch die Winkel finden. Es sei wieder in dem Dreiecke a b d, a b = 142 und a d = 284, also zwei Seiten gegeben; man will wissen, wie groß der Winkel a d b ist. Es ist a d : A D = a b : A B, also 284 : 120 = 142 : A B, mithin A B = $\frac{120 . 142}{284}$ = $\frac{120}{2}$ = 60; nun findet man aber in der Tafel, daß wenn A B = 60 ist, so muß der Winkel A C B = 60^0, also Winkel A D B = $<$ a d b = 30^0 sein. Wer diesen Gedanken, die Sehnen auf solche Art zu benutzen, zuerst angeregt hat, oder woher die Anregung gekommen, ist natürlich nicht zu ermitteln; aber die Ansichten der Griechen in der Geometrie mußten erst eine völlige Umwandlung erleiden, ehe sie dazu kommen konnten. Diese Richtung wurde jedoch bald vorherrschend, und wir haben wenig bedeutende Erzeugnisse mehr in der eigentlichen Geometrie anzuführen. Merkwürdig bleibt es immer, daß gerade Alexandrien der Hauptsitz dieser Richtung wurde, der Ort, an welchem die geistigen Erzeugnisse und die Ideenkreise der ganzen alten Welt zusammenfloßen und sich zu Neuem zu gestalten strebten. Derjenige Theil von der Mathematik, welcher lehrt, wie man aus einer hinreichenden Anzahl gegebener Stücke einer Figur die übrigen berechnen kann, wird jetzt allgemein Trigonometrie genannt, obschon sich dieß ursprünglich nur auf das Dreieck bezog. Man theilt sie ein in die ebene und die sphärische Trigonometrie, je nachdem das zu berechnende Dreieck in einer Ebene liegend von geraden Linien gebildet wird, oder auf der Oberfläche einer Kugel durch Schnitte größter Kreise entsteht. Die letztere war es nun, welche besonders zur Astronomie erfordert und deßhalb auch zuerst kultivirt wurde, und hier zeigt sich nun wieder, wie die Anwendung der Mathematik auf Lebenszwecke immer gegen die der geistigen Interessen zurückblieb.

Der erste, der in dieser Richtung ausgezeichnet gewesen zu sein scheint, und den Uebergang aus der vorhergehenden in diese Periode bildet, war Hipparchos aus Nikäa in Bithynien in Kleinasien. Er lebte auf Rhodus und dann in Alexandrien, und starb um 125 v. Chr. Als der wahre Begründer der mathematischen Astronomie wird er mit Recht der größte Astronom des Alterthums genannt. Er hat ein Werk in zwölf Büchern geschrieben, worin von den Sehnen der Kreisbögen gehandelt wird, und seine astronomischen Berechnungen erforderten die Kenntniß der ebenen und sphärischen Trigonometrie, deren Erfindung man ihm zuschreibt, weil vor ihm noch keine Spur dieser Zweige der Geometrie nachgewiesen werden kann. Nur Weniges von seinen Arbeiten ist auf uns gekommen, und die Berichte anderer Schriftsteller lassen uns nicht erkennen, wie seine Untersuchungen beschaffen und wie weit sie gediehen waren. Man weiß, daß er zuerst ein Verzeichniß von Fixsternen angelegt hat, und es liegt bei dieser Richtung nicht sehr ferne zu vermuthen, daß er auch der erste gewesen sein möchte, der eine Sehnentafel entworfen hat. Hierauf kam eigentlich Alles an; die Trigonometrie bedurfte Tafeln, in welchen für jeden Mittelpunktswinkel die Länge der Sehne, in Theilen des Durchmessers ausgedrückt, enthalten war.

Theodosius von Tripolis in Bithynien (ungefähr 100 v. Chr.) hat drei Bücher über die Kugelschnitte geschrieben, in welchen er die allgemeinsten

Verhältnisse der größten Kreise der Kugel und ihrer Abschnitte und Sehnen gegen einander darlegte. Diese Untersuchungen waren, wenigstens theilweise, eine Grundlage für die sphärische Trigonometrie, obgleich über die sphärischen Dreiecke darin noch nicht gehandelt wird. Im dritten Buche kommen einige Sätze über größte und kleinste Entfernungen unter gewissen Bedingungen vor.

Die alexandrinische Schule war jetzt im Rückgange begriffen, die eigentlich wissenschaftlichen Bestrebungen überhaupt auf der Neige; der Grund davon lag besonders in den allgemeinen Weltverhältnissen. Wir haben bisher keine Veranlassung gehabt, Roms und der Römer zu gedenken, und sie erscheinen uns auch jetzt nur als die Ursache einer langen Unterbrechung in der Reihe wissenschaftlicher Forschungen. In Italien fanden sich ursprünglich nahezu dieselben Elemente, wie in Griechenland zusammen, aber der Entwickelungsgang war ein durchaus verschiedener. Es trat hier nicht eine Einwanderung ein, welche das frühere Element absorbirend, herrschend wurde und ein neues großes Ganze bildete, wenigstens geschah dieses nur theilweise; sondern es setzten sich vielfache Elemente, fremde und verwandte, neben einander und durchsetzten sich, eifersüchtig ihre Unabhängigkeit und Selbstständigkeit bewahrend. Hier waren die Kämpfe nicht mit einem Male und im Großen abgethan; sie gingen von Stadt zu Stadt oft durch lange Zeit hindurch, bis sich auf die verschiedensten Weisen, sehr häufig durch Verträge, die Verhältnisse feststellten. Solche Vorgänge wiederholten sich, neue Elemente traten in bestehende Rechtsverhältnisse ein und modifizirten sie, weil sie nicht mächtig genug waren, sie aufzuheben. Unter solchen Umständen war eine Entwickelung wie in Griechenland unmöglich, es fehlte auch die äußere Anregung dazu, und nur was auf den Staat und das Staatsleben und die damit verknüpften Rechtsverhältnisse Bezug hatte, trat als wichtiges Moment hervor und fand seine volle Entwickelung. Rom war längst mächtig geworden, und hatte seine Waffen in die Ferne getragen, als die innere Verschmelzung noch nicht vollendet war, und die Kämpfe, welche ihr vorangingen, brachten den Staat mehrmals seiner Auflösung nahe, welche nur dadurch verhütet wurde, daß die widerstrebenden Elemente nach Außen verwendet im Siegesruhme ihre Einigung fanden. So kam es, daß die Römer ein eroberndes und weltbeherrschendes Volk wurden, dabei aber jenen großartigen Erzeugnissen des Geistes ferne blieben, welche die Hauptvölker des Alterthumes auszeichneten. Durch die Eroberung Unteritaliens kamen sie mit griechischer Wissenschaft und Kunst in Berührung, aber sie wurden von ihnen nicht gehegt und genähret; im Gegentheile, wo die Römer ihre Herrschaft begründeten, hörten jene höheren Bestrebungen auf. Dieser Zustand änderte sich erst dann, als auch Rom dem gleichen Schicksale wie Griechenland anheim fiel, als mit den Erzeugnissen und Reichthümern der Welt auch die Ueppigkeit und Verweichlichung in Rom einkehrte und in ihrem Gefolge auch die Laster der eroberten Völker. Das Leben war verfeinert worden, der Geist verlangte feinere Genüsse, und so fand das entartete griechische Wesen leicht Eingang, damit aber zugleich auch die griechische Wissenschaft und Kunst. Für eine selbstständige Thätigkeit war es aber zu spät; die Römer vermochten wohl das Vorhandene, und zwar nur theilweise sich anzueignen; aber es weiter führen oder Neues zu begründen waren sie nicht im Stande. Die Mathematik besonders stand bei den Römern nicht in gutem Ansehen, und die Astronomie selbst war so vernachläßiget, daß meistens Griechen sie ausübten; ja, als Cäsar nöthig fand, den Kalender zu verbessern, mußte er sich dazu eines alexandrinischen Astronomen bedienen. Es ist bei der ganzen Richtung der Römer sehr begreiflich, wie sie eine Wissenschaft mißachten mußten, welche keine unmittelbare Beziehung zum Leben zu haben schien, und

die tiefsinnigen Forschungen der großen Geometer Griechenlands konnten ihnen nur als etwas sehr Unnützes erscheinen; ihre Feldmesser leisteten, was von ihnen gefordert wurde, ein Mehreres brauchten sie nicht.

Aegypten war von dem Einflusse der neuen Weltgestaltung nicht verschont geblieben, und durch mehrere Jahrhunderte begegnen wir keinem Namen von Bedeutung. An die erste Erscheinung der Römer in Alexandrien knüpfte sich schon ein für die Wissenschaften trauriges Ereigniß: ein Theil der großen Bibliothek ging zufällig in Flammen auf. Unter dem Kaiserreiche wurden die Verhältnisse besser, die Wissenschaften wurden wieder geschätzt und gefördert, und eine zweite alexandrische Schule blühte auf. Menelaus aus Alexandrien war seit der Besitznahme Aegyptens durch die Römer der erste Astronom von Bedeutung; er lebte unter Trajan zu Rom, also gegen das Ende des ersten Jahrhunderts (n. Chr.). Von seinen Werken besitzen wir noch ein Aehnliches wie das von Theodosius; er hat drei Bücher über die Geometrie der Kugel geschrieben, worin er weiter geht, als dieser, und die Eigenschaften der sphärischen Dreiecke entwickelt, aber noch nicht ihre Berechnung lehrt. Hier kommen nun auch einige Sätze vor, welche einer nähern Erwähnung verdienen. Wenn man in der Ebene eines geradlinigen Dreiecks eine gerade Linie zieht, welche zwei Seiten des Dreiecks und die Verlängerung der dritten durchschneidet oder auch nur die Verlängerungen aller Seiten, so entstehen auf jeder Seite zwei Abschnitte, im Ganzen also sechs, welche so beschaffen sind, daß das Produkt von dreien, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, gleich ist dem Produkte der drei übrigen. Dieser Satz, welcher schon vor Menelaus bekannt war, wird von ihm auch für das sphärische Dreieck bewiesen, wenn die Seiten desselben auf ähnliche Weise durch einen größten Kreis getheilt werden. Eben so beweist er, daß, wenn ein Winkel eines solchen Dreiecks durch einen größten Kreis halbirt wird, die Abschnitte der gegenüber liegenden Seite sich verhalten, wie die anliegenden Seiten, und daß, wenn auf gleiche Weise alle drei Winkel halbirt werden, die Halbirungskreise sich in einem Punkte schneiden; bekanntlich gelten beide Sätze auch für das ebene Dreieck. Ein anderes Werk des Menelaus über die Berechnung der Sehnen in sechs Büchern, welches verloren gegangen ist, scheint außerdem, wie es natürlich ist anzunehmen, die Berechnung der ebenen und sphärischen Dreiecke enthalten zu haben. Ein drittes, ebenfalls verlorenes, Werk soll von den krummen Linien gehandelt haben.

Bald nach diesem Astronomen trat ein anderer auf, dessen Name alle andern verdunkelt hat, was besonders der Unkenntniß der Leistungen seiner Vorgänger zugeschrieben werden muß, deren Werke verloren gingen, während seine umfassenden Arbeiten der Nachwelt überliefert wurden. Klaudius Ptolemäus aus Pelusium in Aegypten wird zu den größten Astronomen des Alterthums gerechnet. Wir wissen, daß er 125 n. Chr. in Alexandrien eine Mondsfinsterniß und 139 die Planeten beobachtet hat; überhaupt geht die Reihe seiner Beobachtungen von 125 bis 141, und in diesen Zeitraum möchte daher wohl seine Blüthezeit fallen. Das Werk des Ptolemäus, welches ihm seinen großen Namen verschafft hat, ist der bekannte Almagest, ein umfassendes Werk über Astronomie, welches zugleich den größten Theil seiner mathematischen Arbeiten eingeflochten enthält. Den Titel dieses Werkes könnte man durch „großes Lehrgebäude der Astronomie“ wiedergeben; die arabischen Uebersetzer haben diesen Titel verändert, und durch Entstellung des arabischen Ausdruckes ist die obige Bezeichnung entstanden. Diese Astronomie bestand aus 13 Büchern, in welchen Ptolemäus die früheren Entdeckungen über das Weltgebäude sammelte, und nach eigenen Beobachtungen prüfte und berichtigte. Er stellte das nach seinem Namen

benannte System auf, welches seinen Ruhm verewigte und bis auf Kopernikus als das richtige angesehen wurde. Auf gleiche Art, wie man dieß bei den indischen Astronomen findet, schiebt er seine mathematischen Untersuchungen da ein, wo er sie zu seinen Zwecken nöthig hat, und nur so viel, als er eben gebrauchen muß. So zeigt er im ersten Buche, wie die Sehnen des Kreises, welche bestimmten Winkeln am Mittelpunkte entsprechen, berechnet werden können, und geht hierbei von den Zahlenwerthen der Seiten des Vierecks, Fünfecks, Sechsecks und Zehnecks aus. Sie gaben ihm die Sehnen von 90°, 72°, 60° und 36° in Theilen des Durchmessers, diesen zu 120 Theile angenommen. Es ist nicht unwichtig, zu bemerken, daß bei den Griechen die Eintheilung des Grades in 60 Minuten u. s. f. auch auf die Eintheilung des Durchmessers angewandt wurde, und daß ein Theil desselben wieder in 60 kleinere Theile u. s. w. eingetheilt wurde. Die Eintheilung der Bögen und des Durchmessers geschah also nach demselben Systeme, aber mit verschiedener Maaßeinheit. Bei diesen Berechnungen leistete nun der Satz über das Kreisviereck: daß das Rechteck aus den beiden Diagonalen gleich ist der Summe der Rechtecke aus den Gegenseiten, besondere Dienste; er konnte benutzt werden, um aus den bekannten Sehnen zweier Bögen die Sehne der Summe und des Unterschiedes beider herzuleiten, eben so auch um aus der Sehne des ganzen Bogens die des halben aufzufinden. Mit den Ausdrücken, welche Ptolemäus hierfür hat, stimmen unsere moderne Formeln im Wesentlichen überein. Von den vier ersten Sehnen konnte er nun durch Halbirung auf die von 45°, 30° und 18° und eben so auf $22\frac{1}{2}$°, 15° und 9° und durch die beiden letzten auf $7\frac{1}{2}$° und $4\frac{1}{2}$° kommen. Durch Zusammensetzung gelangt man hierdurch wieder zu den Sehnen von $15° + 9° = 24°$ und $15° - 9° = 6°$ u. s. w.; die Sehne von 6° gibt durch Halbirung die Sehnen von 3°, $1\frac{1}{2}$° und $\frac{3}{4}$°. Um nun auf die Sehne von 1° zu kommen, schickt Ptolemäus den Satz voraus, daß bei Sehnen im Kreise das Verhältniß der größeren zur kleineren stets kleiner sei, als das Verhältniß der entsprechenden Bögen. Nun hatte er für die Sehne von $\frac{3}{4}$° den Werth erhalten $0^p\ 47'\ 8''$; nach dem angeführten Satze mußte also sein: Sehne 1° zu Sehne $\frac{3}{4}$° kleiner als 1° zu $\frac{3}{4}$° und hieraus Sehne 1° kleiner als $\frac{4}{3} \cdot 0^p\ 47'\ 8'' = 1^p\ 2'\ 50\frac{2}{3}''$. Nun hatte er aber auch gefunden, daß die Sehne von $1\frac{1}{2}° = 1^p\ 34'\ 15''$ und schloß nun auf gleiche Weise: Sehne von $1\frac{1}{2}$° zu Sehne 1° kleiner als $1\frac{1}{2}$° zu 1° und hieraus Sehne von 1° größer als $\frac{2}{3}$. Sehne von $1\frac{1}{2}° = \frac{2}{3} \cdot 1^p\ 34'\ 15'' = 1^p\ 2'\ 50''$. Er hatte somit gefunden, daß die Sehne von 1° kleiner sein mußte, als die erste Zahl, und größer, als die zweite; der wahre Werth mußte also zwischen beide fallen, und da der Unterschied nur Theile von Sekunden betrug, so nahm er mit Hinweglassung der Brüche die Sehne von $1° = 1^p\ 2'\ 50''$ an. Aus der Sehne von 1° erhielt er durch Halbirung die von 30′, und nunmehr konnte er leicht durch Zusammensetzung eine Tafel entwerfen, welche die Sehnen von allen Winkeln von 0° bis 180°, von 30 zu 30 Minuten enthielt. Bei der Genauigkeit, welche er durch seine Tafel zu erreichen vermochte, war eine größere Ausdehnung derselben nicht nöthig, indem eine leichte Rechnung die Sehnen für andere Winkel gab. Hierzu dienten die Unterschiede der Reihe der Sehnen, welche wie bei unsern Tafeln benutzt wurden, oder vielmehr, er theilte sogleich diese Unterschiede durch 30, um den Unterschied für eine Sekunde anzufügen. Mit dieser Tafel nun konnte Ptolemäus seine Rechnungen mit ziemlicher Genauigkeit ausführen.

Beispiele zur ebenen Trigonometrie finden sich im Almagest nur gelegentlich, wo er sie zu astronomischen Zwecken nöthig hat. Im Obigen ist schon der Weg bei der Rechnung im Allgemeinen angegeben worden. Ein Beispiel zur Berechnung

der Winkel eines ebenen Dreiecks aus den Seiten desselben findet sich im sechsten Buche, wo die Größe der Verfinsterung der Sonnenscheibe bei einer Sonnenfinsterniß berechnet werden soll. Ptolemäus berechnet nun zuerst den Unterschied der Abschnitte der Grundlinie, welche durch die Senkrechte entstehen, nach einer als bekannt vorausgesetzten Vorschrift, welche man auch bei den indischen Astronomen wieder findet; dieser Unterschied ist gleich dem Unterschiede der Quadrate der Seiten, dividirt durch die Grundlinie. In dem einen der beiden rechtwinkeligen Dreiecke konnte jetzt die Senkrechte vermittelst des pythagoräischen Satzes berechnet werden, welche, verdoppelt, zur Sehne des doppelten Bogens für beide Winkel an der Grundlinie wurde. Um nun einen der Winkel oder Bogen zu finden, nehme man seine entsprechende Seite als Halbmesser oder die doppelte Seite als Durchmesser eines Kreises an, so wird die doppelte Seite sich verhalten zum Durchmesser der Tafel (120^p) wie die berechnete doppelte Sehne zur Sehne der Tafel; hieraus wird nun die letzte gefunden und zu ihr aus der Tafel der Winkel oder Bogen. Diese Bögen wurden hier nur berechnet, um durch sie die Kreisausschnitte zu erhalten und nach Abzug der auf den Sehnen stehenden Dreiecke die Fläche der verfinsterten Sonnenscheibe. Zur Berechnung der Ausschnitte stellt Ptolemäus die Proportion auf: der Kreisumfang verhält sich zum Bogen wie die Kreisfläche zur Fläche des Ausschnittes. Die Rechnungen im Almagest verlangen besonders die sphärische Trigonometrie, und als Grundlage derselben dient der oben erwähnte Satz des Menelaus über die sechs Abschnitte, welcher auf die mannigfaltigste Weise angewandt wird.

Ein anderes berühmtes Werk des Ptolemäus ist seine mathematische Geographie in acht Büchern, in welchen er auf mathematische Weise durch astronomische Bestimmungen die Lage der Oerter in Länge und Breite genauer anzugeben sucht. Im achten Buche gibt er eine Anleitung zur Verfertigung von Landkarten, welche auf der Lehre von den Projectionen beruht. Er schrieb ferner ein Buch über die drei Dimensionen der Körper und ein Werk über Optik; unter seinen vielen Schriften sind die bisher angeführten wohl die wichtigsten.

Noch in diese Zeit mag Serenus gehören, welcher zwei Bücher über Cylinder- und Kegelschnitte geschrieben hat. In Alexandrien lebte ungefähr um 160 Hypsikles, den man für den Verfasser der beiden letzten Bücher Euklids hält, welche von den regulären Körpern handeln.

Wichtig ist Nikomachus aus Gerasa, ein Asiate, ungefähr um 100 n. Chr., weil er der erste Mathematiker ist, von welchem wir eine Schrift über Arithmetik besitzen. Das Werk besteht aus zwei Büchern, von welchen das erste der Eintheilung und den Eigenschaften der Zahlen gewidmet ist, Gegenstände, die gegenwärtig wenig mehr beachtet werden, über welche sich aber die Alten weitläufig verbreiteten. Zuletzt findet sich die Bemerkung, wie aus der Gleichheit, d. i. der Einheit, Alles hervorgehe. Im zweiten Buche setzt er nun dieses auseinander: hat man eine Reihe Einheiten, so entstehen daraus durch aufeinander folgendes Zuzählen die Zahlenreihe $1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $1 + 1 + 1 = 3$ u. s. w. Aus der Zahlenreihe erhält man auf gleiche Weise die dreieckigen Zahlen $1 = 1$, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$ u. s. w.; die viereckigen oder Quadratzahlen entstehen aus zwei dreieckigen, welche um eine Stelle von einander verschieden sind, oder: aus der Reihe 1, 3, 6, 10, 15, 21, . . . wird, wenn man sie noch einmal anschreibt, aber um eine Stelle zurücksetzt, und dann die unter einander stehenden Glieder addirt: $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $3 + 6 = 9$, $6 + 10 = 16$, $10 + 15 = 25$ u. s. w. Fügt man einer viereckigen Zahl die ihrer Stelle vorhergehende dreieckige zu,

so entsteht eine fünfeckige Zahl, oder: $1 = 1$, $1 + 4 = 5$, $3 + 9 = 12$, $6 + 16 = 22$.... Auf gleiche Art entstehen die sechseckigen Zahlen aus den dreieckigen und fünfeckigen u. s. w... Im Folgenden handelt Nikomachus von den Körperzahlen. Hier führt er nun an, daß in der Reihe der ungeraden Zahlen die erste der Kubus von 1 ist, die beiden folgenden zusammen $3 + 5 = 8$ der Kubus von 2, ebenso $7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$; $13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$..... Das letzte Buch handelt von den Proportionen: die arithmetische Proportion $a - b = c - d$ und die stetige $a - b = b - c$; die geometrische Proportion $a : b = c : d$ und die stetige $a : b = b : c$; die harmonische Proportion $a : c = a - b : b - c$. Hat man eine Reihe von vier Zahlen, von welchen die 1., 2. und 4. in arithmetischer, die 1., 3. und 4. in harmonischer Proportion stehen, so stehen alle vier Zahlen in geometrischer Proportion, z. B. 20, 16, 15, 12: hier ist $20 - 16 = 16 - 12$ aber auch $20 : 12 = 20 - 15 : 15 - 12$, daher noch: $20 : 16 = 15 : 12$; dieß wird „die vollkommenste Form" genannt.

Nikomachus war Pythagoräer; seine Arbeit stand in großem Ansehen und hat später sogar Commentatoren gefunden. Da er der erste seiner Schule ist, von welchem uns eine Schrift übrig geblieben, so ist sie schon deßwegen von Werth, weil wir aus ihr ersehen können, wie die Pythagoräer die Arithmetik behandelt haben und welchen Dingen sie ihre Untersuchungen zuwandten. Betrachtet man nun das Resultat einer beinahe 700 jährigen Bemühung von Pythagoras bis auf Nikomachus, so muß uns dieses als höchst unbedeutend erscheinen. Dabei ist nicht zu übersehen, daß Pythagoras selbst die Grundlagen seiner Untersuchungen aus der Fremde mitgebracht hatte, wie dieß von Jamblichus, einem Erklärer der Schrift des Nikomachus, von dem zuletzt angeführten Satze behauptet wird, welcher, nach ihm, eine Erfindung der Babylonier sein soll. Diese Erscheinung läßt sich nur aus dem eigenthümlichen Hange der Pythagoräer erklären, in den Zahlen geheime Beziehungen zum Universum und der Weltbildung und Weltordnung zu finden. In dem Aufsuchen der wunderbaren Eigenschaften der Zahlen verloren sie ganz ihre Bedeutung für die Wissenschaften und das Leben aus den Augen. Dieß war ganz das Gegentheil von dem, was die alexandrinischen Astronomen thaten, welche die sogenannte Logistik, d. h. die Lehre von den Zahlenoperationen, kultivirten und sie praktisch in die Geometrie und Astronomie einführten, wodurch sie der Mathematik und den Naturwissenschaften unendlichen Gewinn brachten. Wir haben früher immer das Eigenthümliche der griechischen Methode und die Form ihrer Darstellung und ihrer Beweise hervorgehoben; hierin war nun auch nach und nach eine Aenderung eingetreten, und neben dem Alten entwickelte sich etwas Neues. Die strenge Scheidung zwischen Theorem und Beweis oder Problem, Auflösung und Beweis fiel allmälig. Schon bei Archimedes und Apollonius trat dieß hervor. Wenn ein Theorem zur Lösung eines Problems geeignet war, wurde zuweilen sogleich davon die Anwendung gemacht, oder der Auflösung einer Aufgabe wurde die analytische Betrachtung vorausgeschickt. Die Porismen verlangten eine genetische Entwickelung und Ptolomäus hatte einen zusammenhängenden Vortrag. Das Gleiche findet sich nun auch bei Nikomachus; seine Darstellung ist erzeugend, aufbauend, und wir finden bei ihm zum erstenmale jene Beweisart, welche wir „den Beweis durch Induktion" nennen, wodurch eine Schlußfolge von Besonderem auf das Allgemeine ausgedrückt wird. Diese Beweismethode ist eine Folge seines Ganges, und wenn sie auch früher vielleicht schon vorhanden war, so ist sie uns doch durch ihn zuerst überliefert worden. Um ein einfaches Beispiel zu wählen, nehme man die Zahlenreihe und aus ihr die Bildung der drei-

eckigen Zahlen. Das erste Glied 1 ist auch die erste dreieckige Zahl, die beiden ersten Glieder $1+2=3$ geben die zweite, ebenso $1+2+3=6$ die dritte; es ist nun kein Grund vorhanden, anzunehmen, daß dieß nicht immer so fortgehen werde, und man wird berechtiget sein, zu behaupten, daß die $n$te dreieckige Zahl die Summe der n ersten Glieder der Zahlenreihe sein werde. In der Regel liegt die Ausdehnung eines Gesetzes auf alle Glieder einer Reihe naturgemäß in dem ganzen Gange der Entwickelung desselben für die ersten Glieder, und dadurch werden eben die Beweise durch Induction so einfach und zugänglich; sie ergeben sich leicht aus einer naturgemäßen Entwickelung. Die neuere Zeit hat diese Beweisart vervollkommnet, und sie gewährt, da wo sie angewandt werden kann, die elegantesten und einfachsten Darstellungen. Es ist nicht wahrscheinlich, daß zur Zeit des Nikomachus tiefer gehende Untersuchungen über die Zahlenlehre bekannt waren, als er uns überliefert hat; ein Buch, dessen Darstellung und Inhalt bloß für die ersten Anfänger bestimmt gewesen wäre, hätte unmöglich so viel Aufsehen erregen und so viele Erklärer beschäftigen können. Diese Vermuthung wird durch die nächstfolgenden Arbeiten bestätiget.

Die Akademie zu Athen hatte den Anfang unserer Zeitrechnung nicht erlebt, aber die Schriften ihres Stifters waren weithin verbreitet und wurden im ersten Jahrhundert fleißig studirt. Noch einmal suchte das geistige Hellenenthum sich zu einigen und zu kräftigen im Vorgefühle des Kampfes, welchem es erliegen sollte. Die Verschmelzung der pythagoräischen, platonischen und aristotelischen Systeme zu einem Ganzen, zu welchem sich Plato am besten als Mittelpunkt eignete, war ein stark hervortretendes Bestreben dieser Zeit. In Alexandrien waren orientalische Ansichten in Wissenschaft und Leben immer mehr eingedrungen, wie wir dieß namentlich für die Mathematik angegeben haben. Auch die Juden übten ihren Einfluß. Die Fürsten Aegyptens hatten sie, wie erwähnt, in ihr Land gezogen und in Alexandrien bestand ein großer Theil der Bevölkerung aus Juden, in den meisten Ländern an den Ufern des Mittelmeeres waren sie verbreitet. Unterdessen hatte aber auch das Christenthum sich ausgedehnt, und gegen die dreifache Macht des Judaismus, des Orientalismus und des Christenthums suchte nun die griechische Philosophie sich zu einigen, um den letzten Kampf mit Erfolg bestehen zu können.

Diesem Bestreben verdanken wir eine Arbeit des **Theon** von Smyrna, welche bezweckte, so viel von der Mathematik im Zusammenhange darzustellen, als nöthig war, um die Schriften des Plato völlig verstehen zu können. Theon lebte noch gleichzeitig mit Ptolemäus, scheint aber später als Nikomachus zu sein; von seinem Werke sind bis jetzt bloß die beiden ersten Theile bekannt, welche die Arithmetik und die Musik enthalten. Die 32 Kapitel, welche die Arithmetik bilden, stellen so ziemlich dasjenige dar, was schon Nikomachus gegeben hat; das Neue betrifft einige Eigenschaften der Quadratzahlen und eine andere Untersuchung, welche mehr Interesse darbietet. Im gleichschenkeligen und rechtwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat über der Hypotenuse doppelt so groß als das Quadrat über einer der Seiten; ein Quadrat, welches doppelt so groß ist als ein anderes, läßt sich daher leicht zeichnen, also auch die Seite desselben geometrisch darstellen. Anders ist es mit den Zahlen. Es gibt keine Quadratzahl, welche das Doppelte einer andern Quadratzahl ist; aber es gibt eine Reihe von Zahlen, welche so beschaffen sind, daß ihre doppelten Quadrate um eins vermehrt oder vermindert wieder Quadratzahlen liefern, oder die Gleichungen $2x^2 \pm 1 = y^2$ lassen sich immer in ganzen Zahlen auflösen. In der Arithmetik des Theon sind nun Betrachtungen enthalten, welche eigentlich die

Auflösungen dieser Gleichungen betreffen, und wenn er selbst auch noch keine klare Ansicht von der Sache hatte, so liegen in ihnen doch die ersten Anfänge solcher Untersuchungen.

Der nächste Arithmetiker Thymarides von Tarent gibt die Auflösung einer besonderen Klasse von Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen, was gleichfalls bei ihm zum ersten Male hervortritt. Wenn die Summe einer Anzahl unbekannter Größen gegeben ist und auch die Summen der ersten und zweiten, der ersten und dritten u. s. w., so gibt Thymarides an, wie die erste Unbekannte aus den gegebenen Größen gefunden werden kann.

Von hier an bis über die Mitte des vierten Jahrhunderts werden noch eine Menge Arithmetiker angeführt, deren Leistungen aber besonders in der Bearbeitung früherer Schriftsteller bestanden; die Wissenschaft scheint durch sie keinen Zuwachs mehr erhalten zu haben, denn die spätern Schriftsteller haben uns zum Theil das Material zu den obigen Angaben geliefert und gewiß das Wichtigste des zu ihrer Zeit Bestehenden angegeben. Um so überraschender tritt uns jetzt mit einem Male eine Erscheinung entgegen, welche, nach dem geschilderten Zustande der Zahlenlehre, ganz unerklärt dasteht, troß allen Bemühungen, welche man sich darum gegeben hat. Die Geometrie der Griechen haben wir in ihrer Entfaltung troß vieler Lücken leicht verfolgen können, ihre Fortschritte waren ganz naturgemäß und ihre Eigenthümlichkeiten nothwendig auf der angegebenen Grundlage, ihr wesentlicher Charakter war die aphoristische Form und der strenge synthetische Beweis. Die sogenannte Arithmetik der Griechen wurde ganz ebenso behandelt; auch hier wurde kein Satz ohne den strengsten Beweis gelassen. Es ist möglich, daß die Pythagoräer in ihren Schriften den zusammenhängenden Vortrag und die Beweise durch Induktion schon früher hatten und wenn, so waren sie sicher eine Schöpfung der Griechen; sie mußten nothwendig das aus der Fremde aufgenommene Element hellenisiren. Die Arbeit des Nikomachus, verglichen mit der Arithmetik des Euklides, zeigt uns den großen Unterschied in der Behandlungsweise, aber auch, wie die Pythagoräer die griechische Art in das fremde Element überzutragen suchten, wie auch für sie der Beweis, wenn auch in anderer Art, eine unerläßliche Bedingung war. Die Einführung und größere Verbreitung der Operationen mit Zahlen durch die alexandrinischen Geometer muß gleichfalls einem ähnlichen Einflusse zugeschrieben werden, denn diese ganze Richtung widerspricht der ältern ächt griechischen Weise; aber einen Einfluß auf die Zahlenlehre hat sie nicht geübt, und nur die Geometrie und Astronomie zogen davon Vortheil. Bei diesem Stande der Dinge bleibt es nun gänzlich unerklärlich, wenn man mit einem Male einen Arithmetiker, Diophantus, auftreten sieht, der Untersuchungen vorträgt, von welchen vor ihm keine Spur aufgewiesen werden kann, und dessen Methode von allen bisherigen durchaus verschieden ist. Man könnte Nikomachus und Thymarides und den langen Zeitraum, welcher zwischen ihnen und Diophantus liegt, anführen, aber kaum dürften ihre Schriften als Vorarbeiten gelten können, und wenn sie Nachfolger hatten, welche ihre Untersuchungen weiter führten, warum schwiegen von diesen alle späteren Schriftsteller und gingen immer nur auf die beiden genannten zurück? So spurlos konnten solche Arbeiten nicht verloren gegangen sein, daß auch nicht einmal mehr ein Name aufgeführt werden konnte. Zu einer solchen Höhe, wie sie schon Diophantus zeigt, gehört eine volle Entwickelung, gehören Zwischenstufen, welche hier gänzlich fehlen. Erst müßte gezeigt werden, wie die griechische Darstellung nach und nach eine andere Richtung genommen und in die des Diophantus übergegangen ist; denn in keiner Entwickelung hat noch je ein Uebergang gefehlt und kann niemals fehlen. Mit

Ptolemäus war außerdem die Produktivität des griechischen Geistes erloschen; alle späteren Schriftstellern haben nur Unbedeutendes noch zum Bestehenden hinzugefügt; sie hatten genug an der Erklärung der Alten zu thun. Von einem neuen Aufschwunge in der Mathematik schweigt aber die Geschichte gänzlich, und wer die jetzige Richtung der Zeit berücksichtiget, der wird zugestehen müssen, daß ein solcher nicht möglich war. Wir werden uns daher nach einer andern Quelle umsehen müssen, aus welcher Diophantus geschöpft, oder vielmehr, welche ihm den Stoff und die neue Richtung für seine Untersuchungen geliefert hat.

Es wird hier vor Allem nöthig, auf die bisherige Darstellung der Griechen bei ihren mathematischen Arbeiten zurückzugehen. Sie bedienten sich durchaus keiner Zeichen, um die verschiedenen Operationen auszudrücken, sie pflegten Alles durch Worte anzugeben. Die Figuren wurden mit Buchstaben bezeichnet, und dieß war die einzige Bezeichnung, eine Linie konnte aber auch eine Zahl vorstellen, eine Fläche das Produkt aus zwei Zahlen, ebenso ein Körper das Produkt aus drei. Es ist angeführt worden, daß alle Buchstaben der Griechen zugleich Zahlenwerth hatten und deßwegen zu einer anderen Bestimmung nicht mehr verwandt werden konnten. Die Arithmetiker bedienten sich nicht mehr der Linien, wie z. B. Nikomachus, sondern der Buchstaben als Zahlzeichen und an diesen Zahlen wurden alle Beweise geführt. Die Griechen konnten daher nicht, wie wir es thun, eine Unbekannte durch irgend einen Buchstaben bezeichnen, denn dieser hatte schon eine bestimmte Bedeutung. Alle Darstellungen mußten sehr weitläufig durch Worte ausgedrückt werden, wodurch das Verständniß sehr erschwert wurde. Wir haben ferner bei Euklid die geometrische Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades gefunden und Menächmus hat sogar schon gezeigt, wie die Wurzel der Gleichung $x^3 = 2a^3$ konstruirt werden konnte. Die besondere Art von Gleichungen, welche wir Proportionen nennen, waren allgemein bekannt und in Anwendung, aber Thymarides scheidet zuerst bestimmt bekannte und unbekannte Größen und löst eine einfache Aufgabe in Worten auf. Alles dieses war jedoch weit von dem entfernt, was wir Rechnung nennen, und diesen Auflösungen hat die Arithmetik ihre Vorschriften nicht entnommen, umgekehrt hat man die Bedeutung jener erst erkannt, als diese längst geübt wurden. Nach diesen Bemerkungen wird es nicht schwer sein, die Unterschiede in den Methoden gehörig zu würdigen.

Diophantus, dessen Zeitalter ungewiß ist, der aber mit großer Wahrscheinlichkeit in die zweite Hälfte des vierten Jahrhunderts gesetzt wird, war entweder aus Alexandrien oder er lehrte daselbst. Als Schriften von ihm werden angeführt: eine Arithmetik, eine Abhandlung über Polygonalzahlen und Sätze aus der Zahlenlehre. Die Arithmetik war ursprünglich in 13 Bücher getheilt. Die vorhandenen Manuscripte, welche eine wesentliche Uebereinstimmung zeigen, enthalten aber nur 6 Bücher und eines davon bei demselben Inhalte hat eine Eintheilung in 7 Bücher, so daß man geschlossen hat, es seien die 7 letzten Bücher verloren gegangen. Diese Ansicht ist in neuerer Zeit mit Recht bekämpft und behauptet worden, daß, wenn überhaupt etwas fehlt, dieß nicht am Ende, sondern zwischen dem ersten und zweiten Buche fehlt, und daß endlich überhaupt nicht so viel fehlt, als man geglaubt hat, indem wohl auch die Sätze aus der Zahlentheorie und die Schrift über die Polygonalzahlen Theile der Arithmetik ausgemacht haben möchten und keine selbstständigen Werke gewesen seien. Von den Untersuchungen über die vieleckigen Zahlen ist nur noch ein Theil vorhanden und die Sätze aus der Zahlentheorie sind ganz verloren. Sehr beachtenswerth bleibt aber, daß das Vorhandene ganz nach der alten griechischen

Methode behandelt ist, während wir etwas ganz anderes in der eigentlichen Arithmetik finden.

Diophantus hat nämlich unter allen Griechen sich zuerst gewisser Zeichen und Abkürzungen bedient, wodurch seine Rechnungen bedeutend erleichtert wurden. Da es am nächsten lag, hierzu die Buchstaben zu gebrauchen, so stieß er dabei auf die Schwierigkeit, daß alle, mit Ausnahme von einem, dem Schluß-s, schon bestimmte Zahlen ausdrückten. Er fand also nur ein Zeichen, welches keine besondere Bedeutung hatte, und durch welches er eine unbekannte Größe ausdrücken konnte. Da er sich nun keine willkürlichen Zeichen bildete, so war er auch nicht im Stande, mehrere unbekannte Größen bezeichnen zu können, und dieß hatte einen ganz besondern Einfluß auf seine Rechnungen. Wir wollen statt des griechischen Schluß-s den Buchstaben x in der Folge gebrauchen. Die Unbekannte heißt bei Diophantus die Zahl (arithmos), für das Quadrat derselben $x \, . \, x$ oder x^2 gebraucht er das Wort dynamis, x^3 nennt er kybos und setzt aus diesen beiden die folgenden Potenzen zusammen: so ist $x^4 =$ dynamo-dynamis, $x^5 =$ dynamo-kybos, $x^6 =$ kybo-kybos; höhere Potenzen kommen nicht vor. Hier ist nun vorerst zu beachten die Art der Zusammensetzung $x^4 = x^2 \times x^2$, $x^5 = x^2 \times x^3$, $x^6 = x^3 \, . \, x^3$. Die höhern Potenzen wurden als Produkte aus x^2 und x^3 angesehen; sodann, daß dynamis nicht etwa die zweite Potenz überhaupt bedeutet, sondern nur die zweite Potenz der Unbekannten, die außerdem auch gar nicht mehr bezeichnet wurde. Diese Wörter wurden nun nicht ausgeschrieben, sondern abgekürzt; wenn also x die Unbekannte, so war $d^y = x^2$, $k^y = x^3$, $dd^y = x^4$, $dk^y = x^5$, $kk^y = x^6$. Die Coefficienten wurden hinter die Bezeichnung für die Unbekannte und deren Potenzen gesetzt und dabei der Coefficient 1 stets geschrieben $x = x \; 1$, $x^2 = d^y \, 1$. Um die Mehrzahl auszudrücken, wurde das Zeichen der Unbekannten einmal wiederholt, nicht aber bei den Potenzen, daher: $3\,x = xx\,3$, $7\,x = xx\,7$, $x^3 = k^y\,1$, $5\,x^4 = dd^y\,4$ u. s. w. Ein Additionszeichen hatte Diophantus nicht; die Summe wurde durch die bloße Zusammenstellung ausgedrückt, z. B. $x^4 + 3\,x = dd^y\,1\,xx3$, $4\,x^3 + 2x = k^y\,4\,xx2$. Enthielt ein Ausdruck ein Glied ohne die Unbekannte, eine gegebene Zahl, so gebrauchte er das Wort Einheit, monas, und dafür die Abkürzung m^0, 8 Einheiten wurden daher geschrieben $m^0\,8$; $2\,x^3 + 5\,x + 9 = k^y\,2\,xx5\,m^0\,8$. Für die Subtraktion hatte er ein eigenes Zeichen, den umgekehrten griechischen Buchstaben psi, welcher dem Worte leipsis, Mangel, entnommen ist; dieses Wort wurde jedoch auch öfters ausgeschrieben. Die positiven Glieder eines Ausdruckes wurden zusammengestellt, ebenso auch die negativen und diesen das Zeichen des Abzählens vorgesetzt, so z. B. $5\,x^2 - 1 + 3\,x^3 - 9\,x = k^y\,3\,d^y\,5 - xx\,9\,m^0\,1$. Zusammengesetzte Brüche wurden umschrieben, z. B. $\frac{3\,x^2 - 4\,x}{7\,x^3 + 2\,x - 1} = d^y\,3 - xx4$, getheilt durch $k^y\,7\,xx\,2 - m^0 1$; die Gleichheit und andere Verhältnisse wurden ebenso durch Worte ausgedrückt.

Durch eine übersichtliche Inhaltsangabe wird das Verständniß der Sache erleichtert werden. Die 43 Aufgaben des 1. Buches lassen sich auf folgende Weise in 4 Klassen theilen. Die ersten 15 sind bestimmte Aufgaben mit einer und zwei unbekannten Größen, die zweite Unbekannte ist aber leicht auf die erste zurückzuführen; die 14. Aufgabe gehört nicht hierher und findet sich wieder in der 3. Aufgabe des 2. Buches. Die folgenden Aufgaben bis zur 25. sind bestimmte Aufgaben mit drei und vier Unbekannten. Die 25.—28. sind unbestimmte Aufgaben vom 1. Grade; es ist immer eine Bedingung weniger gegeben als unbekannte Größen. Die nächsten Aufgaben bis zur 42. sind bestimmte

Aufgaben vom 2. Grade: in allen hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, doch ist auch hier die Zurückführung auf eine Unbekannte leicht und die Aufgaben werden dadurch auf den 1. Grad zurückgebracht. Die 43. Aufgabe gehört in die erste Klasse. Vom 2. Buche gehören noch hierher in die 2. Klasse die 19. und in die 3. Klasse die 18. Aufgabe. Das 2. Buch enthält in den 7 ersten Aufgaben unbestimmte Gleichungen des 2. Grades, immer eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Die 6. Aufgabe ist eine bestimmte und gehört in die letzte Klasse des 1. Buches.

Die übrigen Aufgaben des 2. Buches gehören einer neuen Reihe an; in allen handelt es sich darum, Funktionen der Unbekannten zu Quadraten zu machen. Die 20. Aufgabe macht eine Ausnahme: sie führt auf eine Gleichung mit drei Unbekannten vom 2. Grade. Bedeuten x und y, z unbekannte oder unbestimmte Größen und a, b, c gegebene Größen, so kommen unter andern bis zu 17 folgende Aufgaben vor: x soll so bestimmt werden, daß $x - a$ und auch $x - b$ Quadratzahlen werden, oder $a \pm x$ und $b \pm x$ sollen Quadrate werden u. s. w. Von Nr. 21—32 sind unter andern folgende Ausdrücke zu Quadraten zu machen: $x^2 \pm y$ und auch $y^2 \pm x$; $xy \pm x$ und $xy \pm y$; $(x+y)^2 \pm x$ und $(x + y)^2 \pm y$ u. s. w. In den folgenden Aufgaben werden diese Forderungen auf drei unbestimmte Größen ausgedehnt. Das ganze 3. Buch bildet eine Fortsetzung hiervon, in der 22. Aufgabe kommen vier unbestimmte Größen vor. Das 4. Buch enthält bis zu Nr. 13 z. B. folgende Aufgaben: es soll $x + a = y$, aber auch $x^2 + a = y^2$ sein; $x + a = y$ und $x^3 + a = y^3$; $x^3 + z^2$ eine Kubikzahl und $y^2 + z^2$ eine Quadratzahl u. s. w. Von Nr. 14 an kommt ein Gemische von Aufgaben aus beinahe allen vorhergehenden, dazwischen wieder solche, welche die Verwandlung gewisser Funktionen in Kubik- und Quadratzahlen verlangen, z. B. $x^3 + y =$ Kubikzahl und $y^2 + x =$ Quadratzahl, oder $x \,.\, y \pm x$ und $xy \pm y$ sollen Kubikzahlen werden. Das 5. Buch enthält 32 ähnliche Aufgaben und das 6. 27 in Beziehung auf das rechtwinkelige Dreieck oder auf drei Zahlen, für welche $x^2 + y^2 = z^2$.

Diese Aufeinanderfolge, welche in Bezug auf die eigenthümlichen Auflösungen oft ganz natürlich erscheint, läßt uns dennoch eine große Unordnung in der Zusammenstellung erkennen, welche gewiß nicht ursprünglich war. Es scheint, daß die vorhandenen Manuscripte nicht mehr das Werk des Diophantus in seiner früheren Form enthalten, sondern nur eine Sammlung seiner Aufgaben, welche zwar ziemlich vollständig, aber schlecht geordnet ist. Beim Lesen des Buches hat man, in Bezug auf das Material, nicht das Gefühl von etwas Fehlendem, und, mögen auch einzelne Aufgaben ausgefallen sein, so stellt doch das Vorhandene so ziemlich ein Ganzes dar. Die Eintheilung der fünf ersten Bücher hat gar keinen Grund, und man könnte leicht eine natürliche Trennung in 11 oder 12 Bücher machen. In der Einleitung sagt Diophantus selbst, daß er seine Aufgaben in 13 Büchern vortrage, und daraus hat man alsdann geschlossen, daß sieben Bücher fehlen müßten und sich in Vermuthungen verloren, was diese noch alles enthalten haben möchten. Wenn man aber seine Beweise durchgegangen und seine Methoden sich klar gemacht hat, so sieht man leicht, daß er zu Ende war; auch konnte er mit seinen Hülfsmitteln gar nicht mehr leisten, und es verdient die größte Bewunderung, daß er damit überhaupt so viel zu leisten im Stande war. Mit einiger Wahrscheinlichkeit kann man noch behaupten, daß die „Arithmetik“ auch die Auflösung der Gleichungen des 2. Grades enthalten haben möchte, gewiß ist, daß er sie gekannt hat; er verspricht ihre Lösung in der Einleitung, woraus jedoch noch nicht geschlossen werden kann, daß er es in dieser Schrift gethan habe. Ebenso wenig ist es wahr-

scheinlich, daß seine Abhandlung über die Polygonalzahlen und die Porismen oder die Sätze aus der Zahlenlehre einen Theil dieses Werkes ausmachten.

Vor allen Dingen ist wohl zu berücksichtigen, daß Diophantus bei allen seinen Aufgaben nie die Bedingung macht, daß die gefundenen Werthe ganze Zahlen sein sollen; er verlangt nur positive, rationale Zahlen, und es ist sehr unwahrscheinlich, daß er überhaupt die Auflösung der unbestimmten Gleichungen in ganzen Zahlen gekannt habe. Ebenso wenig ist er sich der Methoden seiner Auflösungen klar bewußt, welche eine Reihe mit großem Scharfsinne ausgeführter Kunststücke bilden.

Der Mangel an Zeichen für mehrere Unbekannten nöthiget Diophantus zu einer eigenthümlichen Darstellungsweise, welche durch das ganze Buch geht und ihm seinen Scharfsinn abzwingt. Bei den bestimmten Aufgaben tritt ihm der Unterschied, ob nur eine oder mehrere Unbekannten vorkommen, nicht so entgegen wie uns; er bildet nicht so viele Gleichungen als er Bedingungen hat, er weiß aber alle Bedingungen der Aufgabe als Funktionen einer Unbekannten auszudrücken und diese zuletzt zu einer Gleichung zu vereinigen. So wird gleich in der ersten Aufgabe verlangt, zwei Zahlen zu finden, deren Summe 100 und Unterschied 40 ist. Nun nennt er die kleinere Zahl x, so ist die größere $x + 40$, weil der Unterschied beider Zahlen 40 sein soll, die Summe der Zahlen soll aber 100 sein, folglich ist $x + x + 40$ oder $2x + 40 = 100$. Zählt man von beiden Seiten 40 ab, so bleibt $2x = 60$, also ist $x = 30$ die kleinere und $30 + 40 = 70$ die größere Zahl. In der 12. Aufgabe wird verlangt, die Zahl 100 auf doppelte Weise in zwei Theile zu zerlegen, so daß die größere Zahl der ersten Zerlegung das Zweifache der kleineren Zahl der zweiten, und die größere Zahl der zweiten Zerlegung das Dreifache der kleinern Zahl der ersten sei. Er setzt nun: die kleinere Zahl der zweiten Zerlegung sei x, so ist die größere der ersten $2x$, weil sie doppelt so groß sein soll, die kleinere Zahl der ersten Zerlegung ist jetzt $100 - 2x$; die kleinere der zweiten war x, also ist die größere $100 - x$, und da diese das Dreifache von $100 - 2x$ sein soll, so ist $100 - x = 300 - 6x$. Zählt man auf beiden Seiten $6x$ zu und 100 ab, so wird $5x = 200$, also $x = 40$. Die eine Zerlegung ist also 80 und 20 und die andere 60 und 40. Die 20. Aufgabe verlangt vier Zahlen zu finden, so daß immer drei zusammen um eine bestimmte Zahl größer sind als die vierte; diese Ueberschüsse seien 20, 30, 40 und 50. Man setze: die Summe aller Zahlen sei $2x$; nun sollen die drei ersten um 20 größer sein als die vierte, folglich besteht $2x$ aus den drei ersten, d. i. aus der vierten und 20 und noch aus der vierten, mithin ist zweimal die vierte und $20 = 2x$, oder die vierte und $10 = x$, daher ist die vierte $= x - 10$. Ebenso findet man für die dritte Zahl $x - 15$, für die zweite $x - 20$ und für die erste $x - 25$. Die Summe dieser vier Zahlen ist $4x - 70$, sie ist aber auch $2x$, daher $4x - 70 = 2x$, also $2x = 70$ oder $x = 35$. Die erste Zahl ist also 25, die zweite 20, die dritte 15 und die vierte 10. Man sieht, daß diese Auflösungen eigentlich intellectuelle Lösungen sind, wo die Rechnung bloß zuletzt eintritt. Obschon nun bei den bestimmten Aufgaben keine Willkür eintreten kann, so macht doch Diophantus, um die Rechnung zu erleichtern, zuweilen willkürliche Annahmen: er bedient sich einer Art Regula falsi, um durch sie zum richtigen Resultat zu kommen. In der 16. Aufgabe des 4. Buches wird verlangt, drei Zahlen zu finden, so daß die Summe zweier, mit der dritten multiplizirt, die Zahlen 35, 27 und 32 geben. Er setzt die dritte x, dann ist die Summe der beiden ersten $\frac{35}{x}$; nun-

mehr zerlegt er diese Summe willkürlich in die Theile $\frac{10}{x}$ und $\frac{25}{x}$, welche er jetzt als die erste und zweite Zahl annimmt. Hierdurch geräth er nun in Widerspruch mit den beiden andern Bedingungen, die Zerlegung von 35 in 10 und 25 erweist sich als falsch, allein er weiß das Resultat zu benützen, um die richtige Zerlegung in 15 und 20 zu finden.

In ähnlicher Weise werden auch die bestimmten Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten gelöst. Die 32. Aufgabe des ersten Buches, welche nur der Form nach in diese Klasse gehört, verlangt, zwei Zahlen zu finden, deren Summe 20 und der Unterschied der Quadrate 80 sei. Er setzt den Unterschied der Größen $= 2x$, so ist die eine $10 - x$ und die andere $10 + x$, denn diese Zahlen haben zur Summe 20 und zum Unterschiede $2x$; nun sind ihre Quadrate $100 + 20x + x^2$ und $100 - 20x + x^2$, also der Unterschied derselben $40x$, dieser soll aber auch 80 sein, folglich ist $40x = 80$, also $x = 2$ und die gesuchten Zahlen sind $10 + 2 = 12$ und $10 - 2 = 8$. Den Aufgaben sind in der Regel noch besondere Bedingungen über die Werthe der gegebenen Zahlen beigefügt, welche den Zweck haben, ein negatives oder irrationales Resultat zu vermeiden. Durch die Wahl seiner Unbekannten weiß Diophantus die gemischten Gleichungen des zweiten Grads zu vermeiden, das Endresultat führt ihn immer auf Gleichungen der Form $Ax = B$ oder $Ax^2 = Bx$ oder $Ax^2 = B$; in diesem Falle hat er die beständigen Größen der Aufgabe so gewählt, daß $\frac{B}{A}$ eine Quadratzahl ist.

Bei der Auflösung der unbestimmten Aufgaben des 1. Grades setzt Diophantus von vorne herein für eine Unbekannte oder auch für eine Funktion von mehreren eine bestimmte Zahl, wodurch sie in bestimmte Aufgaben verwandelt werden, deren Auflösung sich von den früheren nicht unterscheidet, indem er für seine Unbekannten keine ganzen Zahlen verlangt. In der ersten Aufgabe des 2. Buches wird verlangt, zwei Zahlen zu finden, daß die Summe derselben der 10. Theil der Summe ihrer Quadrate sei. Er setzt die eine Zahl x und die andere $2x$, so ist ihre Summe $3x$ und die Summe ihrer Quadrate $x^2 + 4x^2 = 5x^2$, daher $\frac{5x^2}{10} = 3x$, $5x^2 = 30x$, also $x = 6$; die beiden Zahlen sind demnach 6 und 12.

Die unbestimmten Aufgaben der andern Art, bei welchen verlangt wird, gewisse Funktionen in Quadrate zu verwandeln, erfordern eine andere Auflösungsmethode. Die 21. Aufgabe des 2. Buches enthält die Forderung, zwei Zahlen zu finden, daß das Quadrat einer jeden mit der andern Zahl wieder Quadrate gebe. Er setzt nun die eine Zahl x und die andere $2x + 1$, wodurch schon die eine Bedingung erfüllt wird, denn es ist $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$; nun soll aber auch das Quadrat der 2. mit der 1, $(2x + 1)^2 + x$ oder $4x^2 + 5x + 1$ eine Quadratzahl sein und in der Ausführung dieser Bedingung besteht nun die Hauptsache der Auflösung. Diophantus nimmt nun an, die Wurzel dieses Quadrates sei $2x - 2$, also das Quadrat selbst $4x^2 - 8x + 4$, und setzt demnach $4x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 8x + 4$, somit $5x + 1 = -8x + 4$, also $13x = 3$ und $x = \frac{3}{13}$, die andere Zahl wird hierdurch $2 . \frac{3}{13} + 1 = \frac{19}{13}$. Beide Zahlen erfüllen die Bedingung: es ist $\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \frac{19}{13} = \frac{256}{169} = \left(\frac{16}{13}\right)^2$

und $\left(\frac{19}{13}\right)^2 + \frac{3}{13} = \frac{400}{169} = \left(\frac{20}{13}\right)^2$. Man sieht leicht ein, warum er als Wurzel des Quadrats $2x - 2$ angenommen hat, es fällt ihm hierdurch $4x^2$ auf beiden Seiten hinweg und bleibt ihm nur noch eine leicht zu lösende Gleichung des ersten Grades. Andere Auflösungen ergeben sich, wenn man diese Wurzel $2x - 3$ oder $2x - 4$ u. s. w. setzt; sie führen auch auf positive Werthe von x, welche Diophantus natürlich gekannt haben muß, und es bleibt nur sonderbar, daß er eine allgemeine Regel hierüber nicht ausspricht, ebenso, daß er nicht angibt, daß noch eine andere Methode der Auflösung vorhanden ist. In dieser Beziehung ist die 12. Aufgabe desselben Buches zu beachten; denn hier wird eine allgemeine Regel ausgesprochen. Man soll zu zwei gegebenen Zahlen eine Zahl von der Art finden, daß sie, zu beiden gezählt, Quadratzahlen gibt. Man nehme den Unterschied der zwei gegebenen Zahlen und zerlege ihn willkürlich in zwei Faktoren, so ist die halbe Summe dieser Faktoren gleich der Wurzel des größern Quadrates und der halbe Unterschied derselben gleich der Wurzel des kleinen Quadrates. Soll man zu den Zahlen 3 und 2 eine Zahl x finden, so daß $3 + x = u^2$, aber auch $2 + x = v^2$, so ist der Unterschied $3 - 2 = 1$, welchen man zerlegen kann in $4 \times \frac{1}{4}$; demnach ist $u = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{1}{4}\right) = \frac{17}{8}$ und $v = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$; hieraus $3 + x = \left(\frac{17}{8}\right)^2$, also $x = \frac{97}{64}$, oder auch $2 + x = \left(\frac{15}{8}\right)^2$, woraus wieder $x = \frac{97}{64}$ folgt.

Die meisten Aufgaben führen zuletzt auf eine sehr einfache Lösung, und nur was dieser vorhergeht, ist oft sehr künstlich und mit vieler Gewandtheit durchgeführt. In sehr vielen Aufgaben wird am Ende verlangt, eine Funktion der Unbekannten vom 2. Grade zu einem Quadrate zu machen, und hier sind nun drei Fälle zu unterscheiden. Ist $Ax^2 + Bx + C$ die Funktion und A eine Quadratzahl $= a^2$, so kann man die Wurzel des Quadrates $= ax + b$ setzen: hierdurch fällt auf beiden Seiten das Glied mit x^2 behaftet heraus, und es bleibt für x bloß eine Gleichung vom ersten Grade. Im 5. Buche die 20. Aufgabe ist: $9x^2 - 27x + 31$ in ein Quadrat zu verwandeln, Diophantus setzt $9x^2 - 27x + 31 = (3x - 7)^2 = 9x^2 - 42x + 49$, wodurch $-27x + 31 = -42x + 49$ oder $15x = 18$, also $x = \frac{6}{5}$. Ist dagegen A keine Quadratzahl, aber $C = c^2$, so kann man $Ax^2 + Bx + c^2 = (ax + c)^2$ setzen; hier fällt c^2 von beiden Seiten weg, die ganze Gleichung läßt sich durch x theilen, und es bleibt wieder für x eine Gleichung vom 1. Grade. Die 45. Aufgabe des 4. Buches führt zum Ausdrucke $3x^2 + 12x + 9$, welches ein Quadrat werden soll, hier ist 9 eine Quadratzahl, folglich setzt Diophantus die Wurzel $3 - 5x$, mithin: $3x^2 + 12x + 9 = 9 - 30x + 25x^2$, $22x^2 = 42x$ oder $22x = 42$, also $x = \frac{21}{11}$. Wenn aber keiner von diesen beiden Fällen stattfindet, so ist die Bedingung schon schwieriger zu erfüllen; hier hat aber Diophantus auf eine eigene und geniale Weise sich zu helfen gewußt. Die 33. Aufgabe des 4. Buches führt zum Ausdrucke $3x + 18 - x^2$, welcher ein Quadrat werden soll; da nun weder 18 noch -1 Quadrate sind, so konnte auch keine der vorhergehenden Methoden angewandt werden. Er setzt nun

zuerst $3x + 18 - x^2 = 4x^2$ oder $3x + 18 = 5x^2$; diese Gleichung gibt aber keine rationale Wurzel, deßwegen ist die Annahme $4x^2$ als Werth der Funktion unstatthaft; er muß also einen andern finden, und indem er dieses thut, löst er die Gleichung des 2. Grades eigentlich auf. Sein Ideengang ist folgender. Vervielfacht man die Gleichung $5x^2 - 3x = 18$ mit 5, so wird $25x^2 - 3 . 5x = 18 . 5$ oder $(5x)^2 - 3 . (5x) = 18 . 5$; zählt man auf beiden Seiten $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ zu, so wird $(5x)^2 - 3 . (5x) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 18 . 5 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ oder $\left(5x - \frac{3}{2}\right)^2 = 18 . 5 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Nun ist aber $18 . 5 + \frac{9}{4}$ kein Quadrat, aber 5 ist entstanden aus $4 + 1$ oder $2^2 + 1$ und die Zahl 2 ist willkürlich angenommen worden, diese Annahme genügt aber nicht; man muß daher für 2 eine andere Zahl m (hier gebraucht Diophantus wieder x) setzen und diese so bestimmen, daß $18(m^2 + 1) + \frac{9}{4}$ ein Quadrat wird. In dem Ausdrucke $18m^2 + 18 + \frac{9}{4}$ ist aber $18 + \frac{9}{4} = \frac{81}{4}$, also muß $18m^2 + \frac{81}{4}$ oder auch $72m^2 + 81$ ein Quadrat werden. Da nun $81 = 9^2$, so setze man nach der obigen Methode die Wurzel $= 8m + 9$, so wird $72m^2 + 81 = (8m + 9)^2 = 64m^2 + 144m + 81$, also $72m^2 = 64m^2 + 144m$ oder $8m^2 = 144m$; $8m = 144$ und $m = 18$. Nun kehrt er wieder zur frühern Gleichung zurück und setzt den Werth des Ausdruckes, anstatt $(2x)^2$, jetzt $(18x)^2$; hierdurch wird $3x + 18 - x^2 = (18x)^2$ oder $3x + 18 = 325x^2$, woraus sich ergibt $x = \frac{6}{25}$. Diophantus gibt hier bloß das Resultat aus der Gleichung des 2. Grades, ohne sie wirklich aufzulösen, aber aus der ganzen vorhergehenden Betrachtung geht hervor, daß er mit dieser Auflösung völlig vertraut war. Für den dritten Fall, wo weder A noch C Quadrate sind, wird also die Auflösung zurückgeführt auf eine andere Gleichung $Cm^2 + \frac{B^2}{4} - AC$; wenn diese aufgelöst werden kann, so ist auch die erste auflösbar. Nach der angegebenen Methode findet dieses nun statt, wenn $\frac{B^2}{4} - AC$ eine Quadratzahl ist. Ueber diese besondere Form von Gleichungen $Ax^2 + B = y^2$ gibt er nun die Bedingungen, welche auch für den allgemeinen Ausdruck gelten; außerdem aber auch noch, daß sie auflösbar sei, wenn in der Gleichung $Ax^2 + B = y^2$ $A + B$ und in $Ax^2 - B = y^2$, $A - B$ eine Quadratzahl sei. Sodann führt er weiter an, daß, wenn man von der Gleichung $Ax^2 - B = y^2$ eine Auflösung $Am^2 - B = n^2$ kenne, man daraus andere Auflösungen herzuleiten vermöge; wenn aber die Gleichung $Ax^2 - b^2 = y^2$ auflösbar sein solle, so müsse A die Summe zweier Quadrate sein. Alles, was Diophantus über diesen Gegenstand sagt, ist merkwürdig in Bezug auf die Geschichte der Mathematik, und der vorurtheilsfreie Beurtheiler erkennt daraus, daß er keine klare Einsicht in diese Verhältnisse gehabt und nicht auf dem Boden einer natürlichen Entwicklung gestanden hat.

Wenn zwei Funktionen von x zugleich Quadrate werden sollen für denselben Werth von x, so nennt Diophantus dieß die doppelte Gleichung und eine

Methode der Auflösung ist oben schon gegeben. Einen andern Fall enthält die 45. Aufgabe des 4. Buches, wo $8x + 4$ und $6x + 4$ zugleich Quadrate werden sollen; sind diese Quadrate m^2 und n^2, so wird durch Abzählen $2x = m^2 - n^2$ oder $2x = (m + n)(m - n)$. Zerlegt man nun $2x$ in $\frac{x}{2} \cdot 4$ und setzt $\frac{x}{2} = m + n$ und $4 = m - n$, so wird $m = \frac{x + 8}{4}$ und $n = \frac{x - 8}{4}$, woraus man $x = 112$ findet. Obschon dieses Resultat den beiden Bedingungen genügt, so ist es doch für die vorliegende Aufgabe wegen anderweitigen Bedingungen nicht brauchbar; er suchte daher auf Umwegen eine andere Lösung, gibt aber auch hier keine Methode, um solche aufzufinden. Ein anderer Fall einer doppelten Gleichung ist: $30x^2 + 12x$ und $33x^2 + 5x$ sollen Quadrate werden. Da er hier die frühere Methode nicht gebrauchen kann, so schlägt er nun folgenden Weg ein: Er setzt die Wurzel der ersten Funktion $= ux$, so wird $30x^2 + 12x = u^2x^2$ oder $30x + 12 = u^2x$ und $x = \frac{12}{u^2 - 30}$; diesen Werth führt er in die zweite Funktion ein und erhält $\frac{60u^2 + 2500}{(u^2 - 30)^2}$, welches ein Quadrat sein muß. Diophantus verwirft dieses Resultat, weil $60 + 2500$ kein Quadrat ist. Nach der schon oben angegebenen Weise geht er nun wieder rückwärts und forscht, wie er seine erste Annahme hätte machen müssen, um auf andere Funktionen zu kommen, welche ein besseres Resultat gewähren. So findet er denn die neuen Funktionen $6x^2 + 4x$ und $6x^2 + 3x$; mit diesen verfährt er ebenso und findet zuletzt $12u^2 + 24$, und da nun hier $12 + 24 = 36 = 6^2$, so lassen sich beliebig viele Werthe von u, also auch von x auffinden.

Es mag hier noch der Aufgaben Erwähnung geschehen, in welchen Funktionen von höhern Graden in Quadrate verwandelt werden sollen. In der 21. Aufgabe des 6. Buches soll $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = u^2$ werden; hier wird $u = \frac{3}{2}x + 1$ angenommen, wodurch $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = \frac{9}{4}x^2 + 3x + 1$ wird, also $x^3 - 3x^2 = \frac{9}{4}x^2$ oder $x - 3 = \frac{9}{4}$ und $x = \frac{17}{4}$. Man sieht leicht ein, daß der Werth von u so gewählt ist, daß die neue Gleichung auf den ersten Grad zurückgebracht wird. Auf diese Bedingung führte die Aufgabe, in welcher verlangt wurde, ein rechtwinkeliges Dreieck zu finden, in welchem die Fläche nebst der Hypotenuse eine Kubikzahl, der Umfang aber eine Quadratzahl sein soll. Er nimmt nun willkürlich die eine Seite zu 2 an, und die andere gleich der Fläche, hierdurch verwandelt sich nun die Aufgabe in die andere: eine Kubikzahl zu finden, welche um 2 vermehrt, eine Quadratzahl werde; wenn man nun die Wurzel dieser Kubikzahl $x - 1$ setzt, so wird erfordert, daß $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ eine Quadratzahl werde. Nach der 29. Aufgabe des 4. Buches soll $9x^4 + 6x^2 + 1 - 4x^3 - 12x$ ein Quadrat werden. Diophantus setzt die Wurzel $= 3x^2 + 1 - 6x$, also $9x^4 + 6x^2 + 1 - 4x^3 - 12x = 9x^4 + 42x^2 + 1 - 36x^3 - 12x$; hierdurch fallen drei Glieder auf beiden Seiten weg und es bleibt $6x^2 - 4x^3 = 42x^2 - 36x^3$ oder $32x^3 = 36x^2$, woraus sich $x = \frac{9}{8}$ ergibt.

Man muß bei Diophantus durchaus keine allgemeinen Methoden oder tiefe Betrachtungen über die Auflösbarkeit seiner Gleichungen suchen; wenn ihm eine

Gleichung vorlag, so versuchte er die Hülfsmittel, welche ihm schon in ähnlichen Fällen Dienste geleistet hatten, oder er erfand für den besondern Fall neue. Im schlimmsten Falle, wenn ihm die Mittel ausgingen, änderte er seine Annahme, um auf andere, auflösbare Gleichungen zu kommen. So legte er sich die Aufgabe vor $x^4 + y^4 + z^4 = u^2$; da nun hier in einer Gleichung drei unbestimmte Größen sind, so kann man zwei willkürlich annehmen und dann die daraus hervorgehende Bedingung zu erfüllen suchen. Er setzte nun $y = 2$ und $z = 3$ und erhielt $x^4 + 97 = u^2$; nun vermochte er aber auf keine Weise, durch die ihm bekannten Mittel diese Gleichung aufzulösen, deßwegen hält er sich dabei auch weiter nicht auf und setzt andere Werthe für y und z. Um aber nicht wiederum ungenügende Annahmen zu machen, stellt er mit großer Gewandtheit ungefähr folgende Betrachtungen an. Es ist $x^4 = u^2 - (y^4 + z^4)$; setzt man nun $u = x^2 - m$, so wird $x^4 = x^4 - 2x^2m + m^2 - (y^4 + z^4)$ oder $2x^2m = m^2 - (y^4 + z^4)$ und $x^2 = \frac{m^2 - (y^4 + z^4)}{2m}$. Dieser Bruch muß also ein Quadrat sein; da nun drei unbestimmte Größen vorhanden sind, so kann man deren Verhältniß festsetzen. Es sei $m = y^2 + z^2$, so ist $m^2 - (y^4 + z^4) = y^4 + z^4 + 2y^2z^2 - (y^4 + z^4) = 2y^2z^2$ und dadurch $x^2 = \frac{2y^2z^2}{2(y^2 + z^2)} = \frac{y^2z^2}{y^2 + z^2}$; da nun der Zähler schon ein Quadrat ist, so muß man nur die Zahlen y und z so wählen, daß $y^2 + z^2$ ebenfalls ein Quadrat werde. Diese Eigenschaft haben sehr viele Zahlen. Ist z. B. $y = 3$ und $z = 4$, so ist $y^2 + z^2 = 16 + 9 = 25$, es wird also $m = 25$. Nunmehr kehrt er zu seiner Aufgabe zurück und setzt $x^4 + 3^4 + 4^4 = u^2$ oder $x^4 + 337 = u^2$; wie das Vorhergehende verlangt, wird $u = x^2 - 25$, also $u^2 = x^4 - 50x^2 + 625$ gesetzt, woraus man erhält $50x^2 = 288$, also $x^2 = \frac{288}{50} = \frac{144}{25}$ und $x = \frac{12}{5}$.

Die Fälle, in welchen gewisse Funktionen Kubi, oder die doppelten Gleichungen von noch andern Funktionen Quadrate werden sollen, werden in ähnlicher Weise gelöst und bieten keine besondere Veranlassung zu neuen Betrachtungen; sie bestätigen nur die früher ausgesprochene Ansicht, daß Diophantus in diesen Dingen auf fremdem Boden stand. Später zu erwähnende Thatsachen lassen keinen Zweifel, daß den alexandrinischen Griechen von Indien aus Ideen zugekommen sind und Nachrichten von Untersuchungen, welche ihnen völlig fremd waren, und welche sie auch anfänglich abgewiesen, die sich aber doch allmälig Bahn brachen; aber erst als der Gebrauch der Zeichen ihnen von dorther bekannt wurde und das Technische in der Behandlung der Gleichungen, da fingen sie an, selbstständig zu arbeiten, eine solche Arbeit haben wir in der Arithmetik des Diophantus vor uns. Man würde sehr Unrecht haben, wenn man behaupten wollte, er habe seine Untersuchungen geradezu entlehnt; davon tragen sie keine Spur an sich, vielmehr sind seine Auflösungen so kunstreich griechisch und tragen eine Lebendigkeit an sich, welche durchaus nicht dem ernsten, gemessenen Wesen der indischen Darstellung entspricht, welche überhaupt viel allgemeiner ist und nur in einigen, aber wichtigen Punkten Anklänge bietet. Es ist unmöglich, in der Kürze alle die Eigenthümlichkeiten zu entwickeln, welche Diophantus darbietet, aber ein Hauptcharakter ist, daß er sich auf theoretische Betrachtungen, welchen seine Aufgaben zur Erläuterung dienen sollten, durchaus nicht einläßt; diese machen vielmehr den Kern aus, sie sind kleine, von einander unabhängige Kreise von Untersuchungen, welche bei jeder ein Ganzes bilden. Man kann

seine Methoden zusammenstellen und sehen, welche Keime späterer Entwickelungen in ihnen liegen; aber er selbst hat an allgemeine Betrachtungen nicht gedacht, er hielt sich nur an die einzelnen Aufgaben, und die Behandlung derselben ist für jede eine andere, wenn man nicht bloß auf den Schluß sieht, sondern die Lösung vom Anfang bis an's Ende als ein Ganzes betrachtet. Demnach bezeichnete Diophantus seine Arbeit auch nicht als eine Arithmetik, oder als einen Theil derselben, sondern nur als Arithmetisches; er hat uns Einzelheiten hinterlassen, welche zur Arithmetik gehören. Wären die Gegenstände, über welche Diophantus sich verbreitet hat, griechischen Ursprunges gewesen, so würden wir nach der Art der Griechen etwas ganz anderes vor uns haben, etwa ein Lehrgebäude der Arithmetik mit strengen Beweisen und in systematischer Anordnung, in ähnlicher Art wie die Geometrie Euklids'.

In dieser Ansicht wird man noch mehr bestärkt werden, wenn man das Bruchstück über die Polygonalzahlen betrachtet, ein Gegenstand, welcher, wenn auch nicht auf griechischem Boden entstanden, doch eine Entwickelung nach ihrer Weise erhalten hatte, und bei welchem auch Diophantus sich ganz der griechischen Methode anschloß. Diese Schrift ist nicht weniger ausgezeichnet als die Arithmetik, und übertrifft an Allgemeinheit der Auffassung alle früheren Schriften. Der Zweck der kleinen Abhandlung ist der Beweis einer allgemeinen Eigenschaft aller Polygonalzahlen, welche als Definition derselben schon von Hypsikles angegeben worden war. Um diesen Beweis führen zu können, schickt er eine Reihe von Sätzen voraus, welche im Folgenden angegeben werden. Zuerst führt er an, daß in der allgemeinen Zahlenreihe jede Zahl von 3 an eine Polygonalzahl sei, und zwar die erste ihrer Art, und daß sie so viele Winkel enthalte, als die Anzahl ihrer Einheiten ausdrückt, und daß eine Seite zwei Einheiten enthalte. Fünf Einheiten oder Punkte können z. B. zu einem Fünfecke zusammengestellt werden, die Anzahl der Ecken ist also 5 und in jeder Seite liegen 2 Punkte. Nun erklärt er den Zweck der Arbeit in folgender Weise: „Wie bekanntlich die Quadratzahlen durch eine Vervielfältigung mit sich selbst entstehen, so wird gezeigt werden, daß jede Polygonalzahl, vervielfacht durch eine Zahl nach dem Verhältniß ihrer Ecken und zugesetzt zu einer mit der Anzahl der Ecken im Verhältniß stehenden Quadratzahl, eine Quadratzahl werde. Dieß wollen wir beweisen und zeigen, wie aus gegebener Seite die dazu gehörige Polygonalzahl und wie aus dieser jene gefunden werde.“ Im 2. Satze wird bewiesen, daß wenn man 3 Zahlen von gleichem Unterschiede hat, also a, $a + d$, $a + 2d$, immer $8(a + d)(a + 2d) + a^2 = [(a + 2d) + 2.(a + d)]^2$ ist. Im 3. Satze wird angegeben, daß in der Reihe a, $a + d$, $a + 2d, \ldots a + (n - 1)d$, der Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Gliede $(n - 1)d$ ist. Der 4. und 5. Satz enthalten den bekannten Satz, daß die doppelte Summe einer solchen Reihe gleich ist der Summe des ersten und letzten Gliedes, vervielfacht mit der Anzahl der Glieder. Behält man die gewöhnliche Bezeichnung bei, so enthält der 6. Satz den Beweis des Ausdruckes $8 . d . S + (d - 2)^2 = [d(2n - 1) + 2]^2$. Im 8. Satze wird angegeben, daß wenn P eine Polygonalzahl von der Ordnung m ist, der Ausdruck $8(m - 2) . P + (m - 4)^2$ immer eine Quadratzahl ist. Dieser Ausdruck ist mit dem vorhergehenden der Bedeutung nach gleich, wie sich leicht erkennen läßt. Jede Reihe von Polygonalzahlen hat ihre Erzeugungsreihe, eine Reihe von gleichen Unterschieden, aus welchen sie hervorgehen durch die auf einander folgende Summation ihrer Glieder. Die dreieckigen Zahlen entstehen aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ... mit dem Unterschiede 1; die viereckigen aus der Reihe 1, 3, 5, 7, ... mit dem Unterschiede 2, u. s. w. Die meckigen

aus der Reihe $1, 1 + d, 1 + 2d, \ldots$ mit dem Unterschiede $d = m - 2$. Zwischen der Ordnungszahl m und dem Unterschiede besteht also das Verhältniß, daß $d = m - 2$ oder $m = d + 2$. Die Summe von n Gliedern dieser letzten Reihe ist nun $S = \frac{(2 + (n - 1) d) n}{2}$ oder $8 d S = 4 d n (2 + (n - 1) d)$ und $8 d S + (d - 2)^2 = 8 d n + 4 d^2 n (n - 1) + d^2 - 4 d + 4 = d^2 (4 n^2 - 4 n + 1) + 4 d (2 n - 1) + 4 = d^2 (2 n - 1)^2 + 4 d (2 n - 1.) + 4 = (d (2 n - 1) + 2)^2$. Diese Formel des 6. Satzes geht dann in die des 8. über, wenn man statt der Summe der Reihe S die ihr gleiche Polygonalzahl P setzt und $d = m - 2$, es wird: $8 (m - 2) P + (m - 4)^2 = [(m - 2) (2 n - 1) + 2]^2$.

Die Form der Darstellung schließt sich ganz an die gewöhnliche griechische an, aber mit dem Unterschiede, daß Diophantus die Zahlen zwar durch Linien darstellt, aber nicht wie Euklides geometrische Konstruktionen ausführt; die Linien sind ihm nur eine andere Form für die Zahlen. Spuren dieser Darstellung zeigen sich wohl auch in der Arithmetik, sie wurden aber dort durch die fremde Form verdrängt, und so schied sich auch äußerlich das Griechische von dem Fremden. Hierher gehört noch ein anderer Umstand. Aufgaben zu stellen, wie sie Diophantus in seinem 6. Buche gibt, z. B. ein rechtwinkeliges Dreieck zu finden, so daß der Flächeninhalt nebst der Hypotenuse ein Kubus, der Umfang aber ein Quadrat sein soll, wäre für die älteren Griechen etwas Unmögliches gewesen; sie wurden erst denkbar, nachdem der Zahlenbegriff den räumlichen verdrängt hatte und der Unterschied zwischen Fläche und Linie in der Zahl aufgehoben war.

Diophantus führt bei der Auflösung seiner Aufgaben eine Menge Sätze an, welche bereits schon in den arithmetischen Büchern des Euklides enthalten sind, dabei aber auch andere, von welchen wir nicht wissen, ob sie früher schon bekannt waren, und welche wahrscheinlich seinen Porismen angehörten, obgleich er dieß nicht ausdrücklich anführt. Hierher gehören: daß eine Zahl von der Form $4 n + 3$ nicht die Summe zweier Quadrate sein könne, daß aber jede Primzahl von der Form $4 n + 1$ die Summe zweier Quadrate sei. Eines von den Porismen, welche er verwendet, spricht er in folgender Form aus: Wenn man zwei Quadratzahlen, welche in ihren Wurzeln nur um eine Einheit verschieden sind, mit einander multiplizirt und beide Quadrate zum Produkte noch zuzählt, so erhält man wieder eine Quadratzahl; oder in Zeichen $(a + 1).^2 a^2 + (a + 1)^2 + a^2$ ist ein Quadrat. Die Richtigkeit des Satzes ist sehr leicht einzusehen, denn die beiden letzten Glieder sind $a^2 + 2 a + 1 + a^2 = 2 a^2 + 2 a + 1 = 2 (a + 1) . a + 1$, welche mit dem ersten das Quadrat von $(a + 1) a + 1$ bilden. Bei solchen Untersuchungen mußten den Griechen ihre Zahlbezeichnung gute Dienste leisten, wenn sie mit einfachen Zeichen Operationen ausführten, so blieb der Verlauf derselbe, wenn auch die Zeichen wechselten, und man konnte einsehen, daß das Resultat allgemeine Gültigkeit habe.

Von großer Bedeutung für die Geschichte der Mathematik sind die mathematischen Sammlungen des **Pappus** aus Alexandrien (gegen 400); durch sie sind wir mit den Namen und Arbeiten vieler Schriftsteller bekannt geworden, welche sonst uns gänzlich unbekannt geblieben sein würden; bei andern hat er uns werthvolle Andeutungen und Auszüge jetzt verlorener Schriften hinterlassen. Ursprünglich bestand dieses Werk aus acht Büchern; davon sind noch vorhanden: ein Theil des zweiten, welches von der Logistik der Alten handelt, das dritte Buch, im Anfange unvollständig, und alle folgenden. Pappus bezweckte mit

diesem Werke, zerstreute und wahrscheinlich weniger bekannte und schwierige Untersuchungen älterer Gelehrten zusammenzustellen und zu erläutern, was ihm zugleich Veranlassung gab, über verwandte Gegenstände sich auszulassen, wodurch seine Nachrichten für uns jene werthvolle Ausdehnung erhalten haben. Man findet in dem Werke des Pappus eine Reihe von Sätzen, von welchen schon bei Euklides angegeben wurde, daß sie wahrscheinlich Theile seiner Porismen ausmachten. Hierher gehört nun besonders als allgemeinste Grundlage das anharmonische Verhältniß. Gehen nämlich von einem Punkte vier Strahlen aus, und werden diese von einer Geraden durchschnitten in den vier Punkten a, b, c, d, so entstehen auf derselben Abschnitte von der Beschaffenheit, daß z. B. das Doppelverhältniß $\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}$ denselben Werth behält, wie auch die Gerade gezogen werden mag. Hieraus geht durch Zusammensetzung eine Eigenschaft von sechs in gerader Linie liegenden Punkten hervor, welche man die Involution nennt. Ist nämlich unter sechs Punkten A, A'; B, B'; C, C' das anharmonische Verhältniß von vier A, A', B, C gleich dem anharmonischen Verhältnisse ihrer vier zugeordneten Punkte A', A, B', C', so befinden sich alle sechs Punkte in Involution. Ist aber der Werth des obigen Doppelverhältnisses gleich der Einheit, so ist $\frac{ac}{ad}=\frac{bc}{bd}$ das harmonische Verhältniß und die vier Punkte werden vier harmonische Punkte genannt. Ebenso findet man auch Sätze aus der Lehre von den Transversallinien, worauf früher schon hingewiesen wurde. Man nennt Transversallinie jede Gerade oder Kurve, welche auf irgend eine Art ein System anderer Linien oder Flächen durchschneidet. Bleibt man bei der geraden Transversale stehen, so schneidet sie die Seiten eines ebenen Vieleckes oder deren Verlängerungen und theilt jede Seite so in zwei Theile, daß das Produkt aus der einen Hälfte der Abschnitte, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, gleich ist dem Produkte der andern Hälfte. Für das Dreieck ist dieser Satz früher schon angeführt worden, und es lassen sich aus ihm eine Menge interessanter Eigenschaften dieser Figur herleiten. Diese Sätze sind von so großer Allgemeinheit, daß sie die Grundlage der neuern synthetischen Geometrie geworden sind; auf ihnen beruhen die schönsten Theorien, welche die Geometrie überhaupt kennt, und aus dem Werke des Pappus sehen wir eben, daß diese Grundlagen den Alten schon bekannt waren, obgleich sie dieselben noch nicht weiter zu entwickeln vermochten. Aus den Angaben des Pappus hat man später vielfache Versuche gemacht, mehrere verlorene Schriften des Apollonius wieder herzustellen, und sie haben dadurch nicht wenig dazu beigetragen, das Studium der alten Geometrie zu fördern und ihre Methode zu vervollkommnen. Unter vielen andern Dingen finden wir bei Pappus auch das erste Beispiel der Quadratur einer krummen Oberfläche und Bemerkungen, welche zeigen, daß die Lehre von der krummen Oberfläche und den Linien doppelter Krümmung schon von den Alten ausgebildet wurde.

Ungewissen Zeitalters ist Diokles; doch gehört er wahrscheinlich zu den ältern Geometern. Er hat zur Auflösung des Problems von den beiden mittleren Proportionalen eine Kurve, die Cissoide, erfunden. Von ihm haben wir auch die Auflösung des Problems, die Kugel durch eine Ebene nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Von dem Philosophen Proklus (450), Vorsteher der neuplatonischen Schule zu Athen, haben wir einen Commentar zum ersten Buche des Euklides, in welchem sich zugleich geschichtliche Bemerkungen befinden.

Etwa hundert Jahre später lebte Eutokius, der uns Commentare zu den Kegelschnitten des Apollonius und zu einigen Werken des Archimedes hinterlassen hat; auch finden sich bei ihm zahlreiche historische Angaben, welche uns theilweise das Material zu dem Frühern geliefert haben.

Werfen wir am Schlusse des zwölfhundertjährigen Zeitraums, welcher der griechischen Mathematik gegönnt war, noch einen Blick auf ihre Entwickelung zurück, so sehen wir, wie sie aus ihrem Naturzustande und ihren rohen Anfängen zuerst durch die Bemühungen der Philosophen gehoben wurde, die aus Kleinasien stammten und mit Aegypten verkehrt hatten. Aus Aegypten war die Geometrie als Erfahrungswissenschaft nach Griechenland gekommen und wurde hier, bei der Verpflanzung auf einen in vieler Beziehung geistig verwandten Boden, die Grundlage abstrakten, reinen Denkens. Wir müssen diese Geometrie als eine Fortsetzung, als eine höhere Form der ägyptischen ansehen, welche aber auf ihrem mütterlichen Boden nie zu dieser höhern Entwicklung hätte gelangen können. Kaum fünfzig Jahre später gesellte sich dieser Richtung eine andere bei, in ihrem Ursprunge vom fernen Asien her; aber der Stoff war zu fremdartig, das griechische Wesen noch zu sehr in sich geschlossen, als daß er hätte leicht Eingang finden können, er setzte sich jedoch fest und in dem Fortgange des allgemeinen Mischungsprozesses fand auch er seine Aufnahme und Entwicklung. Am Vereinzelten und Kleinen hatte der griechische Geist sich geübt und war erstarkt, und in der äußern Form, welche die Wissenschaft erhielt, war dieß ausgeprägt; aber auch diese Fessel fiel und er wußte sich zur größern Allgemeinheit zu erheben. Hieran hatte nun die zweite Richtung einen bedeutenden Antheil, was mit Euklides entschieden hervortritt; Archimedes und Apollonius, in seinen kleinen Schriften, führten die Sache auf den Höhepunkt bei den Griechen. Von jetzt an ward wenig mehr gewonnen und der ausgestreute Same sollte erst mehr als tausend Jahre später aufgehen. Die Astronomen bemächtigten sich zwar der Rechnung und schufen die Trigonometrie, aber nur zu praktischen Zwecken; die höhern Interessen der Mathematik blieben vorerst davon noch unberührt. Bis hierher haben wir eine natürliche, stufenweise Entwicklung, ganz dem Gange aller Entwicklungsprozesse gemäß, nur der letzte bedeutende Mathematiker Diophantus macht eine Ausnahme; wir haben aber gesehen, wie er, nach dem ganzen Inhalt seiner Arbeit, auf fremdem Boden steht. Einen ähnlichen Prozeß hat in Griechenland die Philosophie oder vielmehr die Theo-Kosmogonie durchgemacht; auch hier strömten beide Quellen, wie in der Mathematik; sie kamen zu einer eigenthümlichen, aber nothwendigen Vermittelung: sie führten zu einer Auflösung in Philosophie und Naturwissenschaften. Auch müssen wir hierzu noch im weitern Verlaufe die Religionswissenschaft nehmen. Auf dem Gebiete der gesellschaftlichen Einrichtungen sehen wir den Kampf der Griechen gegen die ägyptische Hierarchie und den orientalischen Despotismus; er geht durch alle Jahrhunderte hindurch und endigt in der Monarchie und der römischen Hierarchie.

Der Einfluß der beiden Richtungen liegt uns unläugbar vor; sie wirkten schon frühe auf Griechenland, erhielten aber ihre volle Entfaltung erst mit den persischen Kriegen, durch welche ganz Vorderasien und Aegypten den Griechen nicht allein zugänglich wurden, sondern sie wurden auch förmlich hellenisirt. Aus dem fernen Indien hatte sich der Buddhismus über den indischen Kaukasus herauf verbreitet und nach Osten und Westen sich Geltung zu verschaffen gewußt. Die Lehren Zoroasters hatten durch ihre Erhebung zur Staatsreligion überall Eingang gefunden. Die ägyptische Priesterschaft war mit ihren Geheimlehren hervorgetreten, und gelehrte Griechen waren in ihre Kaste aufgenommen

worden. Durch die Römer, die den Griechen in ihrer Herrschaft folgten, wurde nichts verändert. Selbst längst dem griechischen Einflusse erlegen, trugen sie vielmehr dazu bei, den Schauplatz dieses großen Gährungsprozesses noch zu erweitern. Unter so mannigfachen Einflüssen befand sich die Menschheit in einer Art geistiger Auflösung, und nie war vielleicht ihr Zustand trostloser als gegen den Anfang unserer Zeitrechnung, nie die geistige und physische Entwürdigung größer als bei ihrem Uebergange aus der alten Zeit in die neue. Die früheren höheren Glaubenskreise hatten sich zersetzt, weil sie entweder ungenügend waren oder ihrem wahren Wesen nach durch schmachvolle Unterdrückung nicht zur Entwicklung kamen und in leeren Formen aufgingen. Inmitten der allgemeinen Zersetzung, gleichsam als Versuch, den Leiden der Menschheit ein Ende zu machen, erhob sich die höchste Idee, das Prinzip der Liebe, der gleichen Menschenrechte und Menschenwürde. Dieses Prinzip ist die einzige Grundlage des Christenthums, aus welchem alle Pflichten des Menschen gegen Gott, gegen seinen Nebenmenschen, und gegen ihn selbst hervorgehen. Das Christenthum macht es dem Menschen zur Pflicht, mit allen seinen Kräften in das Leben einzugreifen und das Wohl und Glück des Einzelnen und der Gesammtheit zu fördern; es verlangt von uns die unausgesetzte geistige und körperliche Thätigkeit, um in jeder Weise die Bestimmung der Menschheit zu erreichen; es stellt das einzige Gesetz dar, welches uns vom Weltkeime bis zum vernünftigen Wesen offen vorliegt: das Gesetz der freien, ungehemmten Entwicklung des Weltlebens. Keine Religion war je der Förderung der Wissenschaften und der Entfaltung der Lebenszwecke günstiger als das Christenthum, und nichts lag ihm ferner als die Geringschätzung geistiger Erzeugnisse und jene rohe Lebensverachtung, welche, wenn sie aufrichtig ist, mit dem Untergange aller Kultur und auch des Christenthums enden würde.

Wenn man von einer Entwickelung des Christenthumes spricht, so muß man bedenken, daß in ihm der Menschheit die höchste Idee geboten wurde, die Verwirklichung des Weltgesetzes in der geistigen Sphäre, und daß das Höchste keiner Entwickelung, sondern nur einer Erhaltung fähig ist. Jede sogenannte Entwickelung konnte nur eine Abweichung von der ursprünglichen Reinheit sein, und in dieser Weise hat es sich auch entwickelt. Das Prinzip der Liebe, der Gerechtigkeit in einer Zeit der Selbstsucht, der schmählichsten Unterdrückung, der höchsten sittlichen Entartung, konnte nur Verfolgung erleiden von den Mächtigen und Großen der Erde, nur Verachtung von den schwelgenden Müßiggängern, deren Genüsse zu befriedigen, Tausende arbeiten und darben mußten. So fand denn auch die neue Lehre nur Anklang unter jener Klasse des Volkes, für welche sie Bedürfniß war, und blieb, so lange sie von diesen verkündet wurde, in ihrer ursprünglichen Reinheit bestehen; als aber die sogenannten Gebildeten und Gelehrten sich ihr zuwandten, trugen diese die herrschenden Ideen ihrer Zeit hinein, wodurch eine Reihe von Dogmen geschaffen wurde, welche, dem Christenthume fremd, einem ganz andern Ideenkreise angehörten. Hiermit traten denn auch alsbald Spaltungen in der Kirche ein und jede Partei beschuldigte die andere der Irrlehre oder Ketzerei. Dazu kam noch, daß das römisch-griechische Heidenthum einen hartnäckigen Kampf gegen die neue Kirche eröffnete, und daß von einem Staate, wie jetzt der römische war, eine Religion keine Unterstützung finden konnte, welche lehrte, daß alle Menschen Brüder seien, welche das Gesetz der allgemeinen Menschenliebe und der Gerechtigkeit predigte, ein Gesetz, welches jeden Augenblick auf die grausamste Weise verhöhnt wurde. Die Verfolgungen des Staates gegen die Kirche hörten nicht eher auf, als bis diese sich so weit verändert, sich den Verhältnissen so angeschmiegt hatte, daß sie nicht nur ihm

nicht mehr gefährlich, sondern sogar eine Stütze wurde. Als Staatsreligion erlitt das Christenthum die gleiche Veränderung wie alle älteren Religionen; die Sittenlehre bestand nur noch der Form nach, die Dogmen aber wurden zur Hauptsache. Dieses wäre nicht möglich geworden, wenn die Kirche frei geblieben wäre; aber der immer fortwuchernde ägyptische Einfluß trat endlich siegend auf, und es entstand eine Hierarchie, welche die Glaubenslehre willkürlich ordnete, im ägyptischen Geiste eine äußere Kirche einführte und sich zur höchsten Richterin in Glaubenssachen aufwarf. Ein gebildetes Volk glaubt aber nicht unbedingt; deßwegen wurde es entsittlichet und in den tiefsten Aberglauben versenkt. Und wie einst in Aegypten, so wurden Mysterien, eine heilige, den Laien verbotene Literatur und eine Volksreligion geschaffen, die unbedingten Gehorsam gegen die Kirche und die strengste Beobachtung der kirchlichen Gebräuche als wesentliches Erforderniß eines Christen verlangte. Auch in anderer Beziehung hatte die neue Hierarchie viele Aehnlichkeit mit der alten ägyptischen, denn gleich dieser strebte sie nach der weltlichen Herrschaft und es lag nicht an ihr, daß die Könige und Fürsten nicht ihre Diener geworden sind. Von einer andern Seite hatte die Kirche auch große Aehnlichkeit mit dem Buddhismus, welchem sie sich auch in ihren Dogmen am meisten näherte. Schon in den ersten Zeiten bildete sich nach buddhistischen Grundsätzen und ganz gegen den Geist des Christenthums das Einsiedler- und Mönchswesen aus, und statt mit allen Kräften in das Leben einzugreifen, wurde es für das höchste Verdienst erklärt, der Welt zu entsagen und ein einsames, beschauliches Leben zu führen.

Hieraus geht aber nur hervor, wie wenig die Menschheit in dieser Zeit fähig war, die ihr gebotene große Idee in sich aufzunehmen; sie läßt sich aber ohne Kampf nicht um ihre schönsten Rechte betrügen, und so zeigt uns denn die Geschichte der ersten Jahrhunderte eine ununterbrochene Folge von Empörungen gegen die Kirche; eine sogenannte Irrlehre folgte der anderen, und Ströme von Blut folgten den Schritten der Religion der Liebe. Mit fanatischer Wuth suchten die Priester alle Denkmäler des Heidenthums zu zerstören, sowie Alles, was auf die frühere Kultur und Wissenschaft Bezug hatte. Man glaubte damit alle früheren Erinnerungen auszulöschen und dem Christenthume die Alleinherrschaft zu verschaffen. So wurde im Jahre 389 unter Theodosius dem Großen, auf Anstiften des Patriarchen Theophilus, die in Alexandrien im Tempel des Serapis aufbewahrte große Bibliothek verbrannt. Die Tochter des Astronomen und als Commentator des Ptolomäus bekannten Theon von Alexandrien, die wegen ihrer Gelehrsamkeit in Philosophie und Mathematik berühmte Hypatia, wurde wegen einer Religionsstreitigkeit von dem christlichen Pöbel Alexandriens in Stücke zerrissen. Kaum begreiflich bleibt es unter solchen Umständen, wie die alexandrinische Schule nicht nur bis zur Eroberung durch die Araber 641 fortbestehen, sondern auch noch thätige Mitglieder aufweisen konnte, wenn diese Thätigkeit auch nur auf die Erhaltung und das Verständniß der Alten beschränkt war.

Es ist höchst interessant zu sehen, wie sich alle älteren Ideenkreise in der mannigfachsten Vermischung auf den Schauplatz der Geschichte gedrängt hatten und jetzt durch die Vermittelung des römisch-griechischen Wesens in seiner neuen Gestaltung auf die christliche Kirche einwirkten. In den ersten Jahrhunderten gab es so viele, mehr oder weniger verschiedene Glaubenskreise, als gelehrte Bischöfe vorhanden waren, die ihre Meinungen gegenseitig bekämpften, und der Sieg des einen oder des andern war durchaus nicht abhängig von seinem Inhalte, sondern von ganz anderen Verhältnissen. Nachdem das Christenthum Staatsreligion geworden war, und auch schon früher, hing der Sieg einer Partei

davon ab, ob es ihr gelang, sich die Billigung und Unterstützung der Mächtigen und Großen des Hofes zu verschaffen oder nicht, denn der Wille der Kaiser entschied über Rechtgläubigkeit und Irrlehre. So tief war also die Kirche gesunken, daß eine Hofintrigue über die Zukunft derselben entscheiden konnte. Im Anfange des vierten Jahrhunderts entstand in Aegypten der Arianismus und erreichte eine Ausdehnung und eine Macht, welche ihn zur herrschenden Kirche erhoben haben würde, wenn nicht der Kaiser Theodosius durch jedes Mittel, welches der weltlichen Macht zu Gebote stand, seine Unterdrückung und Vernichtung herbeigeführt hätte.

Ganz außerhalb dieses Zersetzungs- und Neugestaltungsprozesses und beinahe noch unberührt von der Kultur und ihrer Entartung standen in den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung noch zwei große Abtheilungen des Menschengeschlechtes, die noch am wenigsten von der jetzt eingetretenen allgemeinen Verschmelzung berührt worden waren: die germanischen und arabischen Völkerschaften. Ueber den Antheil, welchen sie an der allgemeinen Entwicklung genommen, wird die Folge berichten.

Die Mathematik der Inder.

Indien bildete, in vielen Beziehungen, zu Griechenland einen wahren Gegensatz, obschon in manchen Dingen auch wieder eine gewisse Uebereinstimmung nicht zu verkennen ist. Hatten wir es dort mit einer noch wenig veränderten arischen Bevölkerung zu thun, welche gerade so viel fremde Elemente aufgenommen hatte, als nöthig waren, um sie der Einwirkung einer gleichfalls schon gemischten Kultur leicht zugänglich zu machen; so haben wir hier eine wesentlich äthiopische Bevölkerung mit eigenthümlicher Kultur wie in Aegypten, in welche ein arisches Element umschaffend eingewirkt hat. In Griechenland war das arische Element fähig, den ägyptischen Einfluß abzuweisen, seine politischen Einrichtungen festzuhalten und zu entwickeln; die Aufnahme des fremden Elementes trug selbst dazu bei, die Festgestaltung zu befördern, ohne daß diese, wie in Aegypten, das Uebergewicht erhielt und in unveränderliche Formen überging. Wir haben gesehen, wie hierdurch das unbestimmte und schwankende arische Element zu jener Klarheit und Bestimmtheit gelangte, welche die Grundlage der geistigen Größe des griechischen Volkes ausmachten, und wie sich dieß in der Mathematik ausgesprochen hat. Ganz eben so ging in Indien das arische Element in dem einheimischen auf, und dieses erhielt sich in seiner Eigenthümlichkeit und seinen gesellschaftlichen Einrichtungen; aber auch in der gleichen Weise brachte das fremde Element den Grundzug der Festgestaltung zur Auflösung, wie dieß schon im früheren angegeben worden ist und wie es sich nun auch in der Mathematik kundgibt. Nicht zu läugnen ist hierbei, daß die äußern Verhältnisse diese Richtungen bedeutend unterstützten. Die griechische Welt war klein, war sehr beschränkt, das vielgetheilte Land gleichsam geschaffen, auch einer vielgetheilten Bevölkerung eine unabhängige, eigenthümliche Entwickelung zu gewähren; das schöne, aber doch nicht überreiche Land gewährte nur nach Anstrengungen die nothwendigen Bedürfnisse; alles vereinigte sich, den Körper kräftig und den Geist nüchtern zu erhalten. Die indische Welt war dagegen unermeßlich zu nennen, das höchst fruchtbare, überreiche Land brachte ohne Anstrengung nicht bloß das Nothwendige, sondern einen Ueberfluß von Dingen hervor, welche zum schwelgerischen Lebensgenusse dienten. Unthätigkeit bei

leichtem Lebensgenusse und die Beschauung einer in jeder Beziehung großartigen Natur weckte das Nachdenken der Inder und gab ihren geistigen Erzeugnissen eine eigenthümliche Richtung. Solche Verhältnisse sind aber nur fördernd, keineswegs erzeugend. Die Auffassung der Außenwelt war großartiger bei den Indern als bei den Griechen; sie waren schon dahin gelangt, die Körper dieser Welt, die irdischen Gestaltungen in das Unendliche, Unerfaßbare, Ungeformte, Ewige aufzulösen, die Welt selbst als das Wandelbare, Vergängliche; die Form, die Gestalt verlor gegen die Substanz, das Göttliche, allen Werth. Dieses prägte sich nun in der indischen Mathematik eben so aus wie bei den Griechen, nur im Gegensatze: die Griechen suchten das Gegebene, das Gestaltete, wie es nothwendig so ist, zu erkennen; die Inder forschten, erzeugten Gestaltungen, und begnügten sich zu wissen, daß etwas ist, ohne sich zu kümmern, wie es ist. Beide Richtungen waren einseitig, aber beide nothwendig; ihrer Verbindung verdankt die neuere Mathematik ihre rasche Entwickelung. Während die Griechen Alles an die Form knüpften, so daß auch rein arithmetische Sätze geometrisch dargestellt wurden, kannten die Inder nur die Zahl, und die Geometrie machte einen Theil ihrer Arithmetik aus.

Bei der Darstellung der Geschichte der indischen Mathematik sind wir nicht in gleich günstiger Lage wie bei der griechischen; unsere ganze Kenntniß derselben beschränkt sich auf zwei Werke aus dem 7ten und 12ten Jahrhundert unserer Zeitrechnung und auf andere astronomische Schriften, welche nicht älter sind. Wir können weder auf den Anfang zurückgehen, noch können wir eine Entwickelung verfolgen; außerdem sind auch diese beiden Werke nur in Uebersetzungen bekannt, was ein wesentliches Hinderniß für die Beurtheilung ist, denn oft gibt ein einziger Ausdruck richtig gefaßt bedeutenden Aufschluß. Der sicherste Weg dürfte deßhalb hier wohl sein, zuerst diese Werke selbst zu betrachten, um aus ihrem Inhalte, aus dem Material, was sie uns bieten, Folgerungen für die Sache zu ziehen. Die Mathematik ist in Indien nie eine selbstständige Wissenschaft gewesen; sie wurde nie, wie bei den Griechen, um ihrer selbst willen kultivirt, sondern sie war stets die Dienerin der Astronomie und nur für praktische Zwecke vorhanden. Die Inder besaßen daher auch keine mathematischen Werke, aber in den Schriften der Astronomen waren ihr eigene Kapitel gewidmet, worin dasjenige gelehrt wurde, was die Astronomie erforderte, zugleich aber auch das, was von der Mathematik im Leben und in den Geschäften Anwendung finden konnte. Am ehesten könnte man diese Werke mit dem Almagest vergleichen, obgleich auch hier die Aehnlichkeit nur eine entfernte ist. In wenigen Dingen ist man vielleicht entgegengesetzterer Meinung gewesen, als über den Werth und das Alter der indischen Schriften, während die Einen bei ihnen die höchste Weisheit und eine vieltausendjährige Kultur finden wollten, sprachen ihnen die Andern alles tiefere Wissen ab und setzten die Entstehung ihrer Werke in eine sehr neue Zeit. Die letzte Richtung wird nun besonders durch unsere Erziehungsweise begünstiget, durch welche uns von Jugend auf beigebracht wird, daß es nie etwas Höheres gegeben habe und in der Folge geben könne, als das klassische Alterthum. Wie hoch nun dieses auch stehen mag, so kann es uns doch nicht als einziges Muster dienen; unser Streben geht vorwärts einer andern Entwickelung entgegen, von neuer Grundlage aus, welche das klassische Alterthum nicht kannte, und welche erst mit dem Christenthum in die Welt gekommen ist. Aber die uns eingepflanzten Vorurtheile wirken schädlich; wir lernen dadurch die Gegenwart, wie die nicht klassische Vergangenheit, das Nationale, wie das Fremde geringschätzen; wir bewegen uns dadurch in einer einseitigen Richtung, welche uns das Verständniß einer andern

erschwert. Etwas anderes ist es, sich eine genaue Kenntniß des klassischen Alterthumes zu erwerben; es ist dieß sogar nothwendig, wenn wir nicht die Bestrebungen von Jahrtausenden verlieren wollen. Allein wir dürfen uns nicht von einer einzigen Richtung leiten lassen, sonst werden wir irre geleitet. Deßhalb ist es so wichtig, das Streben der Menschheit in ihrer Gesammtentwickelung kennen zu lernen, was nur möglich ist, wenn wir ihre Produktionen nicht mit Geringschätzung behandeln, sondern uns bemühen, sie zu verstehen und ihre wahre Bedeutung zu erforschen. In der neueren Zeit hat man nun auch angefangen, diese Richtung zu verfolgen, das Material für die Kenntniß des alten Indiens häuft sich immer mehr, und auch für die mathematischen Wissenschaften dürften sich noch Quellen eröffnen, welche unser Urtheil fester zu begründen vermögen.

In den indischen Schriften wird auf einen älteren Astronomen Aryabhatta zurückgewiesen, dessen Zeitalter ungewiß ist, der aber in den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung gelebt haben muß. Die Kenntnisse oder Erfindungen, welche ihm zugeschrieben werden, setzen aber bereits eine Gewandtheit in der Behandlung der Mathematik voraus, welche mit Sicherheit auf eine viel frühere Kultur dieses Gegenstandes schließen lassen. Dahin führt uns auch die Beschaffenheit der Mathematik, welche die Buddhisten schon im ersten Jahrhundert nach China brachten. Die Werke Aryabhatta's sind noch nicht wieder aufgefunden worden und von früheren Schriftstellern fehlen uns Nachrichten; wir möchten aber nicht zweifeln, daß solche vorhanden waren, da hier, wie überall, eine natürliche Entwickelung angenommen werden muß. Es dürfte hier nicht ungeeignet sein, auf eine Stelle in dem Epos „Nal und Damajanti" hinzuweisen, aus welcher wenigstens so viel hervorgeht, daß man schon tausend Jahre vor unserer Zeitrechnung in Indien von einer Zahlenwissenschaft sprechen konnte. Die Sanskritwerke theilten das Schicksal aller Priesterliteratur; nur für einen kleinen Theil der Bevölkerung bestimmt, befand sie sich in den Tempeln oder in den Händen weniger Personen, so daß sie leicht untergehen konnte. Solche Verluste waren aber wieder zu ersetzen, weil die für besonders wichtig oder heilig gehaltenen Werke auswendig gelernt werden mußten und dann aus dem Gedächtnisse nachgeschrieben werden konnten. Aryabhatta scheint der Euklides der Inder gewesen zu sein, der die Arbeiten seiner Vorgänger gesammelt und mit seinen eigenen vermehrt hatte; außerdem war er der Gründer einer astronomischen Schule, lehrte die Achsendrehung der Erde, und seine Angabe über den Umfang derselben kommt der Wahrheit sehr nahe. Es ist dieß ein günstiges Zeichen für den Zustand der geistigen Entwickelung in Indien zur Zeit des Aryabhatta; sie scheint aber auch bald nachher ihren Höhepunkt erreicht zu haben. Wie bei den Griechen die Ansichten Aristarchs von unserem Sonnensystem nicht zur Geltung gelangten und dem Systeme des Ptolomäus weichen mußten, so wurden auch in Indien von den späteren Astronomen die Lehren Aryabhatta's bekämpft und verworfen. Mit dem Siege des Brahmanismus über den Buddhismus schloß die geistige Regung in Indien; wie allerwärts folgten den nächsten Zeiten der Ruhe einige glänzende Erscheinungen, dann beschränkte man sich auf die Sammlung, Erhaltung und Erklärung der früheren geistigen Produktionen.

In Griechenland hatte sich zuerst die Mathematik von den Fesseln einer Priesterwissenschaft befreit; bei ihrem ersten Auftreten schon war sie zum Gemeingute aller Menschen bestimmt. Mit dem ersten Beweise mußte die poetische Form des empirisch gefundenen Satzes fallen, welche in dunkler, geheimnißvoller Fassung nur dem Gedächtniß dienen und die Ueberlieferung erleichtern sollte.

Von diesen Fesseln ist aber die indische Mathematik nie frei geworden, und wenn sie durch äußere Verhältnisse auch nicht ganz auf den Kreis der Brahmanen beschränkt blieb, so hatte sie doch immer ihre dunkle poetische Form beibehalten. Wir dürfen auch nicht glauben, daß dieß je anders war; wenn der Forscher einen Satz gefunden hatte, so wurde er sogleich in diese Form gesetzt und seine Richtigkeit in Beispielen gezeigt. Man betrachtete eine solche Erfindung, wie erwähnt, als hervorgerufen durch die unmittelbare Eingebung der Gottheit, wodurch natürlich jeder Beweis überflüssig wurde. Dieß gilt jedoch besonders nur von jenen Sätzen, deren Ursprung nicht mehr nachgewiesen werden konnte, und schon Aryabhatta, der solche Erfindungen gemacht hatte, wurde als ein gewöhnlicher, uninspirirter Mensch angesehen, ein Verhältniß, welches wohl aus dem Kampfe der beiden Religionen mit einander hervorgegangen sein mag.

Die Werke, an welche wir unsere Untersuchungen anknüpfen müssen, sind die der Astronomen Brahmegupta und Bhaskara Acharya. Das erste ist um 628, das andere um 1150 geschrieben, beide sind Ueberlieferungen einer frühern Zeit, und durch die Verfasser scheint nur wenig hinzugekommen zu sein. Brahmegupta hatte ein Werk über Astronomie geschrieben, welches in 20 Kapitel eingetheilt war, von welchen das 12te über Arithmetik und Meßkunst, das 18te über Algebra handelte. Was wir dagegen von Bhaskara hierüber besitzen, bildet die Einleitung zu seinem astronomischen Werke. Hiernach sollte man erwarten, daß diese Abhandlungen nur Dinge enthielten, welche Beziehungen zur Astronomie hätten, man findet aber auch Manches aufgenommen, was damit nicht im Zusammenhange steht. Der Inhalt beider Arbeiten wird am besten den Geist derselben erkennen lassen.

Brahmegupta's Arithmetik und Algebra.

Der Anfang der Arithmetik, welche aus zehn Abschnitten besteht, bezeichnet zugleich den Umfang dieser Wissenschaft im Sinne des Brahmegupta; er nennt denjenigen einen Calculator, welcher der zwanzig Operationen und der acht Bestimmungen mächtig sei. Die Operationen sind: 1) Zuzählen, 2) Abzählen, 3) Vervielfachen, 4) Theilen, 5) und 6) Erhebung ins Quadrat und Quadratwurzel, 7) und 8) Kubus und Kubikwurzel, 9—14) die sechs Operationen mit Brüchen, 15—19) die Regel von 3 bis 11 Gliedern, 20) die Regel über den Tausch. Zu den acht Bestimmungen werden gezählt: 1) Bestimmung der Mischungen, Legirungen und der Zinsrechnungen, in so weit als Zins und Kapital vereint erscheinen, 2) Progressionen, 3) Ebene Geometrie, 4—7) Bestimmungen körperlicher Inhalte in verschiedenen Anwendungen, 8) das Messen durch den Schatten. Mit Ausschluß einiger Theile bietet das Uebrige wenig Abweichung von unserer jetzigen Art der Betrachtung dar; die 28 Theile sind nicht alle und nur oberflächlich berührt. Der ganze erste Abschnitt, welcher die 20 Operationen umfassen soll, ist in 12 allgemeinen Regeln zusammengedrängt, und diese werden nur etwas ausführlicher durch den Commentator Chaturveda erklärt und durch Beispiele erläutert. Der zehnte Abschnitt ist ein Zusatz hierzu, in welchem das Wichtigste die Anweisung zur Sexagesimalrechnung ist, zu welcher am Schlusse bemerkt wird, daß sie nur einen Theil des Gegenstandes ausmache, das Uebrige aber im 21sten Kapitel vorkommen werde, bei Gelegenheit der Berechnung der Sinus. Hierbei macht der Commentator die Anmerkung, daß auch er nur einen Theil zu erklären beabsichtige, denn sonst würden hunderte von Bänden für jeden einzelnen Theil nicht hinreichen, was

in sehr großem Widerspruche mit der Dürftigkeit des Werkes steht. Manche der Regeln bei diesen Rechnungen sind nur auf eine Annäherung berechnet und geben gerade keinen großen Begriff von der Genauigkeit der astronomischen Rechnungen der Inder.

Im 3ten Abschnitt werden Regeln für die arithmetischen Reihen gegeben; in Bezug auf die gebräuchlichen Bezeichnungen wird angegeben, daß $t = a + (n-1)d$, $S = n\frac{(a+t)}{2}$ und $n = \frac{-(2a-d) + \sqrt{(2a-d)^2 + 8dS}}{2d.}$ Eben so wird die Summe der dreieckigen Zahlen, der Quadratzahlen und der Kubikzahlen angegeben.

Viel interessanter ist der vierte Abschnitt, welcher die ebene Geometrie enthält, die nach ihrer Einreihung und Behandlung nur einen Theil der Arithmetik ausmacht. Nichts kann verschiedener sein als die Art und Weise, wie die Griechen und Inder die Geometrie behandelten; im Sinne der Griechen hat es in Indien nie eine Geometrie gegeben. Was hier unter dem Titel ebene Figuren mitgetheilt wird, trägt noch ganz den Charakter vorgriechischer Forschung, wie wir sie früher bezeichnet haben, und wie sie sich in Indien am längsten erhalten hat. Die ganze Behandlungsweise ist so originell, daß an keinen andern Einfluß als einen von gleicher Richtung gedacht werden kann, und wenn uns auch die Behandlung der Wissenschaften am Nil und Euphrat vielleicht für immer verloren ist, so haben wir doch hier Reste, welche, wenn auch schon auf einer höheren Stufe, uns doch in den Geist einer früheren Zeit zurückführen können. Die Grundlage aller Betrachtungen und aller Rechnungen ist der Dreisatz oder die Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke und dann der pythagoräische Satz. Von der Lehre der Aehnlichkeit ist nirgends die Rede, von der Gleichheit der entsprechenden Winkel als nothwendige Bedingung wird nichts erwähnt, der Dreisatz wird überhaupt nur in rechtwinkeligen Dreiecken, welche den spitzen Winkel gemeinschaftlich haben, angewandt. Diese Anwendung muß sehr alt sein und wird als eine Sache betrachtet, welche sich von selbst versteht, weßhalb auch gar keine Untersuchungen darüber vorausgeschickt werden. In diesem rohen Zustande ist die Lehre von der Aehnlichkeit eine Ueberlieferung aus den ersten Zeiten der geistigen Regung bei den Menschen; sie bildete einen jener Erfahrungssätze, welche von Generation zu Generation sich fortgepflanzt haben, deren anerkannte Wahrheit Niemand bezweifelte oder besser zu begründen suchte. Hier zeigt sich wieder, wie nothwendig es ist, daß der Kulturgang eines Volkes gewaltsam unterbrochen werde, wenn seine Ideen stereotyp geworden sind, wie seine Kultur an ein anderes Volk übertragen werden muß, welches sie frei auffaßt und mit ungebeugter Kraft nach einer neuen Richtung fortführt, wie dieß in Griechenland der Fall gewesen ist. Solche Ereignisse müssen eintreten; sie sind eine nothwendige Folge des steigenden Weltprozesses, dem steten Streben nach ungehemmter Entwickelung. Eben so steht der pythagoräische Satz da; er ist nicht weniger alt; an einen Beweis desselben wird nicht gedacht. Eigentlich ist er auch bei den Indern nur ein Zahlensatz, und sie kannten nur die Regel, zwei Zahlen zu finden, deren Quadrate zusammen wieder ein Quadrat ist. Brahmegupta gibt in seinem 31sten Satze die Vorschrift: wenn m und n zwei willkürliche Zahlen sind, so ist die Senkrechte $2m.n$ und die Basis $m^2 - n^2$. Eines Beweises bedurfte es nicht; für zwei angenommene Zahlen durfte man nur die Rechnung machen, um sich von der Richtigkeit der Vorschrift zu überzeugen. Ein derartiges Verfahren ist um so natürlicher, als die Inder

nie daran dachten, Eigenschaften der Figuren aufzusuchen, und nur nach Größenbestimmungen forschten, während die Griechen gerade umgekehrt diese Eigenschaften allein als Ziel ihrer Bestrebungen kannten und das Metrische vernachläßigten.

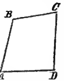
Von diesen Grundlagen ausgehend betrachtet nun Brahmegupta das Dreieck, das Viereck und den Kreis, und alle Sätze, welche er vorbringt, beziehen sich nur auf die Berechnung der Flächen und einzelnen Theile der Figuren. Die Sätze über die Vierecke betreffen besonders eine Klasse derselben, nämlich die Kreisvierecke oder Antiparallelogramme. Man hat darin eine feine geometrische Untersuchung finden wollen, man hat gesucht darzuthun, wie er in seinen ebenen Figuren nur eine Abhandlung über die Kreisvierecke habe liefern wollen, und darauf wieder den Schluß gegründet, daß die späteren Mathematiker, welche seine Resultate zum Theil für falsch erklärten, die ältern Werke nicht mehr verstanden hätten, daß daher ein früherer, viel vollkommenerer Zustand der Geometrie in Indien angenommen werden müsse. Diese Meinung gründet sich allein darauf, daß Brahmegupta wirklich nur Kreisvierecke betrachtet, ohne dieses aber anzuführen; es wird sich jedoch zeigen, wie er zu dieser Art Vierecke gekommen ist und warum er sie gewählt hat. Wenn man die Folge der Sätze sieht, welche der indische Astronom anführt, wird man sogleich einsehen, daß nichts zu der Annahme berechtigt, seiner Geometrie einen solchen speciellen Zweck zu verleihen; er liefert vielmehr Alles, was ein Inder liefern konnte, er lehrte, wie die wichtigsten Rechnungen für den praktischen Gebrauch, für das Dreieck, Viereck und den Kreis ausgeführt werden müssen. Dabei bediente er sich, der Leichtigkeit wegen, besonderer Figuren, und daß er seinen Resultaten eine allgemeinere Geltung zuschreibt als sie haben, wird mit Recht von den späteren Mathematikern getadelt. Was aber einen früheren höheren Zustand der Geometrie betrifft, so muß dieser ganz in Abrede gestellt werden, denn einmal besaßen die Inder gar nicht die Mittel zu geometrischen Entwickelungen im Sinne der Griechen, und dann waren sie auch durch ihre ganze geistige Richtung nicht dazu geeignet.

Die ersten Verse der Geometrie enthalten zwei Regeln: durch die erste soll der ungefähre Flächeninhalt des Dreieckes und Viereckes, durch die zweite der genaue Inhalt bestimmt werden. In der ersten Vorschrift, nach welcher das Produkt aus den halben Summen der Seiten und Gegenseiten der ungefähre Flächeninhalt sein soll, hat man offenbar einen jener alten Sätze, welche nach einer falschen Analogie gebildet wurden, deren Ungenauigkeit man zwar kannte, die aber aus einer gewissen Achtung vor ihrem Alter beibehalten wurden. Nur dadurch kann man sich die Aufnahme dieser Vorschrift erklären, die uns sonst einen ganz schlechten Begriff von der Mathematik der Inder geben würde; sie gilt als genaue Bestimmung für das Rechteck, gibt aber, auf andere Figuren angewandt, nicht einmal eine grobe Annäherung. Die Anwendung auf das Dreieck wird dadurch vermittelt, daß man die der Grundlinie gegenüberliegende Seite des Vierecks gleich 0 setzt. Die genaue Vorschrift, die Fläche des Dreiecks aus der Grundlinie und der Höhe zu berechnen, war übrigens bekannt; wenn sie auch hier nicht gegeben wird, so liegt sie doch so sehr am Tage, daß man ihre Kenntniß dem Verfasser nicht absprechen kann, wenn man ihn nicht ganz unfähig für jede mathematische Untersuchung erklären will. Wichtiger ist die andere Vorschrift, welche sich wieder auf das Dreieck und das Viereck bezieht; in Bezug auf das letztere wird keinerlei Beschränkung gemacht, obschon dies sonst, wo es nöthig ist, geschieht, so daß man nicht

: p. 298. ! from Chasles p. 456? ma non è vero.

zweifeln kann, er habe diese Vorschrift für alle Vierecke verstanden. Setzt man die halbe Summe aller Seiten viermal hin und zählt einzeln genommen die Seiten davon ab, so gibt die Quadratwurzel aus dem Produkte der Reste den genauen Flächeninhalt des Dreiecks und Vierecks. Für das Dreieck, welches als Viereck betrachtet wird, dessen eine Seite = 0 ist, ist die Vorschrift richtig; auf das Viereck angewandt, gilt sie nur für das Kreisviereck. Hier lassen sich viele Muthmaßungen anbringen über den Scharfsinn und die Gewandtheit des Geometers, welcher diese Regel aufgefunden, die außerdem höchst wahrscheinlich schon früheren Werken entnommen war. Die Sache ist nicht so schwer zu ermitteln, wenn man bedenkt, daß die Inder sich immer Figuren zu konstruiren suchten, deren Theile rationale Zahlen sind, und daß sie mit der Zahlenrechnung äußerst vertraut waren. Später wird angeführt werden, daß sie eine Bezeichnung für die Potenzen und für die nothwendigsten Operationen hatten, und wenn sie sich auch nicht der Buchstaben bedienten, wie wir, so trafen dafür bestimmte rationale Zahlen ein. Sind z. B. 15 und 13 die Seiten und 14 die Grundlinie eines Dreieckes, so sind die Abschnitte der Grundlinie 5 und 9, die Höhe 12; wie solche Dreiecke gebildet werden können, gibt der Verfasser in der Regel 3—4 an. An den Dreiecken und Vierecken, aus solchen Zahlen gebildet, stellten sie nun ihre Betrachtungen an und machten Versuche verschiedener Art, die Figuren der Rechnung zu unterwerfen. Sobald man einmal auf die Idee gekommen war, die Figuren durch Quadrate auszumessen, war die erste Figur, welche sich der Ausmessung darbot, das Quadrat selbst, und die Begriffe Wurzel und Quadrat gehören zu denen, zu welchen man am frühesten gelangt war. Als nächste Figur stellte sich das Rechteck dar, und nichts war einfacher als dessen Zerlegung in Quadrate und die Erfindung der Vorschrift zur Berechnung der Fläche: Multiplicire die eine Seite mit ihrer anliegenden, so hast du die Fläche. Die Praxis kannte zuerst nur Rechtecke, aber diese waren in den seltensten Fällen genaue Rechtecke und hier stellte sich die Unzulänglichkeit der Regel sogleich heraus; man war daher genöthiget, etwas anderes zu erfinden. Die nächste Gedankenfolge ist sehr leicht zu errathen. Wenn man etwa das Viereck ABCD hatte, in welchem AB etwas verschieden von CD und eben so AD verschieden von BC war, so dachte man ganz natürlich das Viereck auf ein Rechteck zurück zu bringen, wenn man diese Unterschiede ausglich und von CD etwas abnahm und dem AB zusetzte, so daß beide gleich wurden; dieselbe Betrachtung wiederholte sich für die beiden andern Seiten und so kam man auf die Vorschrift, die halbe Summe der Seiten und Gegenseiten mit einander zu multipliciren, oder die Regel aufzufinden, welche Brahmegupta angegeben hat, die sich beim wahren Rechtecke außerdem auch vollkommen bestätigte. Gewiß war ursprünglich die Vorschrift auch nur für solche Vierecke bestimmt, welche vom Rechtecke wenig verschieden waren, und wurde später nur ungeschickt angewandt. Eine ähnliche Vorstellung lag nun ganz naturgemäß in derselben Richtung. Nimmt man an, daß die Seiten eine größere Abweichung vom Rechtecke zeigten, so war eine Ausgleichung nöthig, welche sich auf alle Seiten gleichmäßig erstreckte. Statt die halbe Summe der gegenüberliegenden Seiten zu nehmen, nahm man die halbe Summe aller Seiten; diese mußte aber in eine gleiche Verbindung mit allen Seiten gebracht werden, was am einfachsten dadurch geschah, daß man nun jede Seite von dieser halben Summe hinwegnahm; das Produkt dieser Reste, aus vier statt aus zwei Faktoren bestehend, mußte das Produkt zweier Flächen-

Fig. 10.



räume sein, die man als gleich annahm und also durch die Wurzel die Fläche erhalten wurde. Die Rechnung zeigte sich sogleich richtig, wenn man die Anwendung auf das Rechteck machte; sie zeigte sich weiter richtig in Bezug auf die Vierecke aus rationalen Zahlen, welche die Inder sich zu konstruiren pflegten. Manche Versuche mögen dieser Erfindung vorausgegangen sein, gewiß gehört dazu auch der: den vierten Theil der Seitensumme ins Quadrat zu erheben u. a. m. Man muß hierbei nie außer Acht lassen, daß hier nur vom Vierecke die Rede war, und zwar nur von einem solchen, welches von einem Rechtecke nur wenig Abweichung hatte; es läßt sich gar nicht denken, daß diese Vorschriften unbedingt angewandt worden wären, weil der bloße Augenschein schon dagegen sprach, wenn man extreme Fälle nahm. Die Anwendung auf das Dreieck folgte später, und da sie sich hier bald als richtig bewies, so wurde das Vertrauen in sie um so größer. Die Formel für das Dreieck zieht sich durch die ganze Geschichte der Mathematik hindurch von den frühesten Zeiten an; schon der ältere Heron soll sie gekannt haben; aber nichts kann sicherer sein, als daß sie von den Griechen nicht erfunden wurde, denn sie hat durchaus keine Aehnlichkeit mit den Sätzen der griechischen Geometrie, und alle geometrischen Beweise sind für einen so einfachen Satz viel zu künstlich und schwierig; aus geometrischen Betrachtungen ist sie nicht hervorgegangen; die Rechnung allein vermag den natürlichen Beweis zu liefern. Auf diesem Wege ist sie aber auch nicht entstanden, denn dazu ist sie zu alt; sie stammt aus einer Zeit, wo die Hülfsmittel zu einer solchen Unternehmung noch nicht vorhanden waren. Im Vorhergehenden ist der Weg angedeutet worden, auf welchem sie allein entstanden sein kann: sie gehört zu den Sätzen, welche aus der frühen Periode der Menschheit stammen, wo ein wissenschaftliches Denken noch nicht vorhanden war.

Ganz interessant sind nun, durch ihre Eigenthümlichkeit, die Untersuchungen über das Viereck. Mit einem allgemeinen Vierecke hätte Brahmegupta wenig anzufangen gewußt, er bedient sich deßwegen nur solcher Vierecke, deren Theile ganze rationale Zahlen sind; zu diesen gelangt er aber auf folgende Weise. Man bilde zwei rechtwinkelige Dreiecke, deren Seiten ganze Zahlen sind, nach der bereits angegebenen Vorschrift. Die kleinsten dieser Art haben die Seiten 3, 4, 5 und 5, 12, 13; von jedem derselben leite man zwei andere ab, in der Art, daß man die Seiten des einen einzeln mit den Katheten des andern vervielfacht; hierdurch entstehen vier rechtwinkelige Dreiecke, deren Seiten ganze Zahlen sind, und von welchen die Hypotenuse, Senkrechte und Basis der Reihe nach sind: 60, 48, 36; 52, 48, 20; 39, 15, 36; 25, 15, 20. Nun hat das erste und zweite Dreieck die gleiche Seite 48, sie lassen sich daher zu einem Dreiecke vereinigen, welches die Seiten 60, 52, die Grundlinie $36 + 20 = 56$ und die Höhe 48 hat; das dritte und vierte Dreieck können durch die gleiche Seite 15 angeschlossen werden, und bilden alsdann ein Dreieck mit den Seiten 30 und 25, der Grundlinie $20 + 36 = 56$ und der Höhe 15. Beide Dreiecke haben die Grundlinie 56, durch welche sie zu einem Vierecke auf zwei verschiedene Arten verbunden werden können, einmal indem man die gleichen, und dann die ungleichen Abschnitte an einander legt. Im ersten Falle entsteht ein Viereck, in welchem sich die Diagonalen unter rechten Winkeln schneiden; im andern sind die an der gemeinschaftlichen Grundlinie liegenden Winkel rechte Winkel; in beiden Fällen machen die einander gegenüber liegenden Winkel zusammen 2 Rechte aus, weßhalb die Vierecke Kreisvierecke oder Antiparallelogramme sind. An solchen Vierecken sind nun alle Vorschriften abgeleitet, welche Brahmegupta gibt, bei dem zweiten (Fig. 12) ist

Fig. 11.

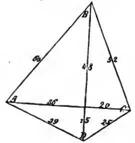
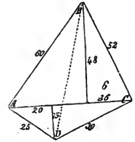


Fig. 12.



noch zu bemerken, daß, weil A und C rechte Winkel sind, BD der Durchmesser des Kreises ist, welcher über die vier Eckpunkte geht.

Wenn man nun diesen Figuren einige Aufmerksamkeit widmet, so wird man leicht erkennen, wie die Inder, ohne große Geometer zu sein, folgende Sätze erfinden konnten. — Man vervielfache die Seiten, welche in den Endpunkten mit der Diagonale zusammentreffen, und nehme die Summe der Produkte, eben so nehme man die Summe der Produkte der Seiten, welche auf einerlei Seite mit derselben Diagonale liegen, und theile die erste Summe durch die zweite; den Quotienten vervielfache man mit der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten und ziehe aus dem Produkte die Wurzel, so erhält man die Diagonale. — Z. B. in Figur 12, $60.52 + 25.39 = 4095$ und $60.25 + 52.39 = 3528$, $60.39 + 25.25 = 3640$, daher $\frac{4095.3640}{3528} = 65.65$, also $BD = \sqrt{65.65} = 65$. — Die Summe der Produkte aus den Gegenseiten ist gleich dem Produkte der Diagonalen. — Im 27sten Satze lehrt Brahmegupta den Radius des einem Kreise eingeschriebenen Dreiecks finden: Man theile das Produkt der beiden Seiten durch die doppelte Höhe. Hier hätten auf dem gewöhnlichen Wege zwei getrennte Dreiecke verglichen werden müssen; der Commentator Chaturveda weiß sich hier nicht anders zu helfen, als daß er die beiden Dreiecke über einander rückt und dann erst die Proportion aufstellt, dabei aber bemerkt, daß der Satz seine Entstehung beim Vierecke habe. In der That sieht man augenblicklich, daß, mit Rücksicht auf die Entstehung dieser Zahlen $\frac{60.52}{48} = \frac{5.12.4.13}{4.12} = 5.13 = 65$ oder auch $\frac{75.39}{15} = \frac{5.5.3.13}{3.5} = 5.13 = 65.$ Auf gleiche Weise fließen aus dieser Darstellung noch andere Sätze.

Die 22ste Regel lehrt die Abschnitte der Grundlinie eines Dreiecks finden, es ist dieselbe Rechnung, wie sie Ptolomäus hat: ihre Grundlage ist der pythagoräische Satz.

Es war nicht nöthig, sich bei diesen Rechnungen der Buchstaben zu bedienen; bestimmte Zahlen leisteten dem Inder dasselbe, und er konnte in derselben Weise zum Ziele gelangen. Bei allen auf die gleiche Weise gebildeten Vierecken bleiben sich die Resultate gleich. Die folgenden Regeln beziehen sich auf die Berechnung der senkrechten Linien im Vierecke und ihren Abschnitten durch die Diagonalen, so wie auf die Verlängerungen der Seiten bis zu ihrem Durchschnitte, auf die Höhe des hierdurch entstandenen Dreieckes und die Abschnitte der Grundlinie. Alle diese Rechnungen werden durch den Dreisatz ausgeführt und bieten weiter nichts besonderes dar, nur im letzten Falle müssen zwei Ausdrücke mit zwei unbekannten Größen verbunden werden, worüber aber weder der Text noch der Commentar etwas angibt. Es war nöthig, auf diese Einzelheiten einzugehen, um sich gegen eine falsche Auffassung der indischen Geometrie zu sichern; sie bestätigen die Ansicht, daß die Inder nur eine Rech-

nung, aber keine eigentliche Geometrie kannten. Die nächsten Rechnungen beziehen sich auf den Kreis: das ungefähre Verhältniß des Durchmessers zum Umfang wird angegeben wie 1 : 3, das genaue wie 1 : $\sqrt{10}$. Hiernach werden die Rechnungen für den Umfang und den Flächeninhalt nach den Formeln $U = 3\,d$ oder $U = \sqrt{10\,d^2}$ und $F = 3\,r^2$ oder $F = \sqrt{10\,r^4}$ gemacht. Eben so lehrt der Verfasser, wie Rechnungen auszuführen sind, welche aus der Relation zwischen der halben Sehne, dem Pfeile und dem Radius abgeleitet werden können. Für das bekannte Gesetz, daß das Produkt der Abschnitte des Durchmessers so groß ist, als das Quadrat der halben Sehne, führt der Commentator den Aryabhatta an; überhaupt muß man wohl alle hier vorkommenden Hauptsätze einer früheren Zeit zuschreiben. Auch diese Sätze erforderten keine anderen Hülfsmittel, als die bereits angeführten. Das Verhältniß 1 : 3 ist offenbar der Erfahrung entnommen; wie das andere 1 : $\sqrt{10}$ entstanden ist, darüber wird nirgends Aufschluß gegeben, von einer Annäherung durch Berechnung der Vielecke, findet sich keine Andeutung. Die Körper- und Inhaltberechnungen, welche in den folgenden Abschnitten gelehrt werden, sind unbedeutend und gehen nicht über die ersten Elemente.

Das 18te Kapitel von Brahmegupta's Astronomie ist der Algebra gewidmet, und der erste Abschnitt lehrt die Gleichungen $ax + by = c$ in ganzen Zahlen aufzulösen. Diesen Gleichungen besonders haben die Inder große Aufmerksamkeit gewidmet, und ihre Methode der Auflösung war schon Aryabhatta bekannt, aber auch er war nicht der Erfinder derselben. Alle Beispiele, auf welche der Verfasser seine Vorschriften anwendet, haben Bezug auf die Astronomie der Inder und hängen genau mit ihren eigenthümlichen Vorstellungen und Ansichten zusammen. Man erkennt hier in der Astronomie die Quelle dieses mit Vorliebe kultivirten Zweiges der Algebra und überhaupt die Ursache des hohen Standes der indischen Zahlenlehre. Der zweite Abschnitt enthält vollständig die Rechnungen mit entgegengesetzten Größen und die verschiedenen Operationen mit Wurzelgrößen oder Irrationalzahlen, auch die Regeln der Rechnungen mit Unbekannten. Der dritte Abschnitt enthält die Auflösungen der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten, und der vierte die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades. Der fünfte Abschnitt ist den Gleichungen mit mehren unbekannten Größen gewidmet, welche aber meistens unbestimmt sind, und bei welchen also die Regeln des ersten Abschnittes wieder in Anwendung kommen; die Beispiele gehören wieder meistens der Astronomie an. Im sechsten Abschnitte wird die Auflösung der Gleichungen $xy + ax + by = c$ gelehrt und im siebenten wird gezeigt, wie die Gleichungen $ax^2 + b = y^2$, besonders in ganzen Zahlen, aufgelöst werden können. Diese letzten Untersuchungen sind wieder mit besonderer Vorliebe behandelt und bilden den schönsten Theil der indischen Algebra. Die unbestimmte Analytik der Inder, wie sie hier vorliegt, war den Griechen gänzlich unbekannt und ist erst im Anfange des 17ten Jahrhunderts in Europa wieder erstanden, unabhängig von directem Einflusse der indischen Mathematik. Der achte Abschnitt enthält einige Regeln, aber besonders Aufgaben zu Lösung, die, wie beinahe alle, der Astronomie angehören. Am Schlusse sagt der Verfasser: „Diese Aufgaben sind nur zum Vergnügen hier gestellt worden; der Weise kann tausend andere erfinden, oder er kann, nach den gegebenen Regeln, die Aufgaben Anderer lösen. Wie die Sonne durch ihren Glanz die Sterne verdunkelt, so wird der Erfahrene den Ruhm anderer Astronomen verdunkeln in

einer Versammlung des Volkes, wenn er algebrische Aufgaben vorlegt und noch mehr, wenn er sie löst."

Dieß ist der Hauptinhalt von Brahmegupta's mathematischen Arbeiten, welche als eine gedrängte Zusammenstellung dessen erscheinen, was er für seine Zwecke als nothwendig erachtete. Man wird sie kaum als einen Kursus der Mathematik in unserm Sinne ansehen können, und obschon eine gewisse systematische Anordnung nicht geleugnet werden kann, so ist doch der Stoff zu dürftig und lückenhaft für solchen Zweck. Auf der andern Seite enthalten sie aber auch wieder Gegenstände, welche nicht unmittelbar auf die Astronomie Bezug haben. Jedes Urtheil hierüber wird übrigens immer unsicher sein, so lange nicht das ganze Werk des Verfassers dabei verglichen und erkannt werden kann, in welcher Beziehung der mathematische Theil zum Ganzen steht. Was sich aber schon vollständig erkennen läßt, ist die Art der indischen Forschung, ihre Methode, die Form und der Geist der Untersuchung.

Bhaskara's Lilavati oder Rechenkunst.

Viel bedeutender und vollkommener, wenn auch nicht dem Materiale nach, ist das Werk Bhaskara's, und deßwegen knüpfen wir auch besonders unsere Betrachtung daran. Was Brahmegupta oft nur mit wenig Worten angedeutet, erscheint hier ausgeführt und erweitert. Besonders hat die Darstellung und die Deutlichkeit sehr gewonnen, und an vielen Stellen bemüht sich sogar der Verfasser, Beweise nach seiner Art zu liefern, was bei Brahmegupta niemals vorkommt. Aus dem geringen Materiale, was vorliegt, ist es übrigens sehr schwer, ein richtiges Urtheil zu fällen, was noch durch die Art erschwert wird, wie Bhaskara von seiner Arbeit und den Arbeiten seiner Vorgänger spricht, und was durch den Inhalt nicht unterstützt wird. Am Schlusse seines Werkes spricht er sich nämlich über den Zweck seiner Arbeit und ihr Verhältniß zu den früheren Leistungen auf folgende Weise aus.

„Da die Abhandlungen über Algebra von Brahmegupta, Sridhara und Padmanabha zu ausgedehnt sind, so habe ich es unternommen, das Wesentliche aus ihnen zu einem wohlgeordneten Lehrbuche zusammenzufassen für die, welche die Wissenschaft erlernen wollen. In Regeln und Beispielen enthält dieser Band 1000 Zeilen, und letztere sind zuweilen bestimmt, die Regeln zu erklären, zuweilen ihren Zweck und ihre Anwendung zu zeigen, einmal die Verschiedenheit der Fälle aus einander zu setzen, das andere Mal zum Verständnisse der Grundsätze zu führen. Die Zahl der verschiedenen Fälle ist endlos, deßwegen haben verhältnißmäßig nur wenige mitgetheilt werden können. Auf der einen Seite ist das weite Meer der Wissenschaft für Menschen von geringen Verstandeskräften schwer zu durchwandern, und auf der andern bedürfen die Talentvollen keinen weitläufigen Unterricht. Ein Funke der Wissenschaft, wenn er den verständigen Geist erreicht, dehnt sich aus durch seine eigne Kraft. Wie ein Tropfen Oel sich über das Wasser verbreitet, wie das Geheimniß, welches man dem Schlechten anvertraut, wie die Almosen, dem Würdigen gespendet, wenn sie auch klein sind, so verbreitet sich die Wissenschaft in dem entwickelten Geiste durch ihre eigene innere Kraft.

Für Menschen von klarem Verstande ist es leicht erkenntlich, daß die Arithmetik aus der Regel der drei Glieder besteht, aber Algebra ist Scharfsinn, wie ich dieß in dem Kapitel über die Sphärik gesagt habe. Die Regel der drei Glieder ist Arithmetik, fleckenloser Verstand ist Algebra. Was gibt es

Unbekanntes für den Verständigen? deßwegen für die Schwachen allein ist dieses Werk geschrieben.

Um deine Weisheit zu vermehren und das Vertrauen in deine geistige Kraft zu stärken, mußt du Mathematiker lesen, und wieder lesen diese Grundzüge der Mathematik, schön in der Sprache, leicht verständlich für die Jugend, umfassend das ganze Wesen der Rechnung, sie enthalten die Erklärung der Grundsätze, sind voll von Hoheit und ohne Fehler."

Hieraus würde nun hervorgehen, daß die angeführten ältern Werke einen größeren Umfang gehabt hätten, als das vorliegende und daß sie mehr der Wissenschaft als dem Unterrichte angehörten, was mit Brahmegupta's Mathematik aber keineswegs der Fall ist, wenn man nicht annehmen will, daß es noch andere Werke dieses Verfassers gegeben habe. Bhaskara war Compilator; er sammelte, und von Allem dem, was zu seiner Kenntniß gelangte, schied er das für seinen Zweck nicht Brauchbare aus, er kürzte ab und verband das Uebrige zu einem Ganzen; namentlich fehlen alle Beispiele Brahmegupta's, welche besonders Bezug auf die Astronomie hatten. So kam dieses Lehrbuch zu Stande; die Darstellung und Anordnung scheint Bhaskara's Eigenthum zu sein, aber die Wissenschaft selbst ist durch ihn nicht erweitert worden; er macht auch hierauf keinen Anspruch. So bestätiget sich die oben ausgesprochene Ansicht, daß die Haupttheorien einer früheren Zeit angehörten und wahrscheinlich über Aryabhatta hinaufreichen.

Der Text von Bhaskara's Werk ist gleichfalls unverändert erhalten; eine Menge Commentatoren haben es mit Erklärungen und Anmerkungen versehen, ohne die Regeln anzutasten. Da man annehmen kann, daß es, mit Ausnahme der Sphärik, den ganzen Schatz der indischen Mathematik enthält, so wird es sich besser als das Werk Brahmegupta's eignen, um die geschichtliche Darstellung daran zu knüpfen. Das Buch besteht aus zwei Theilen; der erste enthält die Arithmetik, wozu auch die ebene Geometrie und die Körperberechnungen gehören, der zweite die Algebra. Ein Theil des Textes ist noch in Versen abgefaßt, drei Viertheile aber schon in Prosa. Bhaskara hat seiner Arithmetik den Namen Lilavati gegeben, und in der poetischen Sprache seines Buches finden sich viele Anreden, wo sich derselbe auf ein weibliches Wesen zu beziehen scheint. Viele Aufgaben beginnen mit der Ansprache: „Reizende und theure Lilavati," oder: „Reizendes Mädchen" u. s. w. Diese Stellen haben nun Veranlassung zu der Annahme gegeben, er habe sein Buch für eine Dame geschrieben. Abgesehen von allem Uebrigen, was einer solchen Ansicht im Wege steht, möchte es doch schwer sein, zu glauben, daß die indischen Damen einen großen Geschmack an der Arithmetik gehabt haben sollten. Diese Dame ist vielmehr die Arithmetik selbst; sie war die Lilavati, d. i. die Reizende, die Schöne, an die er sich wandte, und die ihm seine Fragen beantworten sollte.

Nach einer Einleitung über die Münzen, Maaße und Gewichte, lehrt der Verfasser die acht arithmetischen Geschäfte, das Zu- und Abzählen, das Vervielfachen und Theilen, die Erhebung ins Quadrat und die Ausziehung der Quadratwurzel, die Erhebung zur dritten Potenz und die Ausziehung der dritten Wurzel. Hierauf folgen dieselben Operationen mit Brüchen und zuletzt die Rechnungen mit 0. Es bieten sich hier wenig Bemerkungen dar, indem die Ausführung der Geschäfte von unserer jetzigen Art wenig verschieden ist. Das Vervielfachen von zwei gleichen Größen gibt das Quadrat, varga; das Produkt von drei gleichen Zahlen ist der Kubus, ghana. Beide Ausdrücke bezeichneten aber ursprünglich keine räumlichen Gebilde, sondern Vielheiten. Für die beiden ersten Potenzen wird die Vorschrift angegeben $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und diese werden auch bei dem

Ausziehen der Wurzeln benützt. Dazwischen kommen auch Aufgaben zur Erhebung auf höhere Potenzen vor. Die 4te Potenz heißt varga-varga, die 6te ghana-varga oder varga-ghana, die 8te varga-varga-varga, die 9te ghana-ghana u. s. w. Die 5te Potenz wird ausgedrückt durch varga-ghana-ghata, die 7te durch varga-varga-ghana-ghata u. s. w. Bei Diophantus ist $a^4 = a^2 . a^2$ $a^5 = a^3 . a^2$, $a^6 = a^3 . a^3$; Bhaskara dagegen bezeichnet $a^4 = (a^2)^2$, $a^5 = a^2 . a^3$ $a^6 = (a^2)^3$ oder $(a^3)^2$, $a^7 = a^2 . a^2 . a^3$ u. s. w., ohne ghata werden die Exponenten vervielfacht, mit ghata zusammengezählt und es bezieht sich dieser Ausdruck auf die Summe. Von allen Geschäften wird nur das Abzählen bezeichnet durch einen Punkt, welcher über die abzuzählende Größe gesetzt wird. Auch hier stimmen die Inder mit Diophantus überein, selbst für die Potenzbezeichnung ist der Unterschied nur scheinbar, indem die Inder beides, Zuzählen und Vervielfachen der Exponenten, anwandten. Bei den Brüchen wird der Nenner unter den Zähler geschrieben, jedoch ohne Strich dazwischen. Alle Vorschriften und Regeln werden durch Worte, nie durch Zeichen ausgedrückt. Bei dem Vervielfachen mit 0 wird angegeben, das Produkt nicht verschwinden zu lassen, wenn noch Operationen mit 0 darauf folgen, weil es sich wieder aufheben könne. Der Bruch, dessen Nenner 0 ist, bleibt unverändert als unbestimmbare Größe stehen; einer der Commentatoren gibt an, daß der Werth desselben unendlich sei.

Das dritte Kapitel ist reich an Inhalt und enthält sehr verschiedene Gegenstände; zuerst eine Vorschrift über die Umkehrung der Operationen. Diese Regel wird bei einer gewissen Klasse von Aufgaben angewandt, von welchen die nachstehende ein Beispiel ist. Man sucht eine Zahl, welche so beschaffen ist, daß sie mit 3 vervielfacht und um $^3/_4$ dieses Produktes vermehrt, hierauf durch 7 getheilt und um $^1/_3$ des Quotienten verringert, der Rest ins Quadrat erhoben, 52 abgezählt, hieraus die Quadratwurzel gezogen, dann 8 zugezählt, Alles durch 10 getheilt, zum Quotienten 2 gibt. Solche Aufgaben pflegt man jetzt als Gleichungen anzuschreiben und sie aufzulösen; hier wird die Vorschrift gegeben, alle Operationen von der letzten an umzukehren und so zur unbekannten Zahl aufzusteigen. Der folgende Abschnitt enthält eine Art Regula falsi, angewendet auf dazu geeignete Aufgaben, unter diesen die folgende: Aus einer Menge reiner Lotusblumen wurden Siva der 3te, Vishnu der 5te, der Sonne der 6te Theil als Opfer dargebracht, den 4ten Theil erhielt Bhavani und die übrigen 6 Blumen wurden dem ehrwürdigen Lehrer gegeben. Wie viele Blumen waren es in Allem? Man nimmt für die unbekannte Zahl irgend eine Zahl an, hier am besten 60, weil diese durch 3, 4, 5 und 6 theilbar ist. Bei dieser Anzahl würde Siva 20, Vishnu 12, die Sonne 10 und Bhavani 15 Blumen erhalten, im Ganzen würden also 57 Blumen vertheilt werden und für den Lehrer blieben nur 3 übrig. Der Rest muß aber 6 sein, das Doppelte von 3, daher muß auch die wahre Zahl das Doppelte der angenommenen, also 120 sein. Bhaskara nimmt statt 60 nur 1 an, bei andern Aufgaben aber auch verschiedene Zahlen. Der dritte Abschnitt lehrt, wie verbundene Größen getrennt werden können, und dies bezieht sich auf die Aufgaben: aus Summe und Unterschied zweier Zahlen diese selbst zu finden, eben so aus dem Unterschiede der Quadrate und dem Unterschied der Zahlen die Summe derselben nach der Formel $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Der vierte Abschnitt enthält drei Vorschriften, um zwei Zahlen zu finden, von welchen die Summe oder der Unterschied der Quadrate um eins vermindert, wieder eine Quadratzahl ist. Bedeutet m eine willkürliche Zahl, und ist die eine Zahl $n = \frac{8\,m^2 - 1}{2\,m}$, so ist

die andere $\frac{n^2}{2} + 1$, und es ist immer $n^2 \pm \left(\frac{n^2}{2} + 1\right)^2 - 1$ eine Quadratzahl. Nach der 2ten Vorschrift sind die beiden Zahlen $m + \frac{1}{2m}$ und 1, nach der 3ten sind sie $8m^4 + 1$ und $8m^3$. Im fünften Abschnitt werden Regeln gegeben zur Auflösung von Gleichungen von der Form $x \pm a\sqrt{x} = b$ und auch $cx \pm a\sqrt{x} = b$; diese wird zurückgebracht auf die Form $x \pm \frac{a}{c}\sqrt{x} = \frac{b}{c}$. Durch eine Anzahl Beispiele werden die gegebenen Vorschriften erläutert; diese beziehen sich blos auf Operationen, welche mit den gegebenen Zahlen vorgenommen werden müssen, um die Unbekannte zu finden. Der sechste Abschnitt enthält, immer in derselben Form, die Regel von drei und mehr Gliedern nebst zahlreichen Aufgaben über Rechnungen des Geschäftslebens. Bei all diesen Untersuchungen bieten sich keine wesentlichen Abweichungen von unserer Art zu rechnen dar.

Das vierte Kapitel, gleichfalls in 6 Abschnitte getheilt, trägt den allgemeinen Titel Untersuchungen über Mischung. Hierher rechnet der Verfasser auch diejenigen Rechnungen, in welchen Kapital oder Einlage und Zins oder Gewinn in einer Verbindung erscheinen, und den ersten Abschnitt füllen solche Zins- und Gesellschaftsrechnungen. Ein Kapital ist zu 5 % per Monat ausgeliehen und in einem Jahr hierdurch zu 1000 angewachsen; wie groß war das angelegte Kapital und wie groß die Zinsen? Ein gegebenes Kapital ist in drei Theilen ausgeliehen, der eine zu 5 % auf 7 Monate, der andere zu 3 %, 10 Monate und der dritte zu 4 % 5 Monate; in diesen Zeiten haben sie alle drei gleiche Zinsen getragen, wie groß ist jeder Theil? Der zweite Theil ist der Lösung der Aufgabe gewidmet: die Zeit zu finden, in welcher mehrere Bäche oder Quellen einen Behälter füllen, wenn die Zeit bekannt ist, in welcher dies von jedem einzeln geschieht. Der dritte Abschnitt hat die Ueberschrift „Kauf und Verkauf". Einige besondere Fragen werden hier gelöset, z. B. 3½ Manas Reis und 8 Manas Bohnen kosten jedes ein Dramma, man will für 13 Cacinis (64 Cac. = 1 Dram.) 2 Theile Reis und 1 Theil Bohnen kaufen, wie viel an Gewicht erhält man von jedem? Der vierte Abschnitt enthält eine Regel und ein Beispiel. Von vier Juwelieren besitzt A 8 Rubinen, B 10 Saphire, C 100 Perlen, D 5 Diamanten, bei einem Zusammentreffen schenkt ein jeder den drei andern ein Stück von seinem Eigenthum; wenn nun nachher alle vier gleichviel besitzen, was ist jede Pretiose im Verhältniß zu den andern werth? Die Vorschrift zur Auflösung ist: Man ziehe von jeder der Zahlen 8, 10, 100, 5 die Zahl der Personen 4 ab; mit den Resten 4, 6, 96, 1 theile man eine willkürlich angenommene Zahl, z. B. 96, so erhält man das Verhältniß der Werthe 29, 16, 1, 96 der verschiedenen Kostbarkeiten. Der fünfte Abschnitt enthält die eigentlichen Mischungsrechnungen, die Bestimmung des Feingehaltes von Gold und Silber u. s. w. In dem sechsten Abschnitte wird gelehrt, wie die Anzahl der geordneten Verbindungen ohne Wiederholung gefunden werden können; der Verfasser erklärt aber dabei, um nicht zu weit sich auszudehnen, wolle er in den Gegenstand nicht weiter eingehen.

Das fünfte Kapitel ist in zwei Abschnitten den arithmetischen und geometrischen Reihen gewidmet. In acht Regeln wird gelehrt, wie die Summen der Reihen $1 + 2 + 3 \ldots. + n$, dann $1 + 3 + 6 + \ldots + n(n+1)$ und $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ gefunden werden können. Dann geht der Verfasser zur allgemeinen Reihe $a, a + d, a + 2d, \ldots. a + (n-1)d$ über und gibt

an, wie t aus a, d und n; S aus a, t und n; a aus S, d und n; d aus S, a und n und n aus a, d und S berechnet werden müssen. Im zweiten Abschnitte findet sich eine Vorschrift für die Summe einer geometrischen Reihe.

Das sechste Kapitel enthält die ebene Geometrie in derselben Behandlungsweise wie bei Brahmegupta, nur in weiterer Ausführung. Die gleichen Bemerkungen gelten auch hier und die verflossenen fünf Jahrhunderte hatten keine wesentlichen Veränderungen in der Begründung und nur in der Form der Darstellung hervorgerufen. Die Bildung rechtwinkeliger Dreiecke beschäftiget auch hier den Verfasser im Anfange, und der pythagoräische Satz steht voran, wie Etwas, was sich von selbst versteht und keiner weiteren Erklärung bedarf. An mehreren Beispielen wird gezeigt, wie aus irgend zwei Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks die dritte berechnet werden kann, die Zahlen werden so angenommen, daß das Resultat immer rational wird. Sind die Katheten gleich, so ist die Hypotenuse irrational; dieß veranlaßt Bhaskara zu zeigen, wie man sich der Wurzel einer solchen Zahl nähern kann. Seine Vorschrift ist: soll die Wurzel aus $\frac{169}{8}$ gezogen werden, so bilde man einen Multiplikator aus 8 und einer geraden Potenz von 10, z. B. 10000: damit vervielfache man den Zähler und ziehe aus dem Produkte die Wurzel. Das Produkt ist 23520000, die Wurzel nahezu 3677, dann ist $\sqrt{\frac{169}{8}} = \frac{3677}{800} = 4\,\frac{477}{800}$. Dieß ist auch die Methode, welche unserer heutigen Rechnung zum Grunde liegt. Nunmehr folgen Vorschriften zur Bildung rationaler rechtwinkeliger Dreiecke, welchen die Sätze vorausgehen, daß $2ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2$ u. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Es sei a eine Kathete und n eine willkürliche Zahl, so ist $\frac{2na}{n^2 - 1}$ die andere Kathete und $\frac{2na}{n^2 - 1} \cdot n - a$ die Hypotenuse; oder, bei denselben Voraussetzungen, ist die andere Kathete $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n} - n\right)$ und die Hypothenuse $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n} + n\right)$; ist z. B. $a = 3$ und $n = 1$, so findet man die Seiten 3, 4, 5. Es sei c die Hypotenuse, so ist $\frac{2nc}{n^2 + 1}$ die eine Kathete und $\frac{2nc}{n^2 + 1} \cdot n - c$ die andere, oder $c - \frac{2c}{n^2 + 1}$ die eine Kathete und $\frac{2c}{n^2 + 1} \cdot n$ die andere. Die letzte unter den Vorschriften zur Bildung solcher Dreiecke ist die jetzt übliche und schon von Brahmegupta angeführte: sind m und n zwei willkührliche Zahlen, so ist eine Kathete $2mn$, die andere $m^2 - n^2$ und die Hypotenuse $m^2 + n^2$.

In sehr gefälliger Form und durch Beispiele erläutert folgen nun eine Reihe Vorschriften zur Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke, wenn Summe oder Unterschied der Hypotenuse und einer Kathete und die andere Kathete gegeben und eben so, wenn die beiden Katheten, in gleicher Weise verbunden, mit der Hypotenuse gegeben sind. Unter diesen sind z. B. folgende Aufgaben: Ein Bambusrohr 32 Fuß hoch, wurde vom Winde an einer Stelle gebrochen und die Spitze erreichte in 16 Fuß vom Stamme den Boden. Sage, Mathematiker, wie hoch über dem Boden wurde es abgebrochen. Die Regel gibt für die Stücke des Rohres $\frac{1}{2}\left(32 + \frac{16^2}{32}\right)$ und $\frac{1}{2}\left(32 - \frac{16^2}{32}\right)$, oder 20 u. 12. In einem See ragte die Spitze einer Lotusknospe $\frac{1}{2}$ Fuß über das Wasser empor; getrieben vom Winde, neigte sie sich gegen das Wasser und verschwand

in einer Entfernung von 2 Fuß von ihrem frühern Orte. Berechne schnell, Mathematiker, die Tiefe des Wassers. Schon Brahmegupta kennt solche Aufgaben. Eine kleine Regel, welche hierauf folgt, bezieht sich auf zwei Bambusstäbe, welche in einiger Entfernung von einander senkrecht im Boden stehen. Denkt man sich die beiden Endpunkte mit den Fußpunkten gegenseitig verbunden, so durchschneiden sich die Verbindungslinien irgendwo; man soll nun die Senkrechte des Durchschnittspunktes und die Abschnitte finden, in welche die Entfernung durch sie getheilt wird. Sind m und n die Höhen der Stäbe und a die Entfernung beider, so wird angegeben, daß die Höhe $\frac{m \cdot n}{m+n}$ und der Abschnitt von $m = \frac{a\,m}{m+n}$ und der andere $\frac{a\,n}{m+n}$ ist. Um diese Vorschrift zu finden, mußten zuerst die Abschnitte durch die Höhe ausgedrückt und beide Ausdrücke zusammengezählt werden. Die gleiche Rechnung kommt schon bei Brahmegupta vor, bei der Bestimmung der Höhe des Dreiecks, welches durch die Verlängerung zweier gegenüber liegenden Seiten eines Viereckes entsteht.

Wie bereits bemerkt worden, ist Bhaskara viel genauer als Brahmegupta; so führt er in einem Zwischensatze an, daß im Dreiecke zwei Seiten zusammen immer größer sein müssen, als die dritte. Die folgenden Sätze geben nichts Neues, die Abschnitte der Grundlinie eines Dreieckes werden berechnet nach der Vorschrift des Brahmegupta, eben so der Flächeninhalt, wo aber noch angeführt wird, daß er auch das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe sei. Der Commentator Ganesa gibt für das Letzte einen Beweis, indem er über der Grundlinie mit der halben Höhe ein Rechteck konstruirt und sagt: siehe die Figur. In der That erkennt man die Gleichheit der Flächenräume, aber zur vollen Gewißheit wird man erst dann gelangen, wenn man auch die Congruenz der angefügten und abgeschnittenen Dreiecke bewiesen hat. Die Inder begnügten sich aber mit dem Sinneneindrucke, und die strengen Beweise der Griechen müssen ihnen als etwas sehr Ueberflüssiges erschienen sein. Bei der erwähnten Formel für den Flächeninhalt des Dreieckes und Viereckes aus den Seiten bemerkt Bhaskara, daß die Alten sie mit Unrecht auch auf allgemeine Vierecke angewendet hätten, wodurch aber der Inhalt nur ungefähr gefunden werde. Daß die Formel für Kreisvierecke richtig ist, scheint ihm unbekannt gewesen zu sein, obwohl, wie gezeigt worden ist, auch für Brahmegupta kein Verdienst daraus erwächst. Beim Uebergange zum Vierecke wird angeführt, daß man den vier Seiten noch eine Diagonale zufügen müsse, wenn das Viereck bestimmt sein soll, woraus man erkennt, daß er nicht das Kreisviereck, sondern das allgemeine Viereck im Auge hatte. Dessenungeachtet sind die Vierecke für seine Rechnungen nach der bei Brahmegupta angegebenen Methode gebildet, so daß sie Kreisvierecke werden können, wenn die Diagonalen entsprechend genommen werden. Nun rügt er aber das Verfahren der älteren Schriftsteller, Vorschriften gegeben zu haben, welche nicht auf alle Vierecke anwendbar sind, und zeigt nun, wie man aus vier Seiten und einer Diagonale die andere Diagonale, überhaupt alle hier vorkommenden Theile, berechnen kann. — Bhaskara scheut bei solchen Berechnungen die Irrationalgrößen nicht und zeigt unter Anderem, wie man aus den Seiten eines Kreisviereckes der älteren Mathematiker ein Viereck konstruiren könne, welches gleiche Höhen habe, wobei er nicht immer auf geschlossene Zahlen kommt. Ausdrücklich wird angeführt, daß nicht Brahmegupta allein, sondern auch andere Schriftsteller den Irrthum begangen hätten, unbestimmte Vierecke als bestimmte anzusehen, oder wie man dies besser ausdrücken wird, den Eigenschaften besonderer Vierecke allgemeine Geltung beizulegen. So scheint

Bhaskara der erste zu sein, welcher diese Untersuchungen verallgemeinert hat, und nicht undeutlich gibt er sie als sein Eigenthum zu erkennen. Die Vorschrift Brahmegupta's zur Berechnung der Diagonalen wird von ihm mit Unrecht als umständlich getadelt. Er geht auf diese besondere Klasse von Vierecken ein und gibt an, wie man aus den Seiten der erzeugenden Dreiecke die Diagonalen leichter berechnen könne. Dabei übersieht er aber gänzlich, daß Brahmegupta durch seine Vorschriften sich von den Seiten dieser Dreiecke losmachen wollte, und daß sie nur die Seiten des Vierecks selbst enthalten sollten. Durch die Verhandlungen über diesen Gegenstand erhält man aber nur die Bestätigung der mitgetheilten Ansicht über die ältere indische Geometrie und erkennt, wie sie sich bis zur Zeit Bhaskara's noch gehoben und in etwas von den älteren Vorstellungen befreit hat. Außer den Rechnungen, welche schon Brahmegupta gegeben, findet man noch eine Vorschrift für die Berechnung des Flächeninhaltes des Viereckes durch Zerlegung in zwei Dreiecke.

Die nächsten Regeln umfassen die Lehre vom Kreise, wobei zuerst angegeben wird, daß das genaue Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser 3927 : 1250 und das für die gewöhnliche Anwendung 22 : 7 sei, wonach also der Umfang im ersten Falle $\frac{3927}{1250} \times d$ und im andern $\frac{22}{7} \cdot d$. Brahmegupta kennt diese beiden Verhältnisse noch nicht und gibt dafür die zwei anderen erwähnten. Aus einer Formel, welche Aryabhatta zugeschrieben wird, geht weiter hervor, daß auch dieser ältere Geometer $\sqrt{10} : 1$ gekannt und angewendet hat. Ueberhaupt scheint dieses Verhältniß, eine empirische Formel, Indien von den ältesten Zeiten an eigenthümlich zu sein. Für die Beurtheilung der indischen Geometrie ist es nun von Wichtigkeit, zu wissen, wie frühe das Verhältniß 22 : 7 in Indien bekannt war; hieraus wird sich ergeben, ob es eigene Erfindung oder aus der griechischen Geometrie aufgenommen worden ist. Der gelehrte Uebersetzer Colebrook gibt an, daß Aryabhatta den Durchmesser der Erde zu 1050 Yojanas angegeben habe, und schließt nun, weil von dem Commentator Bhaskara's, Ganesa, der Umfang zu 3300 Yojanas angegeben wird, was offenbar nach dem Verhältniß 22 : 7 berechnet ist, daß auch Aryabhatta dasselbe gekannt habe. Hieraus geht aber doch wohl nur hervor, daß ein späterer Astronom diesen Umfang aus Aryabhatta's Angabe berechnet hat, da er selbst sich des Ausdruckes $\sqrt{10}$ bediente. Eine andere Angabe Colebrook's scheint aber darauf hinzudeuten, daß Brahmegupta sich der Formel $\frac{22}{7}\, d = u$ bedient habe. Aryabhatta hat nämlich, wie erwähnt, die Axendrehung der Erde gelehrt; um eine Erklärung davon zu geben, nahm er einen Luftstrom an, welcher in einiger Entfernung von der Erde sich bewege, und sie so umdrehe. Den Umfang dieses Luftstromes gibt er zu 3393 Yojanas an, und Brahmegupta soll zu diesem Umkreise den Durchmesser 1080 Yojanas berechnet haben. Dieser Durchmesser ist aber nahe $\frac{7 \cdot 3393}{22}$, so daß, wenn die Rechnung wirklich von Brahmegupta herrührt, er auch das archimedische Verhältniß gekannt hat. Wie unwahrscheinlich dieß aber ist, braucht kaum erwähnt zu werden; die Kenntniß eines so einfachen Verhältnisses war zu wichtig für einen Inder, als daß er es in seinem Texte hätte übergehen können, wenn er in seinen Rechnungen davon Gebrauch gemacht hätte. So steht es also wohl ziemlich fest, daß weder Aryabhatta, noch Brahmegupta, das archimedische Verhältniß gekannt habe, daß es erst später eingeführt wurde, und daß die Zahl 1080 der angeführten Stelle wohl eine spätere Abänderung ist.

Der Text Brahmegupta's und die Anmerkungen des Commentators Chaturveda enthalten nichts über die angegebenen Verhältnisse, während Ganeſa in seinen Erläuterungen zu Bhaskara's Vorschriften den Weg angibt, auf welchem das Verhältniß 3927 : 1250 gefunden worden sein soll. Aus der Seite des ordentlichen Sechseckes im Kreise ist die des 12ecks, aus dieser die des 24ecks u. s. w. bis zum 384ecke berechnet worden, durch fortgesetzte Halbirung der Bogen. Dies ist die Methode des Archimedes und später des Ptolemäus, von der die älteren indischen Geometer nichts wußten, und die ihnen höchst wahrscheinlich durch die griechische Geometrie zugekommen ist. Die folgenden Vorschriften geben die Anleitung zur Berechnung der Kreisfläche, der Oberfläche und des Körperinhaltes der Kugel. Die beiden letzten fehlen bei Brahmegupta, auch enthält der Commentar nichts über die Berechnung der Oberfläche, nur über den Körperinhalt wird bemerkt: man müsse sich die Kugel aus nadelförmigen Pyramiden zusammengesetzt denken, deren Spitzen sämmtlich im Mittelpunkte beisammen liegen und deren Grundflächen in die Oberfläche fallen. Die folgenden Sätze enthalten den Zusammenhang zwischen der Sehne s, dem Durchmesser d und dem Pfeile x, nämlich: $\frac{s^2}{4} = dx - x^2$, je nachdem nun eine der drei Größen als unbekannt betrachtet wird, läßt sie sich durch die beiden andern darstellen, wodurch drei Formeln entstehen, welche in Worten ausgedrückt genau hier angegeben werden. Brahmegupta vernachlässiget x^2, was für kleine x eine hinreichende Annäherung gibt. Diese Formel drückt den Satz des Aryabhatta aus, daß das Produkte aus den Abschnitten des Durchmessers dem Quadrate der halben Sehne gleich ist, welche darauf senkrecht steht. Nimmt man an, daß den Indern bekannt gewesen sei, daß alle Dreiecke im Halbkreise rechtwinkelig sind, was sich schon auf den ersten Blick erkennen läßt, so war es nach ihrer Methode nicht schwer, diesen Satz zu finden.

Merkwürdig sind hier noch zwei, wie es scheint, empirische Formeln, welche die Bestimmung haben, die Sehne aus dem Bogen und umgekehrt den Bogen aus der Sehne zu berechnen. Ist s die Sehne, u der Umfang, b der Bogen und d der Durchmesser, so ist $s = \frac{4d(u-b)b}{\frac{5}{4}u^2 - (u-b)b}$ und $b = \frac{u}{2} - u\sqrt{\frac{d-s}{s+4d}}$. Diese Formeln geben die gesuchten Größen zum Theil auf zwei Decimalstellen genau und gewähren also bloß eine rohe Annäherung, sie sind aber in so ferne wichtig, als sie anfänglich wohl dazu gedient haben mögen, die Sinustafeln, die keine große Genauigkeit hatten, zu berechnen. Zur Berechnung des Bogens aus dem Pfeile und der Sehne soll Aryabhatta die Formel angegeben haben: $b = \sqrt{6x^2 + s^2}$; für $s = d$ und $x = \frac{d}{2}$ wird hieraus $\frac{u}{2} = \frac{d}{2}\sqrt{10}$ oder $u = d\sqrt{10}$, also war $\sqrt{10}$ die Verhältnißzahl dieses Geometers und nicht $\frac{22}{7}$.

Die folgenden Kapitel sind klein und bieten nichts Besonderes dar; sie enthalten die Körperberechnungen zu praktischen Zwecken in derselben Weise, wie bei Brahmegupta.

Das 11te Kapitel hat die Ueberschrift Schatten eines Gnomon. Ist g die Höhe des Gnomon, e die Höhe des leuchtenden Punktes, d die Entfernung der Fußpunkte des Lichtes und des Gnomons, s die Länge des Schattens, so hat man zwischen diesen Größen die Relation $s.e = g.d + g.s$, was sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ergibt. Je nachdem man nun eine der Größen s, e, d als unbekannt betrachtet, erhält man hieraus eine Vorschrift zur Be-

rechnung derselben aus den übrigen Größen; diese Vorschriften werden hier mitgetheilt. Eine zusammengesetztere Aufgabe, welche gleich im Anfange vorkommt, ist folgende: Für denselben Gnomon hat man, bei verschieden hohem Stande des Lichtes, oder auch bei gleichem Stande, aber in verschiedenen Entfernungen von demselben, zwei Schatten und zwei Hypotenusen; man kennt den Unterschied der Schatten d, den Unterschied der Hypotenusen u und den Gnomon g und soll daraus die Schatten einzeln finden. Die Vorschrift ist für den größern und kleinen Schatten: $d + u\sqrt{\frac{576}{d^2 - u^2} + 1}$; hieraus geht hervor, daß $g = 12$ angenommen worden ist. Eben so wird folgende Aufgabe gelöset. In verschiedenen Entfernungen von dem Lichte wird der Gnomon gesetzt und die Schatten S und s gemessen, eben so wird die Entfernung d der Standpunkte gemessen; man soll die Entfernung des Fußpunktes des Lichtes von den beiden Standpunkten finden. Diese werden angegeben: $\frac{S\,(d + S - s)}{S - s}$ und $\frac{s\,(d + S - s)}{S - s}$. Dies sind die Aufgaben über den Gnomon, und das Kapitel schließt mit folgender Betrachtung:

„Wie das Wesen, welches das Gemüth seiner Verehrer von seinen Leiden erhebt, und welches die einzige Ursache der Schöpfung dieser Welt ist, das Ganze durchdringt und umfaßt in seinen verschiedenen Erscheinungen, als Welten, Paradiese, Berge, Flüsse, Götter, Teufel, Menschen, Bäume und Städte, so ist diese Sammlung von Vorschriften durchdrungen und umfaßt von der Regel der drei Glieder. Wenn aber dieses die einfache Grundlage ist, warum wird sie mit so vieler Mühe und von vielen Schriftstellern so weitläufig aus einander gesetzt? — Die Antwort ist: Was immer berechnet wird in der Algebra oder in der Arithmetik vermittelst eines Multiplicators und eines Divisors, wird von den scharfsinnigen Gelehrten als die Regel der drei Glieder erkannt werden. Dennoch ist sie von weisen Lehrern in unterschiedene und mannigfaltige Regeln getrennt worden; sie lehrten diese leichten Veränderungen, indem sie dachten, dadurch auch die Bildung der weniger Begabten, wie wir sind, zu heben."

Im 12ten Kapitel werden die unbestimmten Aufgaben in ganzen Zahlen gelöset, da aber diese Untersuchung in der Algebra weitläufiger und vollständiger vorkommt, so kann sie hier übergangen werden.

Das letzte Kapitel enthält wieder Theile der Combinationslehre, zuerst die Versetzungen und dann die Verbindungen zu bestimmten Summen. Die Anzahl der Versetzungen von n Elementen, worunter sich p gleiche, dann wieder q gleiche u. s. w. befinden, wird angegeben zu $\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, n}{1 \,.\, 2 \,...\, p \,.\, 1 \,.\, 2 \,...\, q \,...}$. Die Anzahl der Verbindungen zu bestimmten Summen ist: für die Summe m, für 2 Elemente $\frac{m-1}{1}$, für 3 Elemente $\frac{(m-1)\;(m-2)}{1 \,.\, 2}$ u. s. w. Für die Verbindungen mit Versetzungen, aber ohne Wiederholungen aus n Elementen, wird, für die verschiedenen Klassen, ebenfalls die richtige Anzahl in allgemeiner Vorschrift gegeben. Der Auctor schließt seine Arithmetik mit folgendem Satze:

„Glück und Freude wird sicherlich immer wachsen in dieser Welt für diejenigen, welche sich der edeln Rechenkunst (Lilavati) ergeben haben; schön ausgestattet sind ihre Glieder, rein und vollkommen ihre Lösungen und geschmackvoll ist ihre Sprache."

Bhaskara's Vija-Ganita oder Algebra.

Die einleitenden Worte Bhaskara's lassen wegen der Vieldeutigkeit der darin enthaltenen Ausdrücke auch eine verschiedene Auslegung zu, der Sinn derselben scheint folgender zu sein:

„Ich verehre das unsichtbare Urwesen, von welchem die Lanc'hyas behaupten, daß es die Quelle des Vernunftprincipes sei, das, in fühlende Wesen gelegt, diese zu seiner Entwickelung bestimmt; denn es ist das alleinige Element alles Sichtbaren. Ich bete die waltende Macht an, welche die Weisen, die mit der Natur der Seele vertraut sind, für die Ursache aller Erkenntniß erklären; denn sie ist das eine Element von allem, was sichtbar ist. Ich achte hoch die Mathematik, denn die, welche mit ihr vertraut sind, erkennen in ihr das Mittel alles Verständnisses; sie ist die Grundlage von Allem, was sichtbar ist.

Da die Rechnungen mit bekannten Größen, wie sie im Vorhergehenden gelehrt worden, gegründet sind auf die Rechnungen mit unbekannten Größen, und da die Auflösungen der Fragen kaum von Wenigen verstanden werden und durchaus nicht von Solchen, welche schwach begabt sind, ohne die Anwendung der unbekannten Größen, so habe ich mir jetzt vorgenommen, die Geschäfte der Algebra oder Analysis auseinander zu setzen."

Bis zum 4ten Abschnitt werden die Rechnungen mit entgegengesetzten Größen gelehrt und Beispiele in Zahlen gegeben. Hier findet sich nun angegeben, daß jede Quadratwurzel sowohl positiv als negativ genommen werden kann, eben so daß dieselbe Wurzel aus einer negativen Zahl unmöglich ist. Bei den Rechnungen mit o wird jetzt angegeben, daß der Bruch, dessen Nenner o unendlich groß ist, und Bhaskara drückt sich hierüber in folgender Weise aus: Die Größe, welche o zum Divisor hat, erleidet keine Veränderung, wie man sie auch vermehren oder verringern mag, wie der ewige und unendliche Gott sich nicht verändert bei der Schöpfung oder der Zerstörung von Welten, obgleich zahllose Wesen aus ihm hervorgehen oder in ihn zurückkehren.

Um eine unbekannte Größe zu bezeichnen, gebrauchen die Inder die Anfangsbuchstaben des Wortes yavat—tavat, und dieses bedeutet so—viel—als oder so—groß—als. Einmal diese Unbekannte wird geschrieben ya 1, das Eins fehlt niemals; ya 3 heißt dreimal die Unbekannte. Der Coefficient wird immer, wie bei Diophantus, hinter das Zeichen geschrieben, eben so, wie bei diesem, eine bestimmte Zahl nie für sich geschrieben, sondern rupa, die bestimmte Zahl, vorgesetzt. Ueberhaupt die ganze Bezeichnung stimmt im Wesentlichen mit der griechischen überein; es gibt kein Additionszeichen, die Buchstaben werden bloß neben einander gesetzt; das Subtractionszeichen ist ein Punkt über der Zahl. Unser Ausdruck $7x + 3$ wird geschrieben ya 7 ru 3; eben so $3x-5$, ya 3 ru $\dot{5}$. Kommt in einer Aufgabe mehr als eine Unbekannte vor, so werden die Anfangsbuchstaben der Namen der Farben kalaka, Schwarz; nilaka, Blau; pitaka, Gelb; lohitaka, Roth; haritaka, Grün u. s. w. als Zeichen der Unbekannten gebraucht; dies mag wohl daher kommen, daß man im Sanskrit für Farbe und Buchstabe dieselbe Benennung hat. Noch ein Operationszeichen hatten die Inder, welches Diophantus fehlte: sie bezeichneten ein Produkt durch bhavita, bha, das Hervorgehende, Werdende, Seiende; xy wird z. B. ausgedrückt durch ya ca bh 1. Wie schon früher angegeben, bedeutet varga, v das Quadrat, ghana, gh den Kubus u. s. w., was sich jedoch, wie bei

Diophantus, nur auf die Unbekannten bezieht. Unser Ausdruck $3x^3 + 5y^2$ ist ya gh 3 ca v 5 und $3x^3$. $5y^2$ ist ya gh ca v bh 15. Die Bezeichnung ist also in jeder Beziehung ähnlich, aber vollkommener als bei Diophantus.

Der 4te Abschnitt enthält die Buchstabenrechnung, welche sich von der heutigen durch nichts unterscheidet als durch die eigenthümliche Bezeichnung und dadurch, daß die Zeichen nur für unbekannte Größen verwendet und nie als allgemeine Zeichen für gegebene Größen gebraucht werden. Auf die sechs Operationen mit Buchstaben folgen nun im nächsten Abschnitte die gleichen Geschäfte mit Irrationalgrößen. Karana heißt eine Größe, aus welcher die Wurzel ohne Rest nicht gezogen werden kann, es ist z. B. $\sqrt{2} = k2$, $\sqrt{7} = k7$. Hier zeigt sich nun besonders die Gewandtheit der indischen Rechner, und wenn auch Manches unseren Anforderungen nicht ganz entspricht, so wird man kaum etwas Wesentliches vermissen.

Das 2te Kapitel enthält die unbestimmte Analytik des ersten Grades und ist nur eine Wiederholung und weitere Entwickelung des 12ten Kapitels der Arithmetik. Diese Untersuchungen sind schon zur Zeit des Aryabhatta bekannt gewesen und von den Indern auf das sorgfältigste ausgebildet worden, weil sie in besonderer Beziehung zu ihren astronomischen Rechnungen standen. Die Gleichungen, welche zur Auflösung hier vorgelegt werden, erscheinen alle unter der Form $\frac{ax + b}{c} = y$, und es wird verlangt, den Werth von x in ganzen Zahlen so zu bestimmen, daß $ax + b$ durch c theilbar wird, man also auch für y eine ganze Zahl erhält. Die erste Regel gibt an, daß, wenn a, b, c einen gemeinschaftlichen Theiler haben, dieser zuerst weggeschafft werden müsse, wenn dieß aber nur für a und c der Fall sei, so sei die Aufgabe nicht recht gegeben, d. h. in ganzen Zahlen nicht auflösbar. Von den gegebenen Größen wird a der Dividend, c der Divisor und b die Additive genannt, auch wenn die Zahl an sich negativ ist; eben so heißt x der Multiplicator und y der Quotient. Die Regel zur Auflösung selbst ist: Man theile a durch c und merke den Quotienten, dann mache man c zum Dividend und den Rest zum Divisor und setze das Geschäft fort, bis man zum Rest 1 kommt. Die erhaltenen Quotienten schreibe man ihrer Ordnung nach in eine Reihe, setze dieser noch die Additive b und dann o hinzu. Mit den Gliedern dieser Reihe werden nun folgende Geschäfte vorgenommen: Das dritte Glied vom Ende wird mit dem vorletzten vervielfacht und das letzte zugezählt; die erhaltene Zahl schreibt man an die Stelle des drittletzten Gliedes und vernachlässiget das letzte. Mit der neuen Reihe verfährt man eben so und setzt dieß fort, bis zuletzt nur zwei Zahlen übrig bleiben, die erste ist der Quotient y, die zweite der Multiplicator x. Da diese Werthe selten die kleinsten sein werden, so muß man, um diese zu erhalten, von y das a so oft hinwegnehmen als es angeht, und eben so von x die Zahl c, die Reste sind die kleinsten Werthe. Ferner ist zu beachten, daß dieß nur dann gilt, wenn die Anzahl der Glieder der ersten Reihe, die o mit eingeschlossen, gerade ist; ist sie ungerade, so muß man die so erhaltenen kleinsten Werthe von a und c abzählen, um die richtigen Werthe für diesen Fall zu erhalten. Ist b eine etwas große Zahl, so wird die vorgeschriebene Operation weitläufig; ein Vortheil der Rechnung besteht daher darin, b durch c zuerst zu theilen und nur den Rest mit in Rechnung zu nehmen, den erhaltenen Quotienten fügt man dann zuletzt dem so gefundenen y zu und erhält dadurch den wahren Werth dieser Größe. Hat man auf diese Art einmal zwei Werthe $x = m$ und $y = n$ gefunden, so erhält man andere Werthe, indem

man dem ersten c, dem andern a zu- oder abzählt. Eine beschränkte Anzahl von Auflösungen wird dadurch herbei geführt, daß nur positive Werthe für x und y zulässig sind.

Ist z. B. in ganzen Zahlen aufzulösen $\frac{221x + 65}{195} = y$, so lassen sich zuerst alle drei Zahlen durch 13 theilen; die abgekürzte Gleichung ist daher: $\frac{17x + 5}{15} = y$. Nun ist nach der Vorschrift $\frac{17}{15} = 1$ Rest 2; $\frac{15}{2} = 7$ Rest 1; hiermit hört also die Operation auf und die Reihe der Zahlen ist: 1, 7, 5, 0. Ferner ist jetzt $7 . 5 + 0 = 35$, daher die neue Reihe 1, 35, 5; aus dieser wird, da $1 . 35 + 5 = 40$, die letzte Reihe 40, 35, die erste Zahl 40 ist der Quotient y und die andere 35 der Multiplicator x. Diese Werthe sind nicht die kleinsten; wird 40 durch 17 und 35 durch 15 verkleinert, so bleiben $y = 6$ und $x = 5$, welche die Gleichung $\frac{17x + 5}{15} = y$ befriedigen. Andere Werthe sind für y, $6 + 17 = 23$, $23 + 17 = 40$ u. s. w., für x, $5 + 15 = 20$, $20 + 15 = 35$ u. s. w. Ist die Gleichung $\frac{100x + 90}{63} = y$ aufzulösen, so ist $\frac{100}{63} = 1$ Rest 37, $\frac{63}{37} = 1$ Rest 26, $\frac{37}{16} = 1$ Rest 11, $\frac{26}{11} = 2$ Rest 4, $\frac{11}{4} = 2$ Rest 3, $\frac{4}{3} = 1$ Rest 1, womit das Geschäft beendiget ist. Die Reihe ist 1, 1, 1, 2, 2, 1, 90, 0. Nun ist $1 . 90 + 0 = 90$, neue Reihe: 1, 1, 1, 2, 2, 90, 90; $2 . 90 + 90 = 270$; neue Reihe: 1, 1, 1, 2, 270, 90; $2 . 270 + 90 = 630$, daher 1, 1, 1, 630, 270; $1 . 630 + 270 = 900$, neue Reihe: 1, 1, 900, 630; $1 . 900 + 630 = 1530$, neue Reihe: 1, 1530, 900; zuletzt ist $1 . 1530 + 900 = 2430$. Die zwei Zahlen sind daher $y = 2430$ und $x = 1530$, oder durch 100 und 63 verkürzt $y = 30$ und $x = 18$, und dieß sind die kleinsten Werthe, welche die Gleichung befriedigen. Kürzer würde die Rechnung ausgefallen sein, wenn man für die Additive $90 - 63 = 27$ genommen hätte; für diesen Werth ist die Reihe 1, 1, 1, 2, 2, 1, 27, 0, welche auf gleiche Weise zu den Zahlen 729 und 459 führt, die durch 100 und 63 verkleinert 29 und 18 geben. Wird nun der Quotient aus $\frac{100}{63} = 1$ zu 29 gezählt, so erhält man den richtigen Werth 30 für y. Ist die Additive negativ, so verfährt man auf gleiche Weise und sucht y und x eben so, als ob sie positiv wäre; zuletzt aber muß man die gefundenen Zahlen von a und c abzählen. Noch eine Menge kleiner Regeln werden zur Sicherheit und Vervollständigung der Rechnung gegeben, welche hier übergangen werden können.

Diese ganze schöne Untersuchung ist ein unbestreitbares Eigenthum der Inder; bei den Griechen findet sich auch nicht eine Spur davon, und in Europa wurde sie erst im 17ten Jahrhundert wieder erfunden, nachdem sie vielleicht mehr als anderthalb tausend Jahre vorher in Indien geblühet hatte.

Das dritte Kapitel ist der Auflösung der unbestimmten Gleichungen des 2ten Grades gewidmet, und der erste Abschnitt insbesondere enthält die der Gleichungen $cx^2 + 1 = y^2$. c heißt der Coefficient, 1 die Additive, x die kleine Wurzel und y die große. Die Hauptsache besteht in Folgendem: Hat man durch Versuche eine Auflösung gefunden $x = n$ und $y = m$, so genügen auch $x = 2mn$ und $y = cn^2 + m^2$, oder hat man zwei Auflösungen gefunden

$x = n$ und $y = m$ und $x = p$ und $y = q$, so sind $x = mp \pm nq$ und $y = cnp \pm mq$ neue Werthe, welche auf gleiche Weise vervielfältiget werden können. Was diesen Vorschriften zum Grunde liegt, wird nicht angegeben; daß sie richtig sind, wird an Beispielen gezeigt. Die Schwierigkeit der Auflösung dieser Gleichungen besteht also hauptsächlich darin, eine erste Auflösung zu finden, und Bhaskara gibt nun einige Regeln, um dieses zu erleichtern. Hat man die Gleichung aufzulösen $cx^2 + 1 = y^2$ und z. B. gefunden, daß $c.p^2 + a = q^2$, was immer leicht ist, so ist auch $c.\frac{p^2}{k^2} + \frac{a}{k^2} = \frac{q^2}{k^2}$ oder $c.\left(\frac{p}{k}\right)^2 + \frac{a}{k^2} = \left(\frac{q}{k}\right)^2$, d. h. theilt man die Wurzeln durch eine beliebige Zahl k und die Additive durch das Quadrat derselben, so bleibt die Gleichung auch noch richtig. Ist nun a durch k^2 theilbar, so hat man eine neue Gleichung zu weiterem Gebrauche. Hat man ferner gefunden, daß $cn^2 + a = m^2$ und $cp^2 + b = q^2$, so ist auch $c(nq + mp)^2 + ab = (cnp + mq)^2$, wodurch man zu einer neuen Additiven ab gelangt; ist nun diese durch eine Quadratzahl theilbar und x und y durch die Wurzel derselben, so kann man zuletzt zur Additive 1 kommen. Hat man z. B. die Gleichung $11x^2 + 1 = y^2$ aufzulösen, so erkennt man sogleich, daß $11.1^2 - 2 = 3^2$; setzt man nun $m = p = 1$ und $m = q = 3$, $a = b = -2$, so ist die neue Gleichung $11.6^2 + 4 = 20^2$, daher wenn $k = 2$ angenommen wird, $11.3^2 + 1 = 10^2$. Eine Vorschrift zur Auflösung solcher Gleichungen, welche aber nicht immer ganze Zahlen gibt, ist: Man bilde aus einer willkürlich angenommenen Zahl d den Ausdruck $\frac{2d}{d^2 - c}$, so wird dieser ein Werth von x sein; für y findet man $\frac{d^2 + c}{d^2 - c}$. Ist z. B. $12x^2 + 1 = y^2$ aufzulösen, und setzt man $d = 4$, so wird $x = \frac{8}{16 - 12} = \frac{8}{4} = 2$ und $y = \frac{16 + 12}{16 - 12} = \frac{28}{4} = 7$ und es ist $12.2^2 + 1 = 7^2$. Oft führen aber auch gebrochene Werthe zu Auflösungen in ganzen Zahlen. Es sei $5x^2 + 1 = y^2$ aufzulösen; man setze $d = 3$, so wird $x = {}^3\!/_2$ und $y = {}^7\!/_2$; setzt man aber $d = 5$, so wird $x = {}^1\!/_2$ und $y = {}^3\!/_2$, aus beiden erhält man durch Zusammensetzung $x = 4$ und $y = 9$. Die hier angegebenen Mittel leisten zwar in einzelnen Fällen gute Dienste, im Ganzen ist aber nicht viel damit gewonnen. Bhaskara gibt daher im zweiten Abschnitte eine allgemeine Methode an, nach welcher solche Gleichungen aufgelöset werden können.

Die cyklische Methode zur Auflösung der Gleichungen $cx^2 + 1 = y^2$ führt leicht und rasch zum Ziele, und ihre Erfindung würde auch heute noch einem gewandten Mathematiker sehr zur Ehre gereichen. Hat man also die Gleichung $cx^2 + 1 = y^2$ in ganzen Zahlen aufzulösen, so suche man zwei Werthe $x = n$ und $y = m$, welche die Gleichung $cn^2 + a = m^2$ befriedigen, wobei man natürlich trachtet, a so klein wie möglich zu erhalten. Man setze nun $\frac{nz + m}{a} = u$ und bestimme nach dem Früheren den Werth von z, so daß $nz + m$ durch a theilbar, also u eine ganze Zahl wird. Eine ganze Reihe von Zahlen hat diese Eigenschaft, man wähle daraus eine, für welche $z^2 - c$ ein Kleinstes wird. Für einen solchen Werth ist jetzt u die kleine Wurzel und $\frac{z^2 - c}{a} = b$ die neue Additive, die Gleichung ist $c.u^2 + b = v^2$ und v ist $\frac{um - 1}{n}$. Es läßt sich leicht beweisen, daß $z^2 - c$ immer durch a theilbar

ist und eben so auch $mu - 1$ durch n, so daß man es nur mit ganzen Zahlen zu thun hat. Außer dem angegebenen Werthe von v ist auch noch $v = \frac{mz + cn}{a}$. Auf diese Weise erhält man eine neue Gleichung $cu^2 + b = v^2$, mit welcher man auf gleiche Weise verfährt, bis man auf die Additive 1 kommt, was immer der Fall sein wird, wenn c nicht negativ oder selbst eine Quadratzahl ist. Diese Methode, so sicher und schnell sie auch zum Ziele führt, stellt jedoch noch Manches dem Ermessen des Rechners anheim, aber Bhaskara bemerkt auch: Algebra ist Scharfsinn, der Rechner muß sich selbst zu helfen wissen.

Um die Anwendung der Methode zu zeigen, sei $85x^2 + 1 = y^2$. Es ist nun $85.1^2 - 4 = 9^2$; man setze daher $u = \frac{1.z + 9}{-4}$; für z findet man 3, 7, 11, 15, ..., unter diesen Zahlen entsprechen 7 und 11 beide ihrer Bestimmung. Man setze $z = 7$, so ist $b = \frac{7^2 - 85}{-4} = \frac{49 - 85}{-4} = +9$; ferner $u = \frac{1.7 + 9}{-4} = -4$, $v = \frac{9.-4 - 1}{1} = -37$, die neue Gleichung ist daher $85.4^2 + 9 = 37^2$. Jetzt setze man wieder $u = \frac{4z + 37}{9}$, es ist $z = 2, 11, 20, \ldots$, $z = 11$ entspricht am besten daher $b = \frac{11^2 - 85}{9} = \frac{121 - 85}{9} = 4$; ferner erhält man $u = 9$ und $v = 83$, so daß: $85.9^2 + 4 = 83^2$. Die Wiederholung der Operation gibt $u = \frac{9z + 83}{4}$, und hieraus $z = 1, 5, 9, 13, \ldots$, für $z = 9$ ist $b = -1$, $u = 41$ und $v = 378$, daher $85.41^2 - 1 = 378^2$. Nunmehr kann man die Operation abbrechen und diese Gleichung mit sich selbst, nach der früheren Anleitung, zusammensetzen, wodurch man erhält: $85.30996^2 + 1 = 285769^2$. Behandelt man eben so die Gleichung $89x^2 + 1 = y^2$, so erhält man nach vier Rechnungen und einer Zusammensetzung $89.53000^2 + 1 = 500001^2$. Ganz dasselbe verlangt die Gleichung $127x^2 + 1 = y^2$, man erhält: $127.419775^2 + 1 = 4730624^2$. Auch gebrochene Werthe können für x und y gebraucht werden, wenn sie durch Zusammensetzung endlich zu ganzen Zahlen führen. Auf diese Weise löst Bhaskara sehr schnell die Gleichung $61.x^2 + 1 = y^2$, welche auf sehr große Zahlen führt. Die ganze Untersuchung, welche schon sehr Vieles voraussetzt, kann übrigens nur die günstigste Meinung erwecken über die Gewandtheit und den Scharfsinn der indischen Rechner.

Der 3te Abschnitt umfaßt verschiedene Regeln. In Bezug auf die Gleichungen $cx^2 - 1 = y^2$ wird der Satz aufgestellt, daß ihre Auflösung unmöglich sei, wenn nicht c die Summe zweier Quadrate. Ist dieß aber der Fall und z. B. $c = m^2 + n^2$, so ist $x = \frac{1}{n}$ und $y = \frac{m}{n}$ oder $x = \frac{1}{m}$ und $y = \frac{n}{m}$; man erhält hiedurch Brüche, welche aber durch Zusammensetzung oft in ganze Zahlen umgewandelt werden können. Auf diese Art findet man für $13x^2 - 1 = y^2$ einmal $13(1/2)^2 - 1 = (3/2)^2$, dann $13(1/3)^2 - 1 = (2/3)^2$, aus beiden $13.5^2 - 1 = 18^2$. Ist der Coefficient durch eine Quadratzahl theilbar, so kann man die Gleichung für den verkleinerten Coefficienten auflösen, wird alsdann der Werth von x durch die Wurzel des Quadrates getheilt, so erhält man den wahren Werth von x für den unverkürzten Coefficienten.

Ist die Additive größer als die Einheit und der Coefficient eine Quadrat-

zahl, so gibt Bhaskara zur Auflösung der Gleichungen $cx^2 + a = y^2$ die Vorschrift, $x = \frac{\frac{a}{d} - d}{2\sqrt{c}}$ zu setzen, wo d eine willkürliche Zahl ist, alsdann wird

$y = \frac{\frac{a}{d} + d}{2}$ sein. Diese Vorschrift, angewendet auf die Gleichung $9x^2 + 52 = y^2$, gibt eine Auflösung $9.4^2 + 52 = 14^2$, wobei $d = 2$ angenommen worden ist. Das gleiche Verfahren kann auch auf eine negative Additive angewandt werden, z. B. wenn $16x^2 - 23 = y^2$ sein soll, so setze man $d = -1$, wodurch man $x = 3$ und $y = 11$ erhält, und es ist $16.3^2 - 23 = 11^2$. Dieß ist Alles, was über diese Art von Gleichungen mitgetheilt wird.

Die bisherigen Untersuchungen stehen als Vorbereitung zu der nun folgenden Algebra da, welche mit dem 4ten Kapitel beginnt, in welchem die Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe abgehandelt werden. Es liegt in der Natur der Sache, daß hier nicht viele Regeln gegeben werden können, aber eine Menge Aufgaben dienen zur Erläuterung der einzigen Vorschrift. Die zwei Seiten einer Gleichung werden nicht neben einander geschrieben und durch ein Zeichen oder das Wort „gleich" getrennt, sondern unter einander und dann aber eben so behandelt. Unsere Gleichung $6x + 300 = 10x - 100$ wird ausgedrückt

ya 6 ru 300
ya 10 ru 100

; fehlt ein Glied, so wird es mit 0 zugesetzt, z. B. $6x = 24$ wird dargestellt

ya 6 ru 0.
ya 0 ru.24

In dieser Form sind aber die Gleichungen schon geordnet und ihre Auflösung erfolgt dadurch, daß man die eine Reihe von der andern abzählt, wodurch z. B. im ersten Falle ya 4 ru 400 übrig bleibt, und hieraus folgt nun, daß ya gleich ru 100 ist. Die aufgelöste Gleichung hat zuletzt immer diese Form, und immer ist die Zahl negativ, also der Werth von ya positiv, weil alle negativen Werthe verworfen werden. Das Ordnen der Gleichungen geschieht, indem die gleichen Geschäfte auf beiden Seiten vorgenommen werden und die Vorschrift ist dieselbe, wie sie schon Diophantus gibt.

Die Aufgaben, welche im Folgenden zur Auflösung vorgelegt werden, sind verschiedener Art; zum Theil sind sie dieselben, welche schon früher in der Arithmetik gegeben wurden und hier nur mit Hülfe der Gleichungen wieder aufgelöst werden. Manche Aufgaben führen eigentlich auf mehrere unbekannte Größen, manche sind sogar unbestimmt. Die Auflösungsweisen des Diophantus kommen auch hier vor, und viele werden aus älteren Auctoren angeführt, als Beispiele von Einfachheit oder Scharfsinn; da jedoch mehr allgemeine Auflösungsmethoden vorliegen, so sind die Beispiele Nebensache, während sie das Wesen des Werkes von Diophantus ausmachen. Ein Beispiel, wie eine Aufgabe mit zwei unbekannten Größen durch die Annahme von einer aufgelöst wird, ist folgendes. Jemand sagt zu einem Andern: „Freund, gib mir hundert, so bin ich doppelt so reich als du!" Der Andere erwiederte: „Wenn du mir zehn gibst, so bin ich sechs Mal so reich als du!" Wie viel hat ein Jeder? Man setze, der Erste habe $2x - 100$ und der Andere $x + 100$, so wird schon die erste Bedingung erfüllt; nach der zweiten ist $2x - 110 = 6(x + 110)$, woraus $x = 70$, also $2x - 100 = 40$ und $x + 100 = 170$. Von andern Aufgaben werden auch intellectuelle Auflösungen gegeben. In einer andern unbestimmten Aufgabe werden verschiedene Dinge mit den Anfangsbuchstaben

ihrer Namen bezeichnet und man hat darin die ersten Anzeigen eines allgemeinen Gebrauches von Buchstaben für gegebene Größen finden wollen, was jedoch kaum einer Widerlegung bedarf. Es ist oft höchst interessant, die Wendungen zu verfolgen, welche die Rechnung nehmen muß, um die Schwierigkeiten zu vermeiden, die aus einem Mangel an allgemeinen Zeichen hervorgehen. Unter andern Aufgaben kommen auch wieder solche aus der Geometrie vor, z. B. aus zwei Seiten und dem Flächeninhalte die Grundlinie eines allgemeinen Dreiecks zu finden. Die Seiten sind $\sqrt{5}$ und $\sqrt{13}$, der Inhalt 4; die gesuchte Seite $= 4$. Ein anderes Beispiel ist, die Höhe eines Dreiecks zu finden, dessen Seiten $\sqrt{10} - \sqrt{5}$ und $\sqrt{6}$ sind und die Grundlinie $\sqrt{18} - 1$. Ein Abschnitt der Grundlinie wird als unbekannt angenommen und dann die Höhe $= \sqrt{2} - 1$ gefunden.

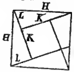
Unbestimmte Aufgaben kommen mehrere vor. Diese Aufgaben führen auf Gleichungen von der Form $Ax^2 = Bx$ oder $Ax^3 = Bx^2$, welche, wie bei Diophantus, zum ersten Grade gerechnet werden. Auch Aufgaben, wie sie im 6ten Buche des Werkes von Diophantus enthalten sind, kommen hier vor, z. B.: Man sucht ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse durch dieselbe Zahl dargestellt wird als die Fläche. Hypotenuse, Senkrechte und Basis seien $(m^2 + n^2)x$, $2mn.x$, $(m^2 - n^2)x$, so soll sein $(m^2 + n^2)x = m.n\,(m^2 - n^2)x^2$, also $x = \frac{m^2 + n^2}{m.n\,(m^2 - n^2)}$. Man sucht ein eben solches Dreieck, in welchem die Fläche so groß ist als das Produkt der drei Seiten. Die Bedingung ist $m.n.(m^2 - n^2).x^2 = 2mn\,(m^2 - n^2)\,(m^2 + n^2)x^3$, also $x = \frac{1}{2(m^2 + n^2)}$; beide Aufgaben gehören in die vorige Klasse. Man sucht zwei Zahlen, welche so beschaffen sind, daß sowohl ihre Summe, wie ihr Unterschied Quadrate sind, ihr Produkt aber ein Kubus. Man setze die eine Zahl $= (m^2 + n^2)x^2$, die andere $2mn.x^2$, so werden die beiden ersten Bedingungen schon erfüllet; die dritte erfordert, daß $2mn\,(m^2 + n^2)x^4$ ein Kubus sei; setzt man die Wurzel desselben $= m.n\,(m^2 + n^2).x$, so wird $x = \frac{1}{2}m^2.n^2\,(m^2 + n)^2$. Man soll zwei Zahlen finden, von welchen die Summe der Kuben ein Quadrat und die Summe der Quadrate ein Kubus ist. Die Auflösung erfolgt in ähnlicher Weise.

Das fünfte Kapitel enthält die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades, ihre Theorie wird auf die ältesten Mathematiker, namentlich Aryabhatta, zurückgeführt. In ganz allgemeiner Weise wird eine Regel zuerst gegeben, welche sich auch auf geeignete Fälle von höheren Gleichungen anwenden läßt. Hieher gehört $12x + x^3 = 6x^2 + 35$ oder $x^3 - 6x^2 + 12x = 35$, wird 8 auf beiden Seiten abgezählt, so wird: $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27$ oder $(x - 2)^3 = 27$, $x - 2 = 3$, $x = 5$. Eine andere Gleichung ist $x^4 - 2(x^2 + 200x) = 9999$, man gibt ihr die Form $x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000$ oder $(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$, also $x^2 + 1 = 2x + 100$ oder $x^2 - 2x + 1 = 100$, $(x - 1)^2 = 100$, $x - 1 = 10$, $x = 11$. Wo solche Wege nicht zum Ziele führen, muß der Rechner seinen Scharfsinn anwenden. Hat man die Gleichung $mx^2 + ax = b$, so muß man sie zuerst mit $4m$ vervielfachen, wodurch $4m^2x^2 + 4amx = 4bm$; nun zählt man auf beiden Seiten a^2 zu, es entsteht $4m^2x^2 + 4amx + a^2 = a^2 + 4bm$; wird dann die Wurzel ausgezogen, so wird $2mx + a = \sqrt{a^2 + 4bm}$, also $2mx = -a + \sqrt{a^2 + 4bm}$ und $x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bm}}{2m}$. Dieß ist die

allgemeine Vorschrift. Nun werden noch die besonderen Fälle unterschieden $mx^2 + ax = b$, $mx^2 - ax = b$, $mx^2 + ax = -b$, $mx^2 - ax = -b$. Wenn a negativ ist, wie im 2. und 4. Fall, und $\sqrt{a^2 - 4bm}$ kleiner als a, so gibt es zwei Werthe für x, sonst aber nur einen; negative Werthe gehören in die Klasse der unmöglichen Wurzeln. Die Anwendungen können größtentheils übergangen werden, sie bieten nichts Besonderes dar; eine Aufgabe nach einem alten Auctor ist schön: Man soll vier Zahlen finden, welche, um 2 vermehrt, Quadrate geben; wird die erste mit der zweiten, diese mit der dritten u. s. w. vervielfacht und jedem Produkte 18 zugezählt, so sollen sie gleichfalls Quadrate sein; zuletzt sollen die Wurzeln aller Quadrate zusammen und um 11 vermehrt, dem Quadrate von 13 gleich sein. Man kann die vier Zahlen $x^2 - 2$, $(x + a)^2 - 2$, $(x + b)^2 - 2$, $(x + c)^2 - 2$ setzen. Sucht man nun, wie die Zahlen a, b, c beschaffen sein müssen, damit das Produkt aus je zwei auf einander folgenden mit 18 ein Quadrat mache, so findet man, daß $a = \sqrt{\frac{18}{2}}$, $b = 2 . \sqrt{\frac{18}{2}}$, $c = 3\sqrt{\frac{18}{2}}$ oder $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$ sein müssen. Diese Zahlen müssen also eine arithmetische Reihe mit der Differenz 3 bilden. Dieser Satz des alten Auctors erinnert lebhaft an das eine Porisma des Diophantus, so wie auch die Methode der Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades die diophantische ist.

G---- Zuletzt kommen noch Anwendungen auf die Geometrie vor, welche für die Geschichte der Mathematik in Indien merkwürdig und belehrend sind. Das erste ist ein arithmetischer Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes und zugleich das erste Beispiel, wo zwei ähnliche Dreiecke mit einander verglichen werden, welche die dem gemeinschaftlichen Winkel gegenüberliegende Seite nicht parallel haben. Man fällt von der Spitze des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse und vergleicht die beiden entstandenen rechtwinkeligen Dreiecke mit dem ganzen; dieser Beweis ist jetzt sehr bekannt, aber spät erst in Europa von Wallis gebraucht worden. Auf diesen Beweis folgt ein geometrischer Beweis desselben Satzes. Man stelle vier congruente rechtwinkelige Dreiecke so zusammen, daß die Hypotenusen die Seiten eines Quadrates bilden; das Quadrat wird dann nicht ganz ausgefüllt, es bleibt im Innern noch ein Quadrat, dessen Seite der Unterschied beider Katheten ist. Man bezeichne die Hypotenuse, Senkrechte und Basis durch H, K, L, so ist das ganze Quadrat gleich den vier Dreiecken nebst dem innern Quadrate oder $H^2 = 2KL + (K - L)^2$; ist nun schon bewiesen, auf geometrischem Wege, daß $(K - L)^2 = K^2 - 2KL + L^2$, so ist $H^2 = 2KL + K^2 - 2KL + L^2 = K^2 + L^2$.

Fig. 13.



Ebenso werden noch an den Figuren die Sätze bewiesen, daß $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ und $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$. ✦

Das 6. Kapitel, welches die Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen enthält, ist ein buntes Muster von bestimmten und unbestimmten Aufgaben vom ersten Grade. Die Auflösung geschieht dadurch, daß der Werth einer Unbekannten aus einer Gleichung aufgesucht und in die andere eingeführt wird. Ist die Zahl der Unbekannten um eins größer, als die Zahl der Bedingungen, so bleibt zuletzt eine Gleichung mit zwei Unbekannten übrig, welche nach der Methode des 2. Kapitels in ganzen Zahlen aufgelöst wird. Ist die Anzahl der Unbekannten noch größer, so werden so viele willkürlich angenommen, als der Uebergang auf den vorigen Fall erfordert. Einzelne Aufgaben sind: Man sucht

✦ Vedi lo gnomone in Euclide... Elementi a Bretsch... p. 69....

drei Zahlen, welche so beschaffen sind, daß, wenn sie einzeln mit drei gegebenen Zahlen vervielfacht und dann durch eine gleiche Zahl getheilt werden, sie einen Quotienten geben, welcher dem Reste gleich ist, außerdem müssen diese bei jeder folgenden Zahl um eines größer sein. — Man sucht eine Zahl, welche der Reihe nach durch 2, 3 und 5 getheilt, in derselben Ordnung die Reste 1, 2, 3 läßt; die Quotienten sollen aber dieselbe Eigenschaft haben. — Man sucht zwei Zahlen, welche so beschaffen sind, daß die eine, durch 5 getheilt, den Rest 1, die andere, durch 6 getheilt, den Rest 2 läßt; der Unterschied beider Zahlen, durch 3 getheilt, soll 2, und die Summe, durch 9 getheilt, 5 zum Reste haben; zuletzt soll das Produkt, durch 7 getheilt, 6 zum Reste lassen. — Die Aufgaben sind größtentheils schön gestellt und gut gelöset.

Das 7. Kapitel enthält unbestimmte Aufgaben des 2. Grades; sie lassen sich nicht gut in eine natürliche Ordnung bringen, auch würde dieß der Beurtheilung der Sache selbst schaden. Die ersten Regeln lehren, wie Ausdrücke von der Form $ax^2 + bx$ rational gemacht werden können, oder vielmehr die Auflösung der Gleichung $ax^2 + bx = y^2$ in ganzen Zahlen. Die Vorschrift ist: Man vervielfacht mit $4a$, so daß $4a^2x^2 + 4abx = 4ay^2$ oder $(2ax)^2 + 2(2ax) = 4ay^2$; nunmehr zähle man b^2 auf beiden Seiten zu, es wird: $(2ax + b)^2 = 4ay^2 + b^2$. Kann man jetzt $4ay^2 + b^2$ zu einer Quadratzahl z^2 machen, so ist $2ax + b = z$ und $x = \frac{z - b}{2a}$. Da viele Werthe für z möglich sind, so können unter diesen auch solche sein, durch welche x eine ganze Zahl wird. So führt z. B. die Gleichung $6x^2 + 2x = y^2$ auf $(6x + 1)^2 = 6y^2 + 1$, eine Auflösung ist $y = 2$, $z = 5$, $x = \frac{2}{3}$, eine andere ist $y = 20$, $z = 49$ und $x = 8$ u. s. w. Eine Aufgabe, welche auf eine solche Gleichung führt, ist: zwei Zahlen m und n so zu bestimmen, daß $(m + n)^2 + (m + n)^3 = 2(m^3 + n^3)$. Setzt man $m = x + y$ und $n = x - y$, so kommt man auf die Gleichung $4x^3 + 4x^2 = 12xy^2$ oder $(2x + 1)^2 = 12y^2 + 1$; sie wird aufgelöst durch $y = 2$, $x = 3$, $m = 5$ und $n = 1$ oder durch $y = 28$, $x = 48$, $m = 76$ und $n = 28$ u. s. w. — Die allgemeine Form der Gleichungen für die folgende Regel ist: $ax^4 \pm bx^2 = y^2$. Man zerlegt die Gleichung in $x^2(ax^2 \pm b) = y^2$, kann nun $ax^2 \pm b$ in eine Quadratzahl verwandelt werden, so ist die Aufgabe gelöst. Hierher gehört die Gleichung $5x^4 - 100x^2 = y^2$, sowie folgende Aufgabe: der Unterschied zweier Zahlen soll ein Quadrat, die Summe ihrer Quadrate ein Kubus sein: $m - n = x^2$, $m^2 + n^2 = y^3$. Die Aufgabe wird gelöst durch die Annahme $y = x^2$ und die Gleichung wird $x^4(2x^2 - 1) = (2m - x^2)^2$, $x = 5$ leistet Genüge und führt zu $m = 100$ und $n = 75$. —

Ein Beispiel für eine andere Klasse von Aufgaben ist die Gleichung $3x^2 + 6x = y^2 + 2y$. Sie wird zuerst verwandelt in $(3x + 3)^2 = 3y^2 + 6y + 9$; von Neuem setzt man $3y^2 + 6y + 9 = z^2$ oder $(3y + 3)^2 = 3z^2 - 18$. Für $z = 9$ wird dieser Ausdruck ein Quadrat und hieraus $x = 2$ und $y = 4$ als eine Auflösung. Schlägt man den umgekehrten Weg ein, so erhält man zuerst $(y + 1)^2 = 3x^2 + 6x + 1 = z^2$ und $(3x + 3)^2 = 3z^2 + 6$; für z findet man 1, 5, 19, 81, . . . und daraus x und y; das Allgemeine kann leicht angegeben werden. — Von anderer Art ist die Aufgabe: es soll $ax^2 + by^2 = z^2$ und zugleich $ax^2 - by^2 + 1 = u^2$ sein. Der ersten Bedingung wird Genüge geleistet, wenn man $ax^2 + b$ in ein Quadrat verwandeln kann; ist dieß für $x = m$ der Fall, so setzt man $x = my$. Es sei also $am^2 + b = n^2$, so ist auch $am^2y^2 + by^2 = (am^2 + b)y^2 = n^2y^2 = z^2$, nunmehr hat man $am^2y^2 -$

$by^2 + 1 = u^2$ oder $(am^2 - b)y^2 + 1 = u^2$, eine Gleichung, welche nach dem Früheren aufgelöst werden kann. Als Beispiel dienen die Gleichungen: $7x^2 + 8y^2 = z^2$ und $7x^2 - 8y^2 + 1 = u^2$; eine Auflösung ist $x = 4$ und $y = 2$. Die Aufgabe $y^2 + x^3 = z^2$ und $x + y = u^2$ wird nach einer Vorschrift des 3. Kapitels aufgelöst. Man beginnt mit der Gleichung $1 \cdot y^2 + x^3 = z^2$, und macht x^3 zur Additiven. Nach der gegebenen Vorschrift ist ein Werth von

$y = \dfrac{\dfrac{x^3}{d} - d}{2\sqrt{1}}$ und alsdann $z = \dfrac{\dfrac{x^3}{d} + d}{2}$. Man nehme $d = x$, so ist $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ und $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; hierdurch wird die zweite Gleichung $x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = u^2$ oder $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = u^2$. Nunmehr ist die Auflösung auf das Vorhergehende zurückgeführt, man hat $4x^2 + 4x + 1 = 8u^2 + 1$ oder $(2x + 1)^2 = 8u^2 + 1$. Für u erhält man, 1, 6, 35, ..., $8u^2 + 1 = 3^2, 17^2, 99^2, \ldots$, hieraus $x = 1, 8, 49, \ldots$ und $y = 0, 28, 1176, \ldots$. Ganz ähnlich ist die Aufgabe: $x^2 + xy + y^2 = z^2$ und $(x + y)z + 1 = u^2$. Man gibt der ersten Gleichung die Form $36x^2 + 36xy + 36y^2 = 36z^2$ oder $(6x)^2 + 6y(6x) + 36y^2 = 36z^2$ oder $(6x)^2 + 2 \cdot (3y)(6x) + 9y^2 + 27y^2 = 36z^2$ oder $(6x + 3y)^2 + 27y^2 = 36z^2$. Jetzt nimmt man wieder $27y^2$ als Additive der Gleichung $1(6x + 3y)^2 + 27y^2 = (6z)^2$ und macht $d = y$, so wird die kleine Wurzel $6x + 3y = \dfrac{\dfrac{27y^2}{y} - y}{2} = \dfrac{27y - y}{2} = 13y$ und die große Wurzel $6z = \dfrac{27y + y}{2} = 14y$. Der erste Werth gibt $x = \dfrac{5}{3}y$, der andere $z = \dfrac{7}{3}y$; in die zweite Gleichung eingeführt, geht diese dadurch über in $\left(y + \dfrac{5}{3}y\right) \cdot \dfrac{7}{3}y + 1 = u^2$ oder $\dfrac{56}{9}y^2 + 1 = u^2$ oder $56y^2 + 9 = (3u)^2$. Die Zahlen $y = 6$ und $u = 15$ geben $x = 10$ und für $y = 180$ und $u = 449$ ist $x = 300$ u. s. w. — Die Inder beschäftigten sich später weniger mit einzelnen künstlichen Auflösungen, als mit allgemeinen Regeln; von früheren Auctoren werden aber solche öfter angeführt als Beispiele großen Scharfsinnes; hierher gehört z. B. folgende Aufgabe. Zwei Zahlen sollen die Bedingungen erfüllen: 1) die Summe der Zahlen mit 3, 2) der Unterschied mit derselben Zahl, 3) die Summe der Quadrate weniger 4, 4) die Differenz der Quadrate mit 12 sollen Quadrate sein, 5) das halbe Produkt mit der kleineren Zahl soll ein Kubus sein und 6) alle fünf Wurzeln der Potenzen sollen mit 2 zusammen eine Quadratzahl geben. — Setzt man die eine Zahl $m = x^2 - 2$, die andere $n = 2x$, so werden die fünf ersten Bedingungen erfüllt, die fünf Wurzeln sind $x + 1$, $x - 1$, x^2, $x^2 - 4$ und x, ihre Summe ist $2x^2 + 3x - 4$, und diese muß mit 2 also $2x^2 + 3x - 2 = y^2$ sein. Diese Gleichung wird wie gewöhnlich aufgelöst, man erhält zuerst $(4x + 3)^2 = 8y^2 + 25$ und hierdurch $m = 7$ und $n = 6$ oder $m = 15127$ und $n = 246$ u. s. w.

Als Beispiele einer neuen Klasse von Aufgaben dienen die nachstehenden. Man soll $3x + 1$ zu einer Quadratzahl machen, so daß zugleich $5x + 1$ ein Quadrat wird. Man setze $3x + 1 = (3y + 1)^2$, so wird $3x + 1 = 9y^2 + 6y + 1$, also $x = 3y^2 + 2y$ und $5x + 1 = 15y^2 + 10y + 1$. Die Bedingung wird erfüllt, wenn $15y^2 + 10y + 1 = z^2$ ist. Auf die gewöhnliche Art wird diese Gleichung verwandelt in $(15y + 5)^2 = 15z^2 + 10$, wodurch die Aufgabe

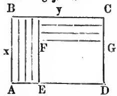
gelöst ist. Man findet $x = 16$ oder 1008 u. s. w. Es ist leicht einzusehen, daß diese Auflösungsmethode immer anwendbar ist, und daß die Formeln $ax + 1$ zuletzt auch auf einen Ausdruck $cz^2 \pm d$ zurückgebracht werden können; aber nicht in allen Fällen wird dieser auflösbar sein, wie es die Natur des Gegenstandes mit sich bringt. Es soll $3x + 1 = y^3$ und zugleich $3y^2 + 1 = z^2$ sein. Man erfüllt die zweite Bedingung durch das bekannte Verfahren und erhält dann $x = \frac{y^3 - 1}{3}$. — Es sollen zu gleicher Zeit $2(m^2 - n^2) + 3$ und $3(m^2 - n^2) + 3$ Quadratzahlen sein. Wenn $m^2 - n^2 = x$, so ist $2x + 3 = y^2$ und $3x + 3 = z^2$, also $x = \frac{y^2 - 3}{2}$ und $3x + 3 = \frac{3y^2 - 9}{2} + 3 = \frac{3y^2 - 3}{2} = z^2$. Hieraus wird $3y^2 = 2z^2 + 3$ oder $9y^2 = 6z^2 + 9$. Für $z = 6$ ist $3y = 15$, $y = 5$ und $x = 11$. Man hat also $m^2 - n^2 = 11$ oder $(m + n)(m - n) = 11$, setzt man $m - n = 1$ und $m + n = 11$, so wird $m = 6$ und $n = 5$; andere Werthe von z bieten andere Auflösungen.

Nunmehr folgt erst die Theorie über die Auflösung der Gleichungen $ax + b = y^2$, die Aufgaben erscheinen unter der Form $\frac{y^2 - b}{a} = x$. Bedingung für jede Auflösung ist, b muß eine Quadratzahl sein. Ist $y^2 = ax + c^2$, so setze man $y = az \pm c$, wodurch $a^2z^2 \pm 2acz + c^2 = ax + c^2$, also $x = az^2 \pm 2cz$, wodurch x eine ganze Zahl wird. So führt die Gleichung $y^2 = 7x + 4$ auf $x = 7z^2 \pm 4z$. Andere Auflösungsmethoden führt Bhaskara gar nicht an, weil er nur ganze Zahlen sucht. Ist b keine Quadratzahl, so läßt sich die Gleichung dennoch in vielen Fällen auflösen. Es sei $\frac{y^2 - b}{a} = x$, man zähle auf beiden Seiten eine Zahl k zu oder ab, so wird $\frac{y^2 - b}{a} \pm k = x \pm k$, oder $\frac{y^2 - b \pm ak}{a} = x \pm k$, ist jetzt $ak + b$ oder $ak - b$ ein Quadrat, so kann die Aufgabe gelöst werden. Hat man z. B. $\frac{y^2 - 30}{7} = x$, so ist auch $\frac{y^2 - 30}{7} + 2 = x + 2$, oder $\frac{y^2 - 16}{7} = x + 2 = z$, also $y^2 = 7z + 16$. Nunmehr setze man $y = 7u \pm 4$ und $y^2 = 49u^2 \pm 56u + 16$, also auch $7z + 16 = 49u^2 \pm 56u + 16$ oder $z = 7u^2 \pm 8u$ und $x = 7u^2 \pm 8u - 2$. Für $z = 1$ wird $x = 13$ und $y = 11$. Man sieht, daß dieses darauf hinausläuft, wenn b keine Quadratzahl ist, muß man eine Auflösung kennen, um andere zu finden. Ganz auf dieselbe Weise werden die Gleichungen $ay + b = x^3$ behandelt, b muß Kubikzahl sein, oder durch dieselben Mittel dazu gemacht werden können, wenn die Gleichung auflösbar sein soll. Die letzten Aufgaben haben die Form $\frac{cy^2 + b}{a} = x$ oder $cy^2 = ax + b$, die Regel gibt an, die Gleichung mit c zu vervielfachen und dann den Ausdruck $acx + bc$ nach dem Vorhergehenden zu behandeln. Es sei $\frac{5y^2 + 3}{16} = x$ oder $5y^2 = 16x - 3$; mit 5 vervielfacht entsteht $(5y)^2 = 80x - 15$. Man setze $5 \cdot 16x - 15 = (8z \pm 1)^2$, so wird $5 \cdot 16x = 64z^2 \pm 16z + 16$, also $5 \cdot x = 4z^2 \pm z + 1$; es ist nun

$5y = 8z \pm 1$, daher $y = \frac{8z \pm 1}{5}$; für das untere Zeichen muß $z = 2 + 5u$ und für das obere $3 + 5u$ sein, das gibt $y = 3 + 5u$ oder $y = 5 + 8u$. Für $5.x$ wird jetzt $4z^2 - z + 1 = 100u^2 + 75u + 15$ oder $4z^2 + z + 1 = 100u^2 + 125u + 40$, mithin ist für das obere Zeichen $x = 20u^2 + 25u + 8$ und für das untere $x = 20u^2 + 15u + 3$. Hieraus erhält man für $u = 0$, $x = 8$ und $y = 5$ oder $x = 3$ und $y = 3$. Dieselbe Methode auf die Gleichung $\frac{5x^2 + 7}{11} = y$ angewandt, gibt $x = 5 + 11u$ und $y = 12 + 50u + 55u^2$ oder $x = 6 + 11u$ und $y = 17 + 60u + 55u^2$, wo u jede ganze positive Zahl vorstellt.

Das achte und letzte Kapitel ist hauptsächlich der Gleichung $ax + by + c = xy$ gewidmet, andere Gleichungen, wie $xyzu = a(x + y + z + u)$ und ähnliche verdienen kaum einer Erwähnung. Die Behandlungsweise dieser Gleichungen, welche schon Brahmegupta auflöst und zu astronomischen Zwecken benützt, ist sehr einfach und schön. Man bilde aus den Zahlen a, b, c die neue Zahl $ab + c$ und zerlege diese in zwei Faktoren; sind diese m und n, so ist $m + b$ oder $n + b$ ein Werth von x und $n + a$ oder $m + a$ ein zugehöriger Werth von y. So viele Zerlegungen $ab + c$ zuläßt, so viele doppelte Auflösungen erhält man für die Gleichung. Die Richtigkeit dieser Vorschrift ist leicht nachzuweisen und sie scheint den ältesten Mathematikern schon bekannt gewesen zu sein. Was nun aber die Sache besonders auszeichnet, ist der geometrische Beweis, welchen Bhaskara dazu gibt und welchem der Ausspruch beigefügt ist: „Mathematiker haben die Algebra eine Rechnung mit Beweisen genannt, denn sonst würde sie sich von der Arithmetik nicht unterscheiden". Dieser Bemerkung widerspricht aber das ganze Buch, in welchem sich nur selten etwas findet, was man einen Beweis nennen könnte. Da Bhaskara keine allgemeinen Zeichen kennt, so knüpft er seine Darstellung an einen besondern Fall und geht von der Gleichung $4x + 3y + 2 = xy$ aus. Man denke sich ein Rechteck ABCD,

Fig. 14.



in welchem $AB = x$ und $BC = x$ ist, so stellt der Inhalt die rechte Seite der Gleichung xy dar, dieser Inhalt muß aber auch aus den drei Theilen $4x$, $3y$ und 2 bestehen. Schneidet man $4x$ von der linken Seite der Figur ab, so ist der Rest noch $3y + 2$; schneidet man aber auch von der obern Seite $3y$ ab, so fehlt jeder Schichte 4, den drei Schichten also 12, und man hat nur $3y - 12$ abgeschnitten, wodurch der Rest EFGD noch $12 + 2 = 14$ beträgt. Man nehme nun an: es sei $ED = 1$, so ist $GD = 14$; hierdurch wird $x = GD + CG = 14 + 3 = 17$ und $y = DE + AE = 1 + 4 = 5$: oder man setze $ED = 14$ und $GD = 1$, so wird $x = 1 + 3 = 4$ und $y = 14 + 4 = 18$. Zerlegt man 14 in $2 . 7$ und nimmt man $ED = 2$ und $GD = 7$, so wird $x = 7 + 3 = 10$ und $y = 2 + 4 = 6$, oder man nimmt $ED = 7$ und $GD = 2$, so wird $x = 2 + 3 = 5$ und $y = 7 + 4 = 11$. In ähnlicher Weise werden die Beweise geführt, wenn a, b und c verschiedene Vorzeichen haben und die ganze Untersuchung wird mit einfacher Eleganz geführt.

Für diese Art von Gleichungen gibt Brahmegupta eine zu seiner Zeit schon bekannte Auflösung. Die Gleichung sei: $ax + by + c = dxy$. Man bilde die Summe der Produkte $ab + cd$ und theile sie durch irgend eine willkürlich angenommene Zahl; Divisor und Quotient seien m und n; nun gibt die Regel

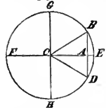
an, wenn m größer als n und a größer als b; so ist $\frac{m+b}{d}$ ein Werth von x und $\frac{n+a}{d} = y$ oder wenn b größer als a, so ist $x = \frac{n+b}{d}$ und $y = \frac{m+a}{d}$. Ebenso verhält sich die Sache, wenn n größer als m; immer muß die größere Zahl von m und n mit der kleinern von a und b und umgekehrt verbunden werden, der Werth von x entsteht alsdann aus derjenigen Summe, welche b enthält, und der von y wird aus der andern Summe, welche a enthält, gebildet. Ist $3x + 4y + 90 = 5\ xy$, so ist $5 . 90 + 3 . 4 = 462$, diese Zahl besteht aus den Faktoren $2 . 3 . 7 . 11$; nimmt man 11 zum Divisor, so ist $\frac{462}{11} = 42$, also $m = 11$ und $n = 42$, da nun $a = 3$ und $b = 4$, so ist $x = \frac{m+b}{d} = \frac{11+4}{5} = 3$ und $y = \frac{42+3}{5} = 9$; oder wenn 22 zum Divisor genommen wird $x = 5$ und $y = 5$. Nicht immer erhält man auf diese Weise ganze Zahlen für x und y, wenn aber solche Werthe möglich sind, so werden sie durch diese Methode gefunden. Bhaskara tadelt nun die angegebene Regel und bezeichnet sie als unnöthig; er räth, die eine Unbekannte willkürlich anzunehmen und daraus die andere zu bestimmen. Man sieht, daß er den Werth der Vorschrift nicht verstanden hat und sich auf die Auflösung durch Versuche beschränken wollte.

Die Trigonometrie der Inder.

Nach dem bisher Mitgetheilten läßt sich nun erwarten, daß der Theil der Mathematik, welcher besonders der Rechnung bedarf, die Trigonometrie, den Indern nicht gefehlt haben werde, da sie durch ihre ganze Richtung darauf hingewiesen wurden. Wie nun überhaupt alle mathematischen Abhandlungen nur in den Schriften der Astronomen vorkommen, so müssen wir uns in ihnen um so mehr nach der Trigonometrie umsehen, da diese auch bei den Griechen nicht von der Astronomie getrennt war und ihre Entstehung überhaupt dieser Wissenschaft verdankte. Die Frage, wann dieser Zweig in Indien aufgekommen, können wir nicht beantworten; wir wissen nicht, wie bei den Griechen, wer zuerst mit der Berechnung der Sehnen sich beschäftiget hat, und können bloß aus dem bis jetzt bekannten ältesten Werke anführen, wie dieser Gegenstand behandelt wurde. Die Inder bedienten sich wie die Griechen des Kreises zum Messen der Winkel und theilten, wie diese, zuerst den Umfang in vier gleiche Theile durch zwei zu einander senkrechte Durchmesser. Ein jeder Theil wurde wieder in 90 gleiche Theile, welche wir auch Grade nennen wollen, eingetheilt; der Grad in 60 Minuten, der ganze Umfang also in $4 . 90 . 60 = 21600$ gleiche Theile. Für den Radius oder den Durchmesser nahmen sie kein eigenes Maß an, sie stellten ihn durch diese Theile des Umfanges dar und berechneten den Radius zu 3438,7 oder 3438 Theile. Dieser Radius ist aus dem Umfange 21600 weder nach dem Verhältnisse 22 : 7, noch nach dem $\sqrt{10}$, sondern nach dem, von Bhaskara angegebenen, 3927 : 1250 berechnet. Hier zeigt sich schon ein merkwürdiger Unterschied in dem Verfahren der Inder und dem der Griechen; diese würden nie einen Kreistheil als Maß für eine gerade Linie genom-

men haben. Jeder Viertelkreis wurde nun in 24 gleiche Theile getheilt, so daß auf einen Theil 225 Theile des ganzen Kreisumfanges kamen, was einen Winkel von $3^3/_4$ Graden entspricht. In der Astronomie wird die scheinbare Bahn der Sonne als Kreis betrachtet, in 12 Theile oder Zeichen getheilt; ein jeder Theil umfaßt also 30°. Diese Theilung kam auch hier wieder vor und ein jedes Zeichen enthält 8 Theile von 225 des ganzen Umfanges. Es seien EF und GH zwei zu einander senkrechte Durchmesser, BE und ED seien Bogen von 30° oder jeder enthalte ein Zeichen, so ist BD die Sehne von zwei Zeichen oder von 60°. Diese Linie nun ist es, welche ursprünglich Sehne (Dschya) genannt wurde, wahrscheinlich vom Bogen als Schießwaffe hergenommen, welcher ungefähr denselben Umfang haben mochte. In der Anwendung auf die Mathematik wurde aber nicht die ganze Sehne BD genommen, sondern nur ihre Hälfte AB und diese auch nur auf den Bogen BE bezogen, und so hieß nun AB die Sehne von einem Zeichen.

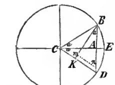
Fig. 15.



Die Sehne oder Senkrechte von zwei Zeichen mag Doppelsehne (Dvidschya) geheißen haben, aber die Sehne GC von drei Zeichen oder der Radius hieß Dreisehne (Tridschia), woraus sich mit Bestimmtheit ergibt, daß die Inder nicht mit ganzen Sehnen gerechnet haben, wie die Griechen, sondern immer mit den Senkrechten oder den halben Sehnen. Diese Benennung wurde weiter ausgedehnt und in der Trigonometrie die Senkrechte eines Bogens überhaupt Sehne genannt, wofür wir jetzt das Wort Sinus gebrauchen. In dem Quadranten hatten nun die Inder für alle Winkel von $3^3/_4$ zu $3^3/_4$ Grade oder für je 225 Theile die Sinus berechnet, also im Ganzen 24, und in einer kleinen Tafel zusammengestellt; ein Sinus der Tafel hieß Dschyapinda und die ganze Reihe Kramadschyas. Die am Ende A zum Kreise aufsteigende Senkrechte, der Pfeil, welche jetzt Sinus versus heißt, wurde Utkramadschya genannt. ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem AB als Grund- oder Hauptlinie angesehen werden kann, dann ist AC die an ihrem Ende errichtete Senkrechte und sie hieß deßwegen Kotidschya; bei uns wird sie jetzt Cosinus genannt. Man sieht, daß die Inder weiter gegangen waren als die Griechen, indem sie drei von dem Winkel oder Bogen abhängige Verhältnisse unterschieden, letztere dagegen nur die Sehne gebrauchten.

Was nun die Berechnung der Tafel betrifft, so war diese höchst einfach; der Radius oder der Sinus von 90° aus dem Umfange berechnet, ist 3438; der Sinus von 30° ist nach einem bekannten und augenscheinlichen Satze davon die Hälfte, daher $\sin. 30° = 1719$. Durch die Anwendung des pythagoräischen Satzes, daß $\sin. a^2 + \cos. a^2 = r^2$, erhielt man $\sin. 45^0 = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = 2431$. Da nun ebenfalls offenbar $\cos. a^2 = \sin. (90 - a)$, so erhielt man ferner für $a = 60$: $\sin. 60^{0\,2} + \cos. 60^{0\,2} = r^2$ oder $\sin. 60^2 = r^2 - \frac{1}{4} r^2 = \frac{3}{4} r^2$, daher $\sin. 60^0 = \frac{\sqrt{3 r^2}}{2} = 2978$. Die auf diese Weise gefundenen Sinus von 90, 60, 45 und 30 Graden bildeten nun die Grundlage, auf welcher die übrigen berechnet wurden durch eine Formel zwischen dem Sinus des halben Bogens und dem Cosinus des ganzen. Es ist unbekannt, auf welchem Wege die Inder zu dieser Vorschrift gelangt sind, aber tiefe Betrachtungen dürfen wir hier nicht voraussetzen, sie konnten sich leicht etwa auf folgenden Wegen ergeben. Es sei BD, Fig. 16, die Sehne des doppelten Bogens, also $AB = AD = \sin. a$, man ziehe

Fig. 16.



BK senkrecht zu CD, so ist CK = cos. 2 a und KD = sin. vers. 2 a; nun wußten die Inder die Abschnitte der Grundlinie eines Dreiecks zu berechnen, daher: $KD = \frac{BD^2 + CD^2 - CB^2}{2\,CD}$, oder weil CB = CD, $KD = \frac{BD^2}{2\,CD}$ und da BD = 2 AB, $KD = \frac{4\,AB^2}{2\,CD} = \frac{2\,AB^2}{CD}$ oder $CD\,.\,KD = 2\,AB^2$, d. h. r . sin. vers. 2 a = 2 sin. a², nun ist aber KD = CD — CK = r — cos. 2 a, daher auch: r (r — cos. 2 a) = 2 sin. a². Macht man Bn = CB und zieht nm senkrecht zu BK, so ist mn = AB, in den ähnlichen Dreiecken aber auch Bn : mn = BD : KD oder CB : AB = 2 AB : KD, woraus CB . KD = 2 AB² oder r . sin. vers. 2 a = 2 sin. a² folgt. Solche Rechnungen lagen ganz in der Art der Inder und auf einem ähnlichen Wege mögen sie zu der Formel $\sin. a^2 = \frac{r\,(r - \cos. 2\,a)}{2}$ gelangt sein; man brauchte dabei keine getrennten Dreiecke zu vergleichen. Man setze nun 2 a = 45°, so ist a = 22° 30′, mithin: $\sin. 22^\circ\,30' = \sqrt{\frac{r\,(r - \cos. 45^0)}{2}} = \sqrt{\frac{r\,(r - \sin. 45^0)}{2}} = \sqrt{1731033}$, also sin. 22° 30′ = 1315. Durch fortgesetzte Halbirung gelangten sie zu sin. 11° 15′ = 671 und aus sin. 30° zu sin. 15° = 890, sin. 7° 15′ = 449, sin. 3° 45′ = 225.

Im weiteren Verlaufe wurden nun zu den gefundenen Sinus die Sinus der Ergänzungen zu 90° berechnet: sin. 86° 15′ = $\sqrt{r^2 - \sin. 3^0\,45}$ = 3431; sin. 82° 30′ = $\sqrt{r^2 - \sin. 7^\circ\,30'}$ = 3409; ebenso wurden gefunden sin. 78° 45, = 3372; sin. 75° = 3321; sin. 67° 30′ = 3177. Durch Halbirung kam man von 82° 30′ auf sin. 41° 15′ = 2267, von 75° auf sin. 37° 30′ = 2093 und von 67° 30′ auf sin. 33° 45′ = 1910. Die Berechnung der Ergänzungen ergab sin. 48° 45′ = 2585, sin. 52° 30′ = 2728, und sin. 56° 45′ = 2859; die Halbirung von 52° 30 ergab sin. 26° 15 = 1520 und die Ergänzung dazu sin. 63° 45′ = 3084; zuletzt erhielt man ebenso aus 37° 30, sin. 18° 45′ = 1105 und sin. 71° 15′ = 3256. Es ist hier absichtlich die ganze Reihe angegeben worden, um zu zeigen, daß keine anderen Hülfsmittel, als die angegebenen, zur Berechnung der Sinustafel der Inder nöthig waren, und daß diese nur aus ganz elementaren Sätzen der berechnenden Geometrie hervorgegangen ist. Auf solche Weise ist sicher diese Tafel berechnet worden; als sie aber entworfen war, suchte man einen noch einfacheren Weg, um eine jener Vorschriften geben zu können, welche man in der indischen Geometrie überall trifft. Es seien a, b, c drei auf einander folgende Winkel oder Bogen der Tafel, also a — b = b — c = 3° 45′, so gibt die Vorschrift an, daß: $\sin. a = \sin. b + (\sin. b - \sin. c) - \frac{\sin. b}{225}$; da den berechneten Zahlen keine Brüche beigefügt werden, so muß für den Quotienten aus $\frac{\sin. b}{225}$ immer die nächste ganze Zahl genommen werden. Macht man die Rechnung, so ergibt sich zuerst bei sin. 30° der Sinus um 1 zu klein; setzt man sie aber mit der richtigen Zahl fort, so tritt derselbe Fall wieder bei 48° 45′, 60° und 67° 30′ ein, und in allen vier Fällen darf man nur die ganze Zahl des Quotienten nehmen und nicht den Rest vernachläßigen. Auch in dieser Vorschrift hat man mehr gesucht, als in ihr zu finden ist, sie ist nichts als eine empirische Formel und keineswegs auf tieferen Kenntnissen gegründet,

die Zahl 225 steht in ihr ganz richtig als die Bogenlänge von 3° 45′ und nicht aus Versehen statt einer andern, wie man aus Gründen vermuthet hat, welche eine höhere Entwickelung der Geometrie bei den Indern voraussetzen würden.

Die Trigonometrie muß ebenso einfach gewesen sein, wie die ganze Geometrie, welche wir kennen gelernt haben; sie dehnte sich sicher nur auf das rechtwinkelige Dreieck aus, und die Regel der drei Glieder spielte auch hier die Hauptrolle. Schiefwinkelige Dreiecke wurden in rechtwinkelige zerlegt, und dadurch ließen sich alle gewöhnlichen Rechnungen leicht ausführen, in der ebenen wie in der sphärischen Trigonometrie. Bei dem Gebrauche der Tafel mußte man die Sinus der fehlenden Winkel durch eine leichte Rechnung finden. Hatte man z. B. den Sinus von 27° 48′ nöthig, so ist $\sin. 30^0 = \sin. 1800' = 1719$ und $\sin. 26^0 15' = \sin. 1575' = 1520$, also der Unterschied für $225' = 199$, der gegebene Winkel hat 1668′, ist also größer als der von 26° 15′ und 148′; nunmehr schloß man $225' : 148' = 199 : x$, woraus $x = 131$ folgte, daher ist $\sin. 27^0 48' = 1520 + 131 = 1651$. Aus der ganzen Darstellung ergibt sich nun, daß die mit solchen Hülfsmitteln geführten Rechnungen keine große Genauigkeit haben konnten; dieß zeigt schon, daß man die Senkrechte von 3° 45′ mit dem Bogen als zusammenfallend betrachtete, es stimmt dieß aber auch ganz überein mit den empirischen Formeln, welche schon in der Geometrie vorkommen, und aus Allem geht hervor, daß in geometrischen Dingen die Inder eine große Nachläßigkeit zeigten und sich überhaupt zu diesem Gegenstande nicht hingezogen fühlten. Aus diesem Grunde dürfen wir auch nicht erwarten, daß ihre astronomischen Beobachtungen und Rechnungen eine mehr als mittelmäßige Genauigkeit gehabt haben werden.

Allgemeine Betrachtungen über die Mathematik der Inder.

Geht man nun die Mathematik der Inder nach ihren verschiedenen Zweigen, wie wir sie im Vorhergehenden kennen gelernt haben, durch, so zeigt sich zuerst, daß ihre Arithmetik, sowohl in theoretischer als praktischer Hinsicht, hinter der jetzigen nur wenig zurückstand. Die Geschäfte in ganzen Zahlen wie in Brüchen, in allen Verbindungen, das Quadrat- und Kubikwurzelausziehen mit Ausschluß der Decimalbrüche, wurden beinahe ebenso wie bei uns mit derselben Einfachheit, Klarheit und Leichtigkeit ausgeführt. Die Lehre von den einfachen und zusammengesetzten Proportionen in allen möglichen Anwendungen auf die Rechnungen des Geschäftslebens waren auf das Vollständigste ausgebildet. Zur Arithmetik wurden ferner noch gezogen: eine ganze Klasse von Aufgaben, welche gewöhnlich bei uns durch Gleichungen aufgelöst werden, die einfachen arithmetischen Reihen, Einiges aus der Lehre von den Combinationen und die Berechnung der Raumgrößen. In der Algebra hatten die Inder zuerst eine ganz ausreichende Bezeichnung für die verschiedenen Operationen, die Potenzen und die irrationalen Größen, für eine und mehrere Unbekannte, und obgleich die Zeichen meistens Abkürzungen der entsprechenden Wörter waren, so leisteten sie doch dieselben Dienste wie unsere Zeichen. Hieran knüpfte sich nun eine vollständige Buchstabenrechnung, ganz nach unserer Weise; die Zeichen stellten zwar nur unbekannte Größen vor, was aber auf die Sache selbst keinen Einfluß hatte. Die Rechnungen mit Wurzelgrößen sind sehr ausführlich dargestellt und entsprechen ebenfalls den unserigen, sie kannten den doppelten Werth einer Quadratwurzel und die Unmöglichkeit derselben aus einer negativen Zahl. Die Lehre von den Gleichungen des ersten Grades, mit einer und mit mehreren unbekannten Größen, so wie die Gleichungen des zweiten Grades, sind mit einer gewissen Eleganz und Leichtigkeit durchgeführt, negative Wurzeln betrachteten sie aber

als unmöglich. Von Gleichungen höherer Grade kommen einzelne Beispiele vor, aber keine allgemeine Methode der Auflösung. Die unbestimmten Gleichungen bilden aber den schönsten Zweig der indischen Mathematik. Die Auflösung dieser Gleichungen in ganzen Zahlen ist durch einfache Regeln auf das Vollständigste gegeben und erst im 17. Jahrhundert, wie erwähnt, in Europa ganz in derselben Weise wieder erfunden worden, aber auch die neueste Zeit hat dazu keine wesentliche Verbesserung finden können. Für die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades werden eine Menge allgemeiner Regeln gegeben, welche meistens darauf berechnet sind, sie in ganzen Zahlen zu erhalten. Auflösungen in gebrochenen Zahlen haben für die Inder keinen besondern Werth gehabt; sie dienten oft nur als Uebergang zu ganzen Zahlen, oder wurden da angegeben, wo andere Werthe nicht stattfinden konnten. Aus diesem Bestreben ging hervor, daß sie die meisten Gleichungen zurückzuführen suchten auf eine besondere Klasse $ax^2 + b = y^2$, deren Auflösung sie denn auch ihre besondere Aufmerksamkeit zuwandten. Die cyklische Methode der Auflösung der Gleichungen $ax^2 + 1 = y^2$ ist sehr schön, und mit wenigen einfachen Verbesserungen führt sie selbst schneller und leichter zum Ziele, als alle bis jetzt bekannten Methoden. Die ganze indische Arithmetik und Algebra kann auf den Leser nur einen günstigen Eindruck machen; sie nähert sich unsern heutigen Vorstellungen am meisten, sie tritt uns sogleich als etwas Bekanntes entgegen und enthält auch noch Gegenstände, welche bei uns der Neuzeit angehören, nämlich die Combinationslehre und besonders die Bestimmung der Anzahl der Verbindungen jeder Art. Auch die Lehre von den arithmetischen und geometrischen Reihen wird völlig wie bei uns behandelt.

Eine auffallende Erscheinung ist der gänzliche Mangel aller Beweise und Entwickelungen; wir haben hier nur eine Reihe von Vorschriften und Regeln, die besagen, was man zu thun hat, um ein angegebenes Ziel zu erreichen, ohne die geringste Andeutung des Weges, auf dem man zur Regel gelangen kann, und die Inder scheinen den Beweis nur in die Uebereinstimmung des Resultates mit der Forderung gelegt zu haben. Wenn eine Regel die Auffindung der Wurzeln einer Gleichung lehrte, so bestand der Beweis darin, an einem bestimmten Falle zu zeigen, daß die so gefundenen Wurzeln wirklich der Gleichung genügten. Wir bemerken zwar bei Bhaskara hier und da ein Bestreben, eine Art Erklärung und Beweis zu geben, aber das paßt nun wieder nicht zur ganzen Haltung des Buches und man sieht wohl, daß er sich hier in einem fremdem Elemente bewegt und von der alten Art abweicht, welche noch in Brahmagupta frei hervortritt. Die Sätze der Inder sind übrigens auch von eigener Art: sie sagen selten aus, daß etwas ist, sondern wie etwas gefunden, d. h. berechnet werden kann; sie befaßten sich nicht, wie die älteren Griechen, mit den Eigenschaften der Zahlen, sondern mit den Zahlenoperationen, wobei besonders das metrische Element hervortrat. Wie aber sind die Inder zu ihren merkwürdigen Erfindungen gelangt, wie zu diesem Lehrgebäude, welchem eine gewisse Großartigkeit in der Anlage nicht abgesprochen werden kann? — Ein blindes Suchen und Versuchen können wir nicht annehmen; das würde nie zu diesen Resultaten geführt haben, es bleibt uns also nur die Voraussetzung übrig, daß sie forschend und entwickelnd zu Werke gingen, so daß immer das Vorhergehende dem Folgenden zur Stütze diente. Da sie sich nun hierbei allein der Zahlen bedienten, so war ein allgemeiner Beweis nicht so leicht zu führen und nur das Resultat wurde in der Vorschrift festgehalten, ein Verfahren, zu welchem sie sich auch schon durch die Form der ältesten Wissenschaft hingezogen fühlten. Daß diese Methode sehr ungünstig auf die Entwickelung der Mathematik

einwirken mußte, leuchtet von selbst ein; kein Forscher konnte die Erfahrungen seiner Vorgänger benützen, und nur durch den mündlichen Unterricht war die Mangelhaftigkeit der Schriften zu ersetzen. Die schnelle Entwickelung der griechischen Geometrie war durch das entgegengesetzte Verfahren hervorgerufen worden, und besonders war die Analyse eine Lehrmethode für alle, die sich mit diesen Dingen beschäftigen wollten. Hieraus ergibt sich nun aber, daß wir der indischen Mathematik einen langen Zeitraum für ihre Entwickelung zugestehen müssen, und daß sie auch nur von Zeit zu Zeit, in größeren Perioden, einen neuen Aufschwung nehmen konnte, je nach der Anregung, welche aus den öffentlichen und allgemeinen Verhältnissen in Indien hervorging.

Was die Geometrie betrifft, so haben wir gesehen, daß dieser Zweig der Mathematik in Indien gar nicht existirte; sie rechneten mit Linien, Flächen und Körpern, wie wir mit Zentnern, Pfunden und Lothen oder mit andern Dingen. Eigenschaften der räumlichen Größen wollten sie ebenso wenig finden, wie Eigenschaften der Zahlen; auch hier handelte es sich bloß darum, wie gewisse Dinge gefunden, d. h. berechnet werden konnten. Von den Parallellinien, von den Winkeln, der Congruenz und Aehnlichkeit der Figuren geschieht gar keine Erwähnung; sie entwickelten alle jene Hülfsmittel nicht, ohne welche eine Geometrie gar nicht gedacht werden kann. Auf diese Weise kam es nun, daß selbst da, wo eine Größenbestimmung nothwendig wurde, ihnen oft die Mittel ausgingen; wenn der Fall noch etwas anderes, als die Regel der drei Glieder und den pythagoräischen Satz verlangte, dann griffen sie zu empirischen Formeln, welche meistens nur eine geringe Annäherung gaben. Dennoch müssen wir dieser Art Geometrie ein hohes Alter zugestehen, sie ist die Urgeometrie, wie sie aus den Bedürfnissen der Menschen überall da erwachsen ist, wo sie zu einer höhern Kultur gelangten; aber viel weiter entwickelt haben sie die Inder nicht aus Gründen, welche schon früher angegeben worden sind. Dasselbe Verhältniß müssen wir für die Trigonometrie annehmen, welche wir von dieser Geometrie nicht trennen können; beider Grundlage und Charakter war ganz gleich. Die Trigonometrie, wie wir sie kennen gelernt haben, trögt ganz das Wesen der Ursprünglichkeit an sich; ihre Einfachheit und Unvollkommenheit zeigt, daß sie nicht weiter ausgebildet worden ist. Für die Inder war jedoch das, was sie hatten, hinreichend, und für sie kein Grund zu einer weitern Ausbildung vorhanden. In der Anwendung auf das Leben genügte das Vorhandene, und ihre Astronomie, obschon sehr alt, blieb immer in einem Zustande von Unvollkommenheit, da sie weniger kultivirt wurde, um die Erscheinungen genau kennen zu lernen, als zu astrologischen Zwecken. Wir sehen hier wieder, in welchem Zusammenhange der ganze Ideenkreis eines Volkes mit der Entwickelung seiner wissenschaftlichen Bestrebungen steht; die Gründe, welche in Griechenland die Naturwissenschaften hervorriefen, und der arithmetischen Richtung Eingang verschafften, die dann wieder die wissenschaftliche Astronomie möglich machte, fehlten in Indien gänzlich, und ihre Beharrung in derselben Richtung führte den gänzlichen Verfall aller Wissenschaften herbei.

Wir kommen an eine andere Aufgabe, die Bestimmung des Alters der indischen Mathematik, welche bei den vorhandenen Hülfsmitteln aber nicht genügend gelöst werden kann. Der älteste Mathematiker, von dem bestimmte Leistungen angeführt werden, ist bis jetzt Aryabhatta, der Verfasser eines Werkes in vier Kapiteln und 123 Versen Regeln. Seine Zeit wird sehr verschieden angegeben, europäische Forscher aber setzen ihn in das 4. oder 5. Jahrhundert n. Chr., entweder gleichzeitig oder 100 Jahre später als Diophantus; doch weichen die einheimischen Angaben hierüber sehr von einander ab. Das nächste

uns bekannte Werk ist das von Brahmegupta um's Jahr 628; das Alter der Surya Siddhanta ist aus astronomischen Gründen in das 11. Jahrhundert verlegt worden und Bhaskara hat um 1150 geschrieben. Alle diese Werke haben nun kein hohes Alter und können mit den griechischen in dieser Beziehung nicht verglichen werden. Wenn man also über das Alter der indischen Mathematik Betrachtungen anstellen will, so kann man von diesen spärlichen und späten Quellen sicherlich nicht allein ausgehen und ist nun genöthigt, die ganze Entwickelung und eigenthümliche Richtung des Volkes mit hinein zu ziehen, und aus dem Inhalte seiner Produktionen auf die Zeit ihrer Entfaltung zu schließen. Nur so wird es möglich, Irrthümer zu verhüten, die hier nur allzu häufig sind, indem die einzelnen Forscher auf diesem Gebiete fast immer dem Volke alle Erfindungen zuzuweisen sich bemühen, welchem sie ihren Fleiß und ihre Studien zugewendet haben, unbekümmert darum, ob dieselben seinem Wesen entsprechen oder nicht. Eine Vergleichung der Werke, welche zum Vorhergehenden den Stoff geliefert haben, ist hier vor allen Dingen nothwendig.

Das jüngste Werk überliefert uns bloß die frühere Wissenschaft, und Bhaskara sagt ausdrücklich, daß er Compilator sei; wir erfahren von ihm zugleich, daß viele Personen sich mit mathematischen Dingen befaßt hatten, und ihre Arbeiten, welche seinem Buche zu Grunde lagen, müssen in Ansehen gestanden haben. Aber die Vorgänger Bhaskara's werden gleichfalls nicht als Erfinder genannt, und namentlich ist zwischen Brahmegupta und Bhaskara kein so großer Unterschied in Bezug auf die behandelten Gegenstände. Nur Aryabhatta wird als Erfinder gewisser Regeln genannt, von andern Dingen aber auch bloß angeführt, daß sie von ihm herkommen, oder vielmehr, ihm schon bekannt gewesen seien. Eine Vergleichung beider vorliegenden Werke gestattet uns einen Schluß auf das Verhältniß der Arbeit Bhaskara's zu ihren Quellen. Wie einst Diophantus, so behandelten auch die früheren indischen Mathematiker eine Menge von einzelnen Aufgaben, theils nach bestimmten Regeln, theils in besonderer Weise, und hier war es nun, wo sie ihren Scharfsinn zeigen konnten; es scheint auch, wie später in Europa, Mode gewesen zu sein, sich gegenseitig Aufgaben zur Auflösung vorzulegen. Dieser Ueberfluß von Aufgaben wurde nun von Bhaskara beschnitten, die Regeln waren für ihn schon Hauptsache, und er fügte nur so viele Aufgaben zu, als zur Anwendung und Erklärung der Regeln nöthig waren. Daher mag es wohl kommen, daß er sein Werk für einen Auszug und eine gedrängte Darstellung der Arbeiten seiner Vorgänger ausgibt: diese haben sicher auch nicht eine bedeutende Regel mehr enthalten, oder gar noch einen neuen Gegenstand, welchen er nicht hätte, behandelt. Was ihn noch vortheilhaft auszeichnet, ist, daß ein großer Theil seines Werkes in Prosa geschrieben ist, wodurch eine viel größere Deutlichkeit als bei seinen Vorgängern hervorgerufen worden ist. Wir finden aber bei Bhaskara Manches, was Brahmegupta noch nicht hat, und was uns deutlich zeigt, daß unterdessen fremde Elemente in die indische Mathematik eingedrungen waren. Zum ersten Male finden wir jetzt das archimedische Verhältniß des Kreises zum Durchmesser, wie 22 : 7 und das genauere indische 3927 : 1250, zugleich die Art der Berechnung desselben durch Halbirung der Seiten des Sechseckes bis zum Dreihundertvierundachtzigeck, ebenso die Angabe der Seiten aller regulären Vielecke vom Dreiecke bis zum Zehnecke, wahrscheinlich durch trigonometrische Rechnungen gefunden, was auf einen schon mehr entwickelten Zustand dieses Zweiges schließen läßt. In der That zeigt sich auch, daß Bhaskara die Formeln für sin. $(a \pm b)$, so wie für cos. $(a \pm b)$ gekannt und wahrscheinlich benutzt hat, und leicht dürfte sich bei weiterer Untersuchung

in der Folge ergeben, daß auch andere Dinge Aufnahme gefunden hatten. Faßt man Alles zusammen, so ergibt sich, daß, mit Ausnahme dieses nachweislich Fremden, die Mathematik von Brahmegupta bis Bhaskara keine wesentlichen Fortschritte gemacht hat und daß wir bis auf Aryabhatta zurückgehen müssen, um auf einen Gelehrten zu kommen, welcher die Wissenschaft gefördert hat. Aber auch dieses Verhältniß ist noch keineswegs festgestellt und weder die Zeit, noch die Leistungen Aryabhatta's sind sicher; die späteren Auctoren beziehen sich auf ihn, weil er, ganz ähnlich wie bei Euklid, höchst wahrscheinlich der Sammler und Ordner der früheren zerstreuten Sätze war, welche er zu einem Ganzen verarbeitete und dadurch seine Vorgänger vergessen machte. Dem indischen Gelehrten, versunken in seine Betrachtungen, Speculationen und Phantasien über die höchsten Dinge, mangelte gänzlich der Sinn für Zeit- und Ortsbestimmung; Chronologie und Geographie lagen ebenso im Argen, wie die politische Geschichte. Zur Zeit Aryabhatta's mag also wohl, der Hauptsache nach, die indische Arithmetik abgeschlossen gewesen sein, wie denn namentlich die Auflösung der unbestimmten Gleichungen in ganzen Zahlen schon bekannt war. Hiernach dürften wir die Zeit ihrer Blüthe in den Anfang unserer Zeitrechnung setzen, wo die geistige Regung in Indien überhaupt noch auf ihrer Höhe stand, dazu stimmt auch, daß schon 87 v. Chr. sich Sternwarten nachweisen lassen und in der zweiten Hälfte des ersten Jahrhunderts der König Salivaganam die Astronomie sehr ermunterte. Mit dieser Wissenschaft oder vielmehr mit der Astrologie standen aber einige Theile der Arithmetik im innigsten Zusammenhange, z. B. eben die unbestimmten Gleichungen. Die Beschäftigung mit den Zahlen war überhaupt dem Osten Asiens eigenthümlich, und man fand in Indien die verschiedenartigsten Weisen ihrer Darstellung im großartigsten Maße schon vor unserer Zeitrechnung. Das Decimalsystem wurde zwar größtentheils, aber nicht ausschließlich angewandt; neben den Ziffern mit Stellenwerth bestand eine ebenso ausgedehnte Bezeichnung durch Buchstaben, wenn auch aus besonderer Veranlassung und nicht zum wissenschaftlichen Gebrauche. Zuletzt gab es wohl kein Volk der Erde, welches der symbolischen Zahlenbezeichnung eine so große Ausdehnung gegeben hat wie das indische. Hält man nun den gewiß richtigen Grundsatz fest, daß jede Wissenschaft eine natürliche und stufenweise Entwickelung gehabt haben muß, und nicht mit einem Male gleichsam dem Boden entwachsen sein kann, so können wir unter Berücksichtigung der Verhältnisse, wie sie in Griechenland unter den günstigsten Umständen stattgefunden haben, die Entstehung der indischen Arithmetik wenigstens nicht später als die der griechischen Geometrie setzen. Diese wurde nun in der eigenthümlichen Weise, wie wir sie kennen gelernt haben, fortgebildet, und erreichte ihren Höhepunkt, als nach den großen Kämpfen gegen den Buddhismus eine Zeit der Ruhe eingetreten war. Mit dieser Arithmetik ist zugleich eine Anwendung, wie auf andere Dinge, so auf die Raumgrößen erwachsen, welche, zunächst aus Bedürfnissen des Lebens und besonders aus der Astrologie hervorgegangen, bei dem mangelnden Sinne der Inder für die Auffassung der Form, aber nie zu einer eigenthümlichen Geometrie, im Sinne der Griechen, sich erheben konnte. Mit dieser Art Geometrie war von vorne herein ihrer Natur nach die Trigonometrie verbunden, beide machten zusammen nur ein Ganzes aus, auf derselben Grundlage, der Rechnung, ruhend. Während die Arithmetik im Laufe der Zeit bedeutende Fortschritte machte, blieb die Geometrie auf dem Punkte des ersten Bedürfnisses zurück und schon ihrem Inhalte nach frei von jedem fremden Einflusse bis zum 9. oder 10. Jahrhundert, wo durch die Araber Verschiedenes aus der griechischen Geometrie nach ihrer Verarbeitung eingeführt wurde.

Aber auch hier fand nur das Aufnahme, was sich auf das Metrische bezog, einzelne Sätze aus Archimedes und Ptolemäus. Einen Haupteinfluß der griechischen Geometrie, selbst in der veränderten Form, wie sie durch die Araber nach Indien gekommen sein mag, müssen wir aber noch anerkennen, nämlich den auf die Darstellung, wie er bei Bhaskara entschieden sich zeigt. Von jetzt an zeigen sich die Bemühungen, im Ausdrucke klar zu sein, den Vorschriften Erklärungen beizufügen, ja selbst Beweise zu versuchen, was in den älteren Werken unerhört ist.

Es ist schon früher die Eigenthümlichkeit der indischen Schriftsteller angegeben worden, an den Quellen, welche sie benützten oder an der Grundlage, von der sie ausgingen, nichts zu ändern und selbst anerkannt falsche Vorschriften wiederzugeben, jedoch ihre Bemerkungen und bessere Regeln beizufügen. Von dieser Seite müssen wir z. B. die Surya Siddhanta betrachten, sie ist sicher ein überarbeitetes früheres Werk, in welchem natürlich die älteren astronomischen Angaben durch neue aus der Zeit ihrer Bearbeitung ersetzt wurden, während die mathematischen Dinge unverändert blieben; denn wären ganz andere Grundsätze bei ihnen angenommen worden, so hätte der Verfasser sicher gesagt: die Alten haben es so gemacht, ich aber will es jetzt auf die folgende Art machen. Die Einrichtung und der Gebrauch der Sinustafeln sind sicher aus alter Zeit; die Inder haben nie mit ganzen Sehnen wie Ptolemäus gerechnet, aber die Tafeln selbst haben eine Verbesserung erfahren, indem bei ihnen statt des früheren Verhältnisses $\sqrt{10}$ das neue 3927 : 1250 zu Grunde gelegt wurde, während andere, weniger wichtige Angaben nicht verbessert und darin $\sqrt{10}$ festgehalten wurde.

Wir werden von Jugend auf so daran gewöhnt, Alles auf die Griechen zurückzuführen, daß, wenn wir bei andern Völkern etwas Beachtenswerthes finden, wir gleich geneigt sind, dazu in Griechenland die Quellen zu suchen; umgekehrt weisen wir aber jeden Einfluß des Auslandes auf die Griechen zurück und sehen sie nur als die alleinigen Urheber von Allem an, was je die Menschen Großes geleistet haben. Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, wie falsch diese Ansicht ist, wie aus einer homogenen Masse nie etwas Höheres hervorgehen kann, daß dazu die Einwirkung entgegengesetzter Elemente erfordert wird und die Menschen schon durch einen natürlichen Instinkt in diesen Kampf widerstreitender Ansichten hineingetrieben werden. Es sind diese verschiedenen Elemente mit den ihnen eigenthümlichen Richtungen überall nachgewiesen worden, und wie das Neue und Höhere aus ihren gegenseitigen Einwirkungen hervorgegangen ist. Eine solche Einwirkung hat nun unzweifelhaft auch zwischen Indien und Griechenland stattgefunden, obwohl anfänglich gewiß nicht unmittelbar, sondern über Babylon, und vielleicht noch wahrer, Babylon hat nach beiden Ländern seinen geistigen Einfluß ausgedehnt und Indien erst zur Zeit der alexandrinischen Schule den seinigen nach Aegypten. Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß hierunter nicht verstanden sein kann, es habe das eine Volk einen solchen wissenschaftlichen Zweig von dem andern entlehnt; es war hinreichend, wenn bekannt wurde, von welcher Art die Untersuchungen seien, womit ein anderes Volk sich beschäftigte, was nicht ausschließt, daß auch einzelne Sätze von dem einen Lande zu dem andern gedrungen sein können. Wenn solche Nachrichten sich wiederholten, so fanden sich endlich einige Individuen, die die Sache aufnahmen und auch in den Kreis ihrer Betrachtungen zogen; alsdann bildete sich mit der Zeit eine nationale Entwicklung des Gegenstandes, völlig verschieden von der, welche in seinem Heimathlande stattfand. So ist

die Anregung zur eigentlichen Geometrie den Griechen aus Aegypten, zur Arithmetik aus Babylon und zur rechnenden Geometrie aus Indien gekommen, und doch sind sie alle ächt griechisches Eigenthum, denn sie haben den Keim in ihrer Weise zum großen Nutzen und Frommen der Wissenschaft zur Entwicklung gebracht. Das gleiche Verhältniß fand auch in Indien statt; es fand zuerst vom Euphrat, dann von Griechenland her, ein Einfluß statt, welcher aber im letzten Falle zu spät kam, um noch bedeutende Wirkung zu äußern. Ueberhaupt ergibt sich, daß, so wenig die arithmetische Richtung in Griechenland zur vollen Entwicklung kam, eben so wenig dieß mit der geometrischen in Indien der Fall war; beide Richtungen mußten vielmehr erst in einer neuen Abtheilung des Menschengeschlechtes zusammenlaufen, welcher die Vermittler- und Trägerrolle zugetheilt wurde, und welche beide Richtungen gleichmäßig auffaßte und so der Nachwelt überlieferte. Vergleicht man zuletzt die Leistungen beider Völker, so haben sie zunächst in der Geometrie nichts mit einander gemein, aber die praktische Geometrie der Griechen mag Regeln aufzuweisen gehabt haben, wie sie die Inder hatten, und jene kümmerten sich eben so wenig darum, wie diese um die griechische Kurvenlehre. Dasselbe Verhältniß gilt auch für die Arithmetik; beider Weisen sind so sehr von einander verschieden, daß hier eben so wenig an eine Entlehnung gedacht werden kann. Zwei Ausnahmen haben wir kennen gelernt, Bhaskara und Diophantus. Beim ersten kann kein Zweifel sein, daß ihm griechische Sätze zugekommen waren; beim andern ist die Uebereinstimmung mit den indischen Mathematikern so groß, daß an eine unabhängige Entwicklung nicht gedacht werden kann; entweder Diophantus ist Urheber: dann ist die indische Arithmetik griechischen Ursprunges; oder haben die Inder selbstständig gearbeitet: dann hatte Diophantus indische Quellen, aber auf seine Weise benutzt. Nach den früher hierüber genau angegebenen Verhältnissen wird es nicht schwer sein, einzusehen, wohin die Wagschale sich neigt.

Noch eine Bemerkung ist in Bezug auf die Trigonometrie zu machen. Dieser Zweig ist, wie die Lehren von den unbestimmten Gleichungen, innig mit der indischen Astronomie verbunden; nun ist bekannt, daß die Chaldäer für die Griechen brauchbare Beobachtungen hatten, welche über 700 Jahre v. Chr. hinaufreichten, im Allgemeinen aber solche, welche viel älter waren. Die Chinesen haben Beobachtungen aufzuweisen; welche über 1000 Jahre v. Chr. reichen; die ägyptischen Beobachtungen dürfen wir nicht jünger setzen. Die Inder waren nun eben so begabt, wie irgend ein anderes Volk und warum sollten sie allein keine Astronomie gehabt haben? — Wir werden also wohl annehmen müssen, daß ihre Astronomie wenigstens nicht jünger sei als die anderer Völker. Wir sahen ferner bei den Indern eine Arithmetik entstehen, wie kein anderes Volk sie aufzuweisen hatte und damit zugleich eine Anwendung auf die Berechnung räumlicher Gebilde, die es uns sehr nahe legt, daß darunter auch die Senkrechten im Kreise begriffen gewesen sind. Hierauf weist uns zugleich ihr Ausdruck für den Radius des Kreises. Der Grieche bezeichnete mit seinem Diameter die größte Linie im Kreise, welche von einem Punkte des Umfangs nach einem andern gezogen werden konnte; dem Inder war aber der Radius schon ein Sinus und mit dem Kreise faßte er auch schon dieses Verhältniß zusammen. Daß nun die Geometrie und Trigonometrie in Indien keine besondere Entfaltung erlangt haben, spricht nicht gegen ihre frühe Entstehung und hat, wie wir gesehen haben, ganz andere Gründe. Bedenkt man nun, daß zur Zeit unserer indischen Auctoren ihre Arithmetik schon zum Stillstande gekommen war, ihre Blüthezeit daher um den Anfang unserer Zeitrechnung gesetzt werden muß, daß in Indien die günstigen Verhältnisse Griechenlands nicht

stattgefunden haben und eine so schnelle Entwickelung wie die der griechischen Geometrie daher nicht angenommen werden kann, so wird man nicht anstehen, wie oben angenommen worden ist, der indischen Arithmetik wenigstens das gleiche Alter mit der griechischen Geometrie zuzugestehen. Es ist hierbei noch ferner zu beachten, daß zur Zeit des Pythagoras bereits der Uebergang von der Rechenmaschine zum Zahlensysteme mit Stellenwerth, zum Columnensysteme, stattgefunden hatte und dieses schon den Chaldäern wahrscheinlich bekannt war. Dieß war schon ein bedeutender Fortschritt und setzt eine längere Entwicklung voraus; der Anfang könnte jedoch bei den Chaldäern zu suchen sein; dann müßten wir aber auch die Entwicklung dahin verlegen und dazu sind wir durch Nichts berechtiget. Die Chaldäer haben sich zwar der Rechnung bedient, doch ist es wahrscheinlich, daß ihre Untersuchungen mehr auf die Eigenschaften der Zahlen gerichtet waren, und diese in Beziehung zur Astrologie standen, welche überhaupt bei denselben ihre Quelle hat und erst von hier aus bei andern Völkern Eingang gefunden hat. Wenn solche Betrachtungen uns einerseits auf ein solches Alter der indischen Arithmetik und ihrer Anwendung auf die Geometrie führen müssen, so stehen diesem andrerseits einige andere Dinge entgegen.

Es ist ein vielfach hervortretendes Bestreben, den natürlichen Zusammenhang des geistigen Entwicklungsprozesses im Weltleben aufzuheben und ihn durch einen künstlichen, zu bestimmten Zwecken berechneten, zu ersetzen. Die verschiedenartigsten Mittel werden hierzu aufgeboten, das Ziel kann aber nie erreicht und die Widersprüche können nicht gehoben werden. Die allgemeinen Naturgesetze sind auch hier allein die wahren Gesetze und sie lehren uns, wie nur Gegensätzliches neugestaltend und bildend wirken kann, und Gleichartiges dem Beharrungsstande anheim fällt. Solche Gegensätze haben wir in den Griechen und Indern kennen gelernt; sie waren bestimmt auf einander zu wirken, und diese Einwirkung hat sicher stattgefunden, wenn wir sie auch nicht immer nachweisen können, so sind wir z. B. nicht im Stande zu zeigen, wie der Buddhismus an das Mittelmeer gelangt ist, aber die Thatsache ist da und kann nicht abgeläugnet werden. Das Gleiche hat nun zuerst in Bezug auf die Astrologie stattgefunden; die Chaldäer waren sicher hierin die Lehrer der Griechen wie der Inder, wie aber in vielen Dingen wußten die Griechen dieser Kunst eine Art wissenschaftlichen Halt zu geben und wirkten wieder auf Asien zurück, und seit dem Zuge Alexanders des Großen übten sie in dieser Beziehung ihren Einfluß, zunächst auf die Euphratländer aus. Unter allen Gegenständen war gerade dieser am meisten geeignet, eine schnelle und unbestrittene Aufnahme zu finden und verbreitete sich wahrscheinlich gegen den Anfang unserer Zeitrechnung auch nach Indien. Für diese Ansicht spricht, daß eine Reihe Benennungen, welche auf die Astrologie Bezug haben, in Indien offenbar griechischen Ursprungs sind und bei ihrem Uebergange theilweise nur eine geringe Veränderung erlitten haben. Sehr nahe liegt nun die weitere Annahme, daß hierbei zugleich auch die griechische Mathematik oder wenigstens Einzelnes davon nach Indien übergegangen sei. Dieses ist nun nicht allein wahrscheinlich, sondern es liegt auch im natürlichen Verlaufe der Dinge und es bleibt nur noch zu ermitteln übrig, was auf diese Art von der einen Seite zur andern gedrungen ist. Wenn Ideen zu einem Volke dringen, welche ihm fremd sind und nicht in seiner Richtung liegen, so weist es dieselben zuerst zurück; folgen aber die Impulse längere Zeit auf einander, so entsteht allmälig eine Bewegung in dieser Richtung und diese wird dann von dem Volke, welche sie aufgenommen, nach seiner Weise verändert und weiter geführt. So ist die Lehre vom wahren Sonnensystem zu verschiedenen Zeiten unter den Griechen aufgetaucht, aber immer zurückgewiesen und endlich durch das System

des Ptolemäus ersetzt worden; so konnte die arithmetische Richtung erst nach Jahrhunderten einen schwachen Halt gewinnen und nie zu einer eigentlichen Blüthe sich erheben. In Indien hat ein ganz ähnliches Verhältniß stattgefunden, und es ist die Frage, welchen Einfluß die griechische Geometrie geübt hat, denn von dieser allein kann nur die Rede sein. Wenn man hier denselben Maßstab anlegte, so würde man ebenfalls einen Zeitraum von mehreren Jahrhunderten zugeben müssen, um eine merkbare Wirkung zu erkennen, aber die indischen Verhältnisse waren ganz andere als die griechischen, und man sieht leicht ein, daß ein Brahmane selbst mit den Elementen Euklids nichts anzufangen gewußt hätte. Es ist früher angegeben worden, daß ein indischer Commentator zur Erklärung eines Satzes eine Figur zeichnete und sagte: „Siehe die Figur;" in diesen drei Worten liegt unendlich viel und die Erklärung des ganzen Räthsels. Was hätte ein Inder mit dem ganzen Apparate griechischer Gelehrsamkeit anfangen sollen! — Nicht allein die Sätze, sondern auch die ganze Art der Darstellung mußten ihm unbegreiflich erscheinen. Man denke sich nur den Satz: In jedem Dreiecke sind zwei Seiten zusammen größer als die dritte. Diesen Satz beweisen zu wollen, mußte dem Inder als die größte Lächerlichkeit erscheinen, und er konnte nur sagen: Wozu dieß alles, ich sehe ja, daß es so ist. Dergleichen Sätze, welche sich den Sinnen schon als wahr darstellen, haben wir viele. Wollte man der griechischen Mathematik Eingang bei den Indern verschaffen, so mußte man nicht erst ihren Sinn für die Geometrie wecken, man mußte mehr thun und ihre ganze Geistesrichtung verändern. Eine andere Beschaffenheit hatte es mit den Sätzen, welche das Metrische betrafen. Die archimedische Verhältnißzahl 22 : 7, oder, daß die Oberfläche der Kugel viermal so groß ist, als ein größter Kreis derselben u. dgl. m., fanden leicht Aufnahme; hier traf die Sache mit ihren eigenen Bestrebungen zusammen, und wenn wir solche schwierigere Sätze, deren Erfindung ihre Hülfsmittel überstiegen, in Indien finden, so mögen sie sehr wohl von den Griechen stammen. Wenn wir ferner annehmen, es sei die griechische Trigonometrie den Indern auch zugekommen, so konnte sie schon deßwegen keine Aufnahme finden, weil ihre Art, mit den halben Sehnen zu rechnen, viel einfacher und leichter war und bei weitem nicht so viele geometrische Kenntnisse voraussetzte. Des schönsten Zweiges der griechischen Geometrie, der Kurvenlehre, haben wir gar nicht erwähnt, weil sich bei den Indern auch nicht eine leise Andeutung davon findet, und er ihnen gewiß als etwas sehr Ueberflüssiges erscheinen mußte.

So werden wir denn wohl jedem Volke sein geistiges Eigenthum lassen müssen, dem Griechen die Geometrie, dem Inder die Arithmetik und wenn, bei vermehrten Hülfsmitteln zur Kenntniß des alten Indiens, dieser Darstellung ein Vorwurf gemacht werden kann, so dürfte es der sein, daß dabei ihre Leistungen etwas unterschätzt worden sind. Die Griechen sind in ihrem Zweige auf eine höhere Stufe gelangt, was nur der Entwicklung des reinen Denkens zugeschrieben werden muß; dieses hatte sich den Indern noch nicht erschlossen. Diese Richtung war jedoch schon von ihnen betreten, die weniger strengen Formen der Araber hatten leichter bei ihnen Aufnahme finden können. Die Europäer werden fortsetzen, was jene begonnen, und so wird auch diese große Abtheilung des Menschengeschlechtes in den geistigen Prozeß eintreten, welchen die Griechen begonnen haben.

Die Mathematik der Chinesen.

Von den Völkern der alten Welt mit selbstständiger Kultur haben wir noch den Hauptstamm der mongolischen Rasse, die Chinesen, zu betrachten. Dieses merkwürdige Volk leitet den Anfang aller seiner Künste und Wissenschaften von ihren Kaisern Fo-hi (2800 v. Chr.) und Yao (2600 oder 2400 v. Chr.) ab. Diese Kaiser werden daher auch als die ersten Mathematiker angesehen; wir erfahren aber natürlich nicht, von welcher Art ihre Erfindungen oder Kenntnisse waren. Wir haben früher gesehen, daß die Arier eine ähnliche Ueberlieferung hatten, und wie überhaupt bei den asiatischen Rassen alle Wissenschaften und alle Kultur als von Menschen ausgehend angesehen wurden, welche schon ihres Ursprunges wegen der Fortbildung fähig und das Eigenthum aller Menschen waren. Dieß verhinderte nicht, daß man solche alte Ueberlieferungen mit Ehrfurcht betrachtete, und die spätere Zeit hatte gleichfalls eine Reihe Sätze aus der früheren überkommen, welche, in Verse gefaßt, dem Gedächtnisse eingeprägt wurden. In China wurden solche Sätze aber auch sehr frühe schon geschrieben und sie waren Jedem zugänglich, der sich mit ihnen beschäftigen konnte oder wollte.

Erst in der neuesten Zeit sind uns sichere Nachrichten über die chinesische Mathematik zugekommen durch Uebersetzungen und Auszüge aus älteren Werken. Unter diesen ist nun eines, welches viele Jahrhunderte vor unserer Zeitrechnung abgefaßt und überhaupt das älteste Denkmal chinesischer Mathematik sein soll. Der Tcheu-pei oder Tcheu-pei-suan-king, das heilige Buch der Rechnung, besteht aus zwei Abschnitten, von welchen der erste offenbar der ältere ist und hier auch allein in Betrachtung kommen kann, da der zweite astronomischen Inhaltes ist. Dieser Abschnitt enthält ein Gespräch, welches der Kaiser Tcheu-kong mit einem Gelehrten seiner Zeit Chang-kao führte, um sich über die Wissenschaften der Kaiser Fo-hi und Yao besser zu unterrichten.

Ehemals fragte Tcheu-kong den Chang-kao und sagte zu ihm: Ich habe sagen hören, daß Chang-kao in den Wissenschaften der Zahlen erfahren ist; ich wünsche nun von ihm zu wissen, wie es einstens dem Fo-hi möglich war, den Himmel und die Erde zu erforschen. Der Himmel ist so weit und keine Stufen führen zu ihm und die Erde ist so groß, mit unsern Maßen messen wir sie nicht aus! — Möge er mir sagen, wie es um die Wissenschaft der Zahlen steht! — Chang-kao sagte: Die Wissenschaft der Zahlen kommt von dem Yuen (Kreise) und von dem Fong (Rechteck oder Quadrat), der Kreis kommt von dem Quadrat und das Quadrat von dem Kreise. Das Kuu (ein unbekanntes Instrument) kommt von 9 mal 9, welches 81 macht. — Theile das Kuu. — Mache die Breite gleich 3, die Länge gleich 4, die Linie, welche die Winkel verbindet, gleich 5. — Von dem Rechtecke, durch die Ecken, nehme die Hälfte: diese wird ein Kuu sein. — Verbinde die Punkte und berechne, und du wirst genau 3, 4 und 5 erhalten. — Die zwei Kuu zusammen machen eine Länge von 25, dieß ist, was man die Summe der Kuu nennt. — Die Wissenschaft, deren sich einst Yao bediente, die Erde zu ordnen, ist aus diesen Zahlen hervorgegangen. Tcheu-kong sagte: Es ist eine große Sache um die Zahlen. Ich möchte euch aber auch fragen über die Art das Kuu anzuwenden. — Chang-kao sagte: Das ebene Kuu dient, um den Horizont zu machen, das Yen-kuu, um Höhen zu messen, das Fo-kuu, die Tiefe zu erforschen, das Ngo-kuu, die Entfernungen zu bestimmen, das Hoan-kuu (kreisförmige Kuu), dient, um Kreise zu machen, das Ho-kuu (vereinigte Kuu), um Quadrate zu machen — Die

viereckige Figur entspricht der Erde, die runde Figur dem Himmel, der Himmel ist der Kreis, die Erde das Quadrat. — Die Berechnungen des Quadrates bilden die Grundlage, vom Quadrate kommt der Kreis. Durch einen Sonnenschirm kann der Himmel dargestellt werden. — Der Himmel ist blauschwarz, die Erde ist rothbraun. Um den Himmel zu berechnen, wende die Gestalt des Sonnenschirmes an. — Das Blauschwarz ist die äußere Bekleidung, das Rothbraun ist die innere Bekleidung. — Durch dieses stellt man die Einrichtung des Himmels und der Erde vor. — Also, wer die Erde kennt, hat die Wissenschaft, wer den Himmel kennt, hat die höchste Wissenschaft. — Das Wissen kommt vom rechtwinkeligen Dreieck, das rechtwinkelige Dreieck kommt von dem Kun. Das Kun, wenn es verbunden wird mit den Zahlen, dieß ist es, welches ordnet und alle Dinge leitet. — Tcheu-kong sagte: Dieß ist bewunderuswürdig! —

Dieses Gespräch kann wohl einen richtigen Begriff geben von dem Zustande der Mathematik in China vor jetzt beinahe 3000 Jahren, das kindlich Wichtige und Unbedeutende läßt uns auch an der Aechtheit und dem Alter nicht zweifeln. Wir lernen aber daraus so viel, daß sie ein Instrument zum Messen hatten, welches je nach seiner verschiedenen Anwendung auch verschiedentlich gestaltet war, obschon der Grundlage nach immer dasselbe. Es wird schwer halten, aus der Beschreibung dasselbe richtig zu erkennen; um Höhen zu messen, konnte man z. B. ein rechtwinkeliges Dreieck gebrauchen mit verschiebbarer Hypotenuse und getheilten Seiten; wurde die Basis horizontal, also die Senkrechte vertikal gestellt, so konnte die Hypotenuse in die Lage nach der Spitze des Gegenstandes gebracht werden; war man nun noch im Stande, vom Beobachtungsorte aus bis zum Fuße des Gegenstandes zu messen, so hatte man die nöthigen Größen, um nach der Regel der drei Glieder die Höhe zu berechnen. Nur in ähnlicher Weise können wir uns die Verfahrungsarten der Chinesen denken und sehen aus dem Obigen, daß ihnen die Hülfsmittel der Inder, der pythagoräische Satz und die Aehnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke, welche einen Winkel gemeinschaftlich haben, bekannt waren. Wir erfahren daraus ferner, daß die Chinesen in dieser Zeit schon eine Art Feldmeßkunst kannten, daß sie Höhen und Tiefen und Entfernungen zu messen und zu berechnen verstanden. Sie wußten aber auch ihre Meßkunst auf die Astronomie anzuwenden, und um das Jahr 1100 v. Chr. beobachteten sie in der heutigen Stadt Hono-fu an einem Gnomon von 8 chinesischen Fußen Höhe den Schatten des Sommersolstitiums zu $1\frac{1}{2}'$ und den des Wintersolstitiums zu 13′ Länge. Diese Beobachtung gibt ziemlich genau die Schiefe der Ekliptik um das Jahr 1100 und die Polhöhe von Hono-fu. Aus dem Wenigen, was wir auf diese Weise erfahren haben, ergibt sich aber auch schon, daß die Chinesen eben so wenig wie die Inder eine Geometrie kannten und diese bloß in einer Anwendung der Rechnung auf räumliche Größen bestand. Es würde sehr interessant sein, verfolgen zu können, wie die Mathematik in China sich von hier aus weiter entwickelt hat, aber es fehlen uns alle Nachrichten über einen Zeitraum von vielleicht mehr als 2000 Jahren.

Von einem neueren Werke befinden sich in Paris drei übereinstimmende Manuscripte, wovon das eine vom Jahre 1593 ist, es hat den Titel Suan-fa-tong-tsong oder vollständige Abhandlung über die Kunst zu rechnen. Die Grundlage desselben soll ein anderes und älteres Werk sein: Kieu-tchang oder die neun Kapitel. Der Verfasser führt noch andere Werke an, aus welchen er geschöpft haben will, so daß das Ganze als eine Art Sammlung und Zusammenstellung des früher schon Vorhandenen erscheint, in ähnlicher Art wie das Werk des Bhaskara. Das Buch besteht aus zwölf Abschnitten, in welchen der Stoff ziemlich planlos vertheilt ist; der wesentliche Inhalt ist folgender. Zuerst

wird von den Zahlen und den Zahlzeichen gesprochen, die letzteren sind zweierlei Art, für die Wissenschaft und für das gewöhnliche Leben; die großen Zahlzeichen dienen für die ganzen Zahlen, die kleinen sind die Decimalen. Nun folgt eine Auseinandersetzung der Maße, Gewichte und Münzen und deren Eintheilung; hierauf werden die Regeln für die Multiplikation und Division mitgetheilt und die letztere auch auf die Decimalen angewandt. Die nächsten Regeln betreffen die Rechnungen mit Brüchen, die Proportionen, das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln. Diese Gegenstände nehmen die beiden ersten Abschnitte ein. Die drei folgenden Abschnitte behandeln ganz durcheinander verschiedene Rechnungen für das Geschäftsleben, das Ausmessen der Felder, Inhaltsbestimmungen verschiedener Räume, Berechnung des Kreises aus dem Verhältniß von 22 : 7. Der sechste Abschnitt enthält sehr viele heterogene Materien. Zahlendreieck zur Bildung der Binomialcoefficienten. Zerlegung eines Quadrates, wenn die Seite aus 2 oder 3 Theilen besteht oder Erhebung eines Binomiums und eines Trinomiums zur zweiten Potenz. Gleichungen des 2ten Grades, Auflösung durch Versuche und directe Auflösung. Polygonalzahlen. Berechnung des Kreisinhaltes. Berechnung der Diagonale des Quadrates, des Durchmessers des Kreises. Verschiedene geometrische Aufgaben. Annähernde Berechnung des Inhaltes der Kugel. Gleichungen vom 3ten Grade, versuchsweise Auflösung. Zerlegung eines Kubus, dessen Seite aus zwei Theilen besteht, oder Bildung der dritten Potenz einer zweitheiligen Größe. Theilung der Felder. Von den Proportionallinien. Berechnung von ring- und kreisförmigen Feldern und von Kreisabschnitten. Der siebente Abschnitt enthält die Berechnung von Mauern und Gruben, die Pyramidalzahlen und die genaue Summirung arithmetischer Reihen. Der achte Abschnitt behandelt die Auflösung von Aufgaben, welche auf Gleichungen mit einer Unbekannten führen und Aufgaben über das rechtwinkelige Dreieck, so wie einige Konstruktionen. Nun folgen Aufgaben über Höhenberechnungen, Bestimmung unzugänglicher Entfernungen und dergl. m.; die gesuchten Größen folgen meist aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, die Methoden sind sehr oft unvollkommen oder nur annähernd. Die folgenden Abschnitte enthalten nichts wesentlich Neues; nur der 12te wird angegeben, als Gegenstände enthaltend, welche den Chinesen aus der Fremde zugekommen seien, z. B. die Rechnungen nach den Methoden der Araber oder vielmehr der Inder und Aufgaben über das rechtwinkelige Dreieck. Es ist Schade, daß das ganze Werk mit seinen Auflösungen und Methoden nicht bekannt ist; es würden sich wahrscheinlich noch manche interessante Aufschlüsse daraus ergeben.

Nach dem 12ten Abschnitte zu urtheilen, würden also die Chinesen den Inhalt aller früheren sich selbst zuschreiben und als ihre eigene Erfindung ansehen. Der Stoff zeigt uns aber nur zu klar, aus welchen Quellen er geflossen ist. Der Einfluß der Buddhisten auf das übrige Asien, besonders aber nach Osten, begann schon vor unserer Zeitrechnung, wandte sich aber mit ihrer Vertreibung aus Indien hauptsächlich dieser Richtung zu. In Tübet und China fanden sie günstige Aufnahme und brachten nun mit ihrer Religion auch die Wissenschaften Indiens mit. Die spätere chinesische Mathematik trägt zu sehr die Spuren ihrer Herkunft, als daß sie abgeläugnet werden könnte. Was die Chinesen bis dahin etwa selbst erzeugt haben mochten, war durch die verwandte Richtung völlig verwischt worden und konnte ihnen um so mehr als ihr eigenes Erzeugniß gelten. Aber auch durch die Araber kamen noch bedeutende Zusätze aus der griechischen Mathematik, die, obschon durch sie verändert, doch ihren Ursprung noch erkennen lassen. —

Die Mathematik der Araber.

Die Darstellung der Hauptbildungskreise der alten Welt hat uns von dem Schauplatze des ersten Verbindungsprozesses der beiden Kulturrassen entfernt, die nächsten Betrachtungen führen uns aber unmittelbar wieder dahin zurück. Wenn in den frühesten Zeiten von den Euphratländern Anregungen ausgegangen sind, so strömten diese später wieder dahin zurück. Die griechischen Staaten hatten bei ihrem raschen Aufblühen auf Kleinasien bereits einen mächtigen Einfluß ausgeübt, als Alexander durch seine Eroberungen einen großen Theil Asiens in eine griechische Provinz verwandelte. Obschon nun das große Reich mit Alexanders Tode wieder verfiel und auch das Reich der Seleukiden nur von kurzer Dauer war, so hatten doch die nach allen Seiten hin sich verbreitenden Griechen eine wesentliche Veränderung in allen Verhältnissen hervorgerufen. Im Osten Persiens hatte sich ein griechisches Reich gebildet, welches vom alten Baktrien bis nach Indien sich ausdehnte, und wenn es auch schon 134 v. Chr. den Scythen unterliegen mußte, so hatte die griechische Kultur doch schon so sehr Wurzel gefaßt, daß sie nothwendig theilweise auf die Eroberer übergehen mußte. Beinahe gleichzeitig mit dem baktrischen Reiche entstand das parthische und dehnte sich eben so vom Euphrat über den westlichen Theil Persiens bis nach Indien hin aus, und bei seiner langen Dauer (229 n. Chr.), und der geringen Kultur der Parthen sollte man allerdings glauben, daß nicht nur der griechische Einfluß, sondern auch selbst die frühere Kultur vernichtet worden wäre. Dieß scheint aber doch nicht so sehr der Fall gewesen zu sein, als man es gewöhnlich anzunehmen pflegt. Diese Provinzen waren die am wenigsten bevölkerten, zum Theil sehr unfruchtbar, und hatten auch früher nur nomadisirende Stämme ernährt, und die reicheren Gegenden mit fester Bevölkerung mußten schon des eigenen Bedürfnisses wegen geschont werden. Die Römer, welche den Griechen folgten, wirkten nur günstig, indem sie mit ihrer Macht wenigstens einer gewaltsamen Ausrottung aller Kultur zu widerstehen vermochten.

Durch die Vermischung mit fremden Stämmen war dieser großen Bevölkerung eine Art Erneuerung oder Erfrischung geworden, und während die fremden Elemente hierbei verfielen, gewannen die einheimischen neue Kräfte. Die griechische Kultur in ihrer ganzen Reinheit auf den Boden Asiens zu verpflanzen, würde eine Unmöglichkeit gewesen sein; der Asiate war eben so wenig fähig, den Begriff der griechischen Freiheit festzuhalten, als das geistige Wesen der griechischen Mathematik aufzufassen. Was aber die Griechen zur Förderung des materiellen Lebens geschaffen hatten, konnte ungehindert Eingang finden, daher auch ein Theil der Naturwissenschaften, in so ferne diese darauf Bezug hatten. Die griechische Mathematik und die höheren Theile der Naturwissenschaften erlitten aber eine wesentliche Veränderung und wurden ihres geistigen Gehaltes entkleidet. Wir kennen leider von diesen Zuständen nur wenig, aber was uns bekannt geworden ist, deutet auf eine hohe Entwickelung der Lebenskultur; Handel, Gewerbe und Landwirthschaft standen wahrscheinlich höher als jemals. Wenn das griechische Element vermocht hätte, nachhaltiger zu wirken, so würde mit der Zeit ein günstigeres Resultat erzielt worden sein; es löste sich aber in der Regel schon nach wenig Generationen im orientalischen auf. Daß überhaupt so viel erreicht worden ist, als wir wahrnehmen, hat darin seinen Grund, daß lange Zeit hindurch den früheren Einwanderern immer neue nachfolgten.

Die Völkerschaften Arabiens hatten seit vielen Jahrhunderten schon aufgehört, einen bedeutenden Einfluß auf die Geschicke ihrer nördlichen Nachbarn auszuüben, und nur die Raubzüge streifender Beduinenhorden mögen von Zeit zu Zeit Schrecken in die friedlichen Wohnungen der Anwohner der Wüste gebracht haben. Die große Halbinsel wurde von zwei verwandten, aber doch physisch und geistig verschiedenen Stämmen bewohnt, die auch schon durch ihre Sprache sich schieden. Im ganzen Süden waren die Joktaniden verbreitet, die ihre Herkunft von Joktan herleiten. Joktan und Peleg waren Söhne Ebers, des Nachkommen Sems und von Peleg stammte Abraham. Dieser Theil Arabiens war aber ein altes Kulturland, hier befand sich das Reich der Himjariten, und noch jetzt finden sich zahlreiche Spuren der ehemaligen Kultur. Die Joktaniden hatten auch feste Wohnsitze angenommen und trieben Gewerbe und Ackerbau; zur Bewässerung ihrer Felder hatten sie in einem Thale einen Damm angelegt und dadurch dasselbe geschlossen, dann verschiedene Bäche hineingeleitet und es so in einen großen Wasserbehälter verwandelt, von welchem aus in Kanälen das Wasser dahin geleitet wurde, wo es nöthig war. Die Mauern und Dämme wurden nun von der Gewalt des Wassers, oder durch ein anderes Ereigniß, einst durchbrochen (170—150 v. Chr.) und dadurch das Land wieder in eine Wüste verwandelt, wodurch ein Theil der Joktaniden zur Auswanderung veranlaßt wurde. Hierbei trennten sie sich jedoch; ein Theil zog nach dem Euphrat und gründete dort das Königreich Hira; ein anderer wandte sich nach Syrien und stiftete im Süden von Damaskus das Reich der Gassaniden; der dritte Theil endlich setzte sich bei Mekka fest und kam später in den Besitz dieser Stadt. Der zweite arabische Stamm hatte das übrige Arabien inne, er hatte sich niemals eine höhere Kultur angeeignet, und schon durch die Beschaffenheit des Landes war er auf das Nomadenleben angewiesen. Abraham hatte von seiner Magd Hagar, der Aegyptierin, einen Sohn, Ismael, und dieser wird als der Ahnherr dieses zweiten Stammes der Araber angesehen und nach ihm wurden sie Ismaeliten genannt.

Die Joktaniden waren also zuerst in Berührung mit den nördlichen Staaten gekommen, und schon von vorne herein zu einer höheren Kultur geneigt, mußten sie auch bald in die allgemeine Bewegung mit hineingezogen werden. Dieß konnte um so eher stattfinden, als die neue Kultur schon verändert und mehr ihrer eigenen geistigen Richtung angemessen war. Die folgenden Ereignisse waren wieder einer ausgedehnten Kulturentwicklung günstig. Dem Partherreiche folgte das neupersische (229), und das byzantinische Reich ersetzte die Römer in Asien. Wenn nun auch der Verfall der Wissenschaften, aus nahe liegenden Gründen, immer größer werden mußte, so verbreitete sich doch der Rest über einen immer größeren Raum, und was die ausgezeichnetsten Denker der griechischen Welt erzeugt hatten, fand, wenn auch in veränderter Form, eine weithin gehende Ausdehnung. Diese Verhältnisse, anscheinend so ungünstig, hatten doch sehr ihr Gutes, sie erzeugten einen Anfang des abstrakten Denkens in diesen Ländern und befähigten die Menschen die unverändert erhaltenen Geisteswerke der Griechen später verstehen zu lernen, um sie weiter führen zu können. Ganz ähnliche Ausflüsse müssen wir uns von Indien ausgegangen denken; sie betrafen früher Gegenstände, welche unserer Darstellung ferne liegen, später aber, besonders über das neupersische Reich, drang auch ihre Mathematik über den Euphrat vor. Viele Jahrhunderte hindurch hatte dieser Prozeß gedauert mit abnehmenden Kräften, und er würde endlich ganz erloschen sein, wenn nicht, durch neue Ereignisse, mit einem Male auch neue Lebenskräfte ihm erwachsen wären.

Von dem ismaelitischen Stamme des arabischen Volkes ging eine bedeutungsvolle Bewegung aus, welche eine große Wohlthat für die Menschheit geworden ist, einmal dadurch, daß sie zu einer andern Richtung einen Gegensatz bildete und ihre volle Entwicklung hemmte, und dann, daß sie viele Millionen in den Kreis ihrer Bildung hineinzog, und zuletzt, daß sie die Trägerin und die Vermittlerin zweier Kulturen wurde, welche durch sie den Abendländern überliefert wurden. — Auch die Horden der Beduinen waren von den großen Ideen der Zeit nicht unberührt geblieben, auch in die Wüsten Arabiens waren die verschiedenen Glaubenskreise eingedrungen und hatten sich neben den einheimischen Naturdienst gestellt; die Geister waren erwacht, das Nachdenken angeregt, und Mahommed aus dem Stamme Ismaels war es gelungen, seine Stammesgenossen für neue Religionsideen zu begeistern, die zur asectischen Richtung, welche die christliche Kirche angenommen hatte, einen strengen Gegensatz bildeten. Diese Glaubenskreise, welche nicht mehr unmittelbar an die Natur anknüpfen und aus früheren, ihrem Wesen nach unverstandenen Glaubenskreisen hervorgegangen sind, liegen außer dem Bereiche unserer Beleuchtungen und können nur noch in Bezug auf ihre Einwirkung auf die Wissenschaften Erwähnung finden. Bekannt ist die Art der Verbreitung des Islam und wie in kurzer Zeit das Reich der Khalifen eine ungeheure Ausdehnung erhielt, weniger durch die Macht und Tapferkeit der Araber, als durch die Versunkenheit der eroberten Staaten und Provinzen. Zugleich wuchsen aber auch die Anführer der Horden immer mehr zum geistlichen und weltlichen Oberhaupte heran, und bald war das einfache patriarchalische Verhältniß in den orientalischen Despotismus ausgeartet. Die unterworfenen, meist reichen und bevölkerten Länder machten nun den Haupttheil des Reiches aus, ihre Bewohner hatten nur ein neues Element aufgenommen und erhoben sich wieder unter einer kräftigen Regierung. Eben so die alte Kultur bei einer dafür empfänglichen Bevölkerung; die alten Verhältnisse kehrten bald zurück, die neue Regierung bedurfte fähiger Männer, die Geschäfte des Staates zu leiten, und dazu konnte man gewiß die Beduinen nicht gebrauchen, die wohl gut im Felde waren, aber sicher eine traurige Rolle in der Verwaltung gespielt haben würden. Schon unter Muavia I. (661) war die Einfachheit der ersten Khalifen verschwunden; er hatte seine Residenz in Damaskus aufgeschlagen und hier machte sich, in der Nähe des griechischen Reiches, auch schon der griechische Einfluß geltend. Der erste religiöse Fanatismus war schon erloschen und der neue Staat scheute sich nicht, tüchtige Geschäftsmänner, Gelehrte und Künstler, so wie er deren bedurfte, von seinen Nachbarn zu nehmen, um durch sie seine Einrichtungen zu gründen und zu befestigen. Diese Einrichtungen betrafen jedoch nur die eroberten Länder, das eigentliche Arabien blieb in seiner alten Verfassung. Wir finden hier ähnliche Verhältnisse, wie sie auch durch die Germanen herbeigeführt wurden, als diese die Provinzen des römischen Reiches einnahmen. Unter den Ommiaden konnte das Reich noch zu keiner eigentlichen Blüthe gelangen, aber schon unter dem zweiten Khalifen aus dem Hause der Abbasiden traten wissenschaftliche Bestrebungen hervor. Abu-Giafar-Almanzor (753—774) ließ Bagdad erbauen und verlegte dahin seine Residenz, in die Nähe des ehemaligen persischen Staates. Aber über Persien waren die Araber auch mit Indien in Verbindung gekommen und der persische Einfluß machte sich jetzt an dem Hofe der Khalifen geltend. So war an den Hof Almanzor's nach Bagdad ein indischer Astronom gekommen und hatte astronomische Tafeln mitgebracht, welche auf Befehl des Fürsten von Muhammed ben Ibrahim Alfazari ins Arabische übersetzt wurden. Diese Tafeln, bei den Arabern allgemein unter dem Namen der großen S i n d h i n d bekannt, waren wahrscheinlich aus der Brahma-

Siddhanta und der Bearbeitung derselben durch Brahmegupta gezogen und standen in großem Ansehen. Sie sind nun noch besonders dadurch wichtig, daß sie eine Sinustafel enthielten, wie wir sie aus der Surya Siddhanta kennen gelernt haben. Wer nun die Geschichte der Araber kennt, wird leicht begreifen, daß sie bis zur Regierung der Abbasiden, sich wenig oder gar nicht mit der Astronomie beschäftiget haben können, viel weniger, daß sie im Stande gewesen wären, eine so wesentliche Aenderung in der Trigonometrie des Ptolemäus, vorausgesetzt daß dieser ihnen schon bekannt gewesen, hervorzubringen. Eine solche Aenderung würde eine Bekanntschaft mit dem Gegenstande erfordert haben, wie sie nur durch einen langen Gebrauch hätte erreicht werden können. Nun ist es allerdings richtig, daß, wenn man von den Arabern dieser Zeit spricht, man weniger an die aus der Wüste gekommenen Beduinen denken darf, als an die eigentlichen Bewohner des arabischen Reiches, und daß man diesen wohl, im günstigsten Falle, eine Beschäftigung mit der Astronomie zutrauen könnte. Aber selbst in diesem Falle ist es höchst unwahrscheinlich, daß die Astronomie in diesen Gegenden so fortgelebt haben sollte, daß man selbst zu einer Verbesserung der Methode des Ptolemäus gelangt wäre. Eine solche Verbesserung hätte ihre Entwickelung haben müssen, und diese war hier unter den gegebenen Umständen geradezu unmöglich. Man wird keine falsche Annahme machen, wenn man voraussetzt, daß bei der alten Bevölkerung gerade so viel von den Wissenschaften übrig geblieben war, als hinreichte, ihren neuen Herren die Anregung zur Unterstützung solcher Gegenstände einzuflößen, dadurch hob sich aber die Astronomie wieder, man ging auf die alten Quellen zu ihrem Studium zurück und wandte sich hier zuerst nach Indien. Mit den astronomischen Schriften war aber auch die Mathematik der Inder über das Khalifenreich verbreitet worden, darüber besitzen wir genug Zeugnisse der arabischen Schriftsteller selbst.

Wir sehen also, wie durch die neuen Verhältnisse der seit Jahrhunderten tief gesunkene Kulturzustand dieser Länder wieder gehoben wurde und einen kräftigen Aufschwung nahm. Durch die Aufmunterung und Unterstützung von Fürsten, die selbst Theil nahmen an den Arbeiten der Gelehrten, oder doch wenigstens das lebhafteste Interesse daran zu erkennen gaben, erhielt die Astronomie bald eine Verbreitung ohne Beispiel, und die große Zahl ausgezeichneter Astronomen läßt sich nur dadurch erklären, daß sie aus einer Bevölkerung hervorgegangen sind, bei der diese Wissenschaft seit Jahrtausenden zu Hause war und die jetzt nur wieder eine neue Anregung erhalten hatte. Im Anfange hatte man zwar auch nur die Astrologie im Auge, sobald man aber die Schriften der Griechen kennen lernte, fand auch das wissenschaftliche Element Eingang. Die Khalifen hatten sich bald mit all dem Glanze und dem fabelhaften Luxus orientalischer Despoten umgeben, und dieß um so mehr, als bei ihnen zur Macht der weltlichen Herrscher noch die Hoheit des geistlichen Oberhauptes kam. Sie hatten die Klugheit, die ausgezeichnetsten Geister ohne Rücksicht auf Stand oder Herkommen an sich zu ziehen, und erhöhten dadurch nur um so mehr ihr eigenes Ansehen. Wie wir diese Zustände auch ansehen mögen, so waren sie doch günstiger als die der vorangegangenen Zeiten, und Handel, Gewerbe und Ackerbau hoben sich wieder. Die mechanischen Künste und die Industrie erreichten eine vorher nie gekannte Höhe und in ihrem Gefolge fanden die Naturwissenschaften eine bereitwillige Aufnahme. Aus solchen Anfängen entwickelte sich nun eine materielle und geistige Kultur, welche bei weitem die gleichzeitige in den Abendländern überragte.

Die erste, bis jetzt bekannte, mathematische Arbeit eines Arabers war die Algebra von Abu Abdallah Mohammed ben Musa. Er lebte zur Zeit

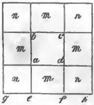
des Khalifen Almamun (814—833) und hatte auf den Wunsch dieses Fürsten einen Auszug aus den großen astronomischen Tafeln gemacht, welcher der kleine Sindhind genannt wurde. Diese Tafeln waren also gleichfalls, wie die größeren, indischen Ursprunges. Dieser Gelehrte ging aber noch weiter; er verfaßte auch neue Tafeln auf der Grundlage indischer und persischer Tafeln und mit Benutzung der Arbeiten des Ptolemäus und eigenen Verbesserungen. Außer diesen Tafeln existirten aber zur Zeit dieses Khalifen noch mehrere andere, welche gleichfalls auf indischen Schriften beruhten. Wichtiger für uns ist aber die genannte Algebra, welche ebenso auf den Wunsch des Khalifen geschrieben wurde. Dieses Werk ist die Grundlage der neueren Algebra geworden und verdient deßwegen eine nähere Betrachtung.

In der Einleitung spricht sich der Verfasser über die Veranlassung, den Zweck und Nutzen seines Werkes aus. „Die Liebe zu den Wissenschaften, durch welche Gott den Imam Al Mamun, den Beherrscher der Gläubigen, ausgezeichnet hat, die Freundlichkeit und Herablassung, welche er den Gelehrten zeigt, die Güte, mit welcher er sie beschützt und in ihren Bemühungen unterstützt, Dunkelheiten in den Wissenschaften zu erhellen und Schwierigkeiten zu entfernen, haben mich ermuntert, ein kurzes Werk über Rechnungen durch Ergänzung und Reduktion (aljebr wa'lmukabalah) zu schreiben. Hierbei beschränkte ich mich auf das Leichteste und auf das, was das Nützlichste in der Arithmetik ist, wie es die Menschen am meisten gebrauchen, in Fällen von Erbschaften, Legaten, Theilungen, Rechtsfragen und Handel, und in allen ihren Geschäften mit einander. Eben so, wo es sich um die Ausmessung von Ländereien handelt, überhaupt von geometrischen Rechnungen und verschiedenen anderen Dingen" u. s. w. Das Buch war also für das Geschäftsleben bestimmt, ein elementares Werk, welches auf wissenschaftlichen Werth keinen Anspruch machte. Ein solches Unternehmen setzt aber voraus, daß die Araber schon mit der Mathematik vertraut waren und daß sie schon andere Werke der Art hatten. Die arabischen Geschichtschreiber behaupten nun aber, daß Mohammed ben Musa der erste Araber gewesen sei, der über Algebra geschrieben habe. Von einer Seite ist ihm dieß zwar streitig gemacht worden, aber es dürfte — den Fall als wahr angenommen — sein Nebenbuhler kaum früher gesetzt werden können. Der Gegenstand seiner Untersuchungen mußte übrigens schon vor ihm bekannt gewesen sein, denn sonst würde er sich genöthigt gesehen haben, seine Kunstausdrücke zu erklären, deren Bedeutung er als bekannt vorauszusetzen scheint. Diese Widersprüche sind von keiner Bedeutung und lassen sich leicht lösen. Solche Geschäftsrechnungen, wie unser Auctor sie gelehrt, waren auch schon vor ihm gemacht worden, und er hat wirklich nur das Bekannte zusammengestellt und war nur der erste Araber, der in arabischer Sprache, die jetzt eine große Verbreitung gewonnen hatte, geschrieben hat. Die Wissenschaft, welche er dargestellt, war aus den Resten der früheren und aus persischer Gelehrsamkeit zusammengeflossen und hatte nur durch die Aufnahme der indischen Arithmetik eine höhere Form erhalten. Auf dieser Grundlage sind die ersten arabischen Werke über Astronomie und Mathematik naturgemäß entstanden.

Was die Form der Darstellung betrifft, so gebrauchte der Verfasser im ganzen Werke weder Zeichen noch Zahlen und drückte alles durch Worte aus. Die Methode der Auflösung der Gleichungen des ersten Grades stimmt ganz mit der indischen, also auch mit der von Diophantus, überein. Sind die beiden Seiten der Gleichung gebildet, so werden die negativen Glieder dadurch entfernt, daß man die gleichen Größen als positive zusetzt, dieß ist die Ergänzung (Algebr). Alsdann werden gleiche Größen von beiden Seiten hinweggenommen,

bis auf jeder Seite nur ein Glied stehen bleibt, und dieß ist die Reduktion (Almukabalah). Zu den Gleichungen des ersten Grades werden gerechnet $a x^2 = b$ und $a x^2 = a x$. Die Gleichungen des zweiten Grades werden aufgelöst, wie dieß von Bhaskara in der Lilavati geschieht, der doppelte Werth der Wurzel wird anerkannt, sobald dieß zu positiven Werthen der Unbekannten führt. Ganz in der Weise der Inder gibt Mohammed ben Musa Vorschriften für die Auflösung der drei Fälle dieser Gleichungen $x^2 + b x = c$, $x^2 + c = b x$, $x^2 = b x + c$, welche von jeher unterschieden wurden. Eigenthümlich sind ihm aber die Beweise, welche er am Ende zur Erklärung dieser Vorschriften gibt; sie sind ganz auf geometrische Betrachtungen gestützt und schon deßwegen nicht rein indischen Ursprunges, sie gehören aber auch nicht den Arabern an. Bei der Beurtheilung derartiger Dinge muß man vor Allem festhalten, daß eigentliche und strenge Beweise nur bei den Griechen gesucht werden können, und daß diese nur langsam und in verschiedenen Abstufungen zu andern Völkern übergegangen sind. Was nun unser Verfasser gibt, das sind keine eigentlichen Beweise im Sinne der Griechen, wie wir sie z. B. in den arithmetischen Büchern des Euklid finden, sondern nur die Verfolgung arithmetischer Operationen an geometrischen Figuren, wie wir sie mit Hülfe unserer Zeichensprache jetzt auch arithmetisch ausführen. Ueber die Entstehung dieser Richtung können nun naturgemäß nur zwei Ansichten stattfinden, entweder die Methode der Griechen hatte schon in Indien eine Anregung zu Beweisen hervorgerufen, welche nur auf den Zweig der Mathematik sich erstreckte, den sie kultiwirten, oder noch wahrscheinlicher: die griechische und indische Art hatten sich in den Euphratländern zusammengefunden und dort diese Richtung erzeugt, welche nun wieder nach Indien zurückwirkte und in der leichteren Form erst eine günstige Aufnahme fand. Jedenfalls haben wir hier schon die Anfänge einer Verbindung zwischen Algebra und Geometrie, und die Aufgabe der Araber in der Mathematik war eben, diese Verbindung weiter zu führen. — Es sei die Gleichung $x^2 + 10 x = 39$, aufzulösen. Man nehme an, a b c d sei ein Quadrat, dessen Seite $a d = x$, so ist $a b c d = x^2$, man setze auf jeder Seite dieses Quadrates ein Rechteck m, dessen Grundlinie also $a d = x$, die Höhe a e aber nehme man $= 2\frac{1}{2}$, so ist $m = 2\frac{1}{2}\,x$ und alle vier zusammen sind $4\,m = 4 \,.\, 2\frac{1}{2} \,.\, x = 10\,x$. Das Quadrat mit den 4 Rechtecken ist daher $= x^2 + 10\,x$, aber auch nach der Bedingung $= 39$. Ergänzt man die 12eckige Figur durch die kleinen Quadrate n, so entsteht ein größeres Quadrat von der Seite g h. Nun ist aber n das Quadrat über der Seite $a e = 2\frac{1}{2}$, also $n = 2\frac{1}{2} \,.\, 2\frac{1}{2} = 6\frac{1}{4}$ und alle vier Quadrate $4\,n = 4 \,.\, 6\frac{1}{4} = 25$. Das Vorige, mit der Ergänzung, beträgt also $39 + 25 = 64$ und dieß ist der Inhalt des Quadrates über g h und daher g h selbst $= \sqrt{64} = 8$. Diese Seite besteht nun aus $g e + e f + f h = 2\frac{1}{2} + x + 2\frac{1}{2}$ oder $g h = 5 + x$, sie ist aber auch $= 8$, folglich ist x und 5 so viel als 8, also muß $x = 8 - 5 = 3$ sein. Aehnlich sind die Beweise für die andern Fälle.

Fig. 17.



Die folgenden Untersuchungen betreffen die vier algebraischen Operationen mit Unbekannten und Zahlen, einige Operationen mit Wurzelgrößen, die Rechnungen mit + und —; am Schlusse werden wieder einige Beweise beigefügt, welche mit Raumgrößen geführt werden. Diese ganze Untersuchung ist kurz und dürftig und ganz der indischen Behandlungsweise nachgebildet. Einer der Beweise hat zum Zwecke, zu zeigen, daß $20 - \sqrt{200} + (\sqrt{200} - 10)$

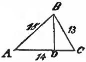
$= 10$ ist, der andere, daß $20 - \sqrt{200} - (\sqrt{200} - 10) = 30 - \sqrt{800}$. In einem andern Falle ist zu zeigen, daß $50 + 10\,x - 2\,x^2 + (100 + x^2 - 20\,x) = 150 - 10\,x - x^2$, und hier macht er nur die Bemerkung: „Dieser Fall läßt keine Figur zu, weil hier drei verschiedene Arten von Größen vorkommen, Quadrate, Wurzeln und Zahlen, und es nichts Entsprechendes gibt, wodurch sie dargestellt werden können. Ich habe jedoch versucht auch für diesen Fall eine Figur zu erfinden, aber sie war nicht hinreichend deutlich." Diese Stelle ist in so ferne interessant, als sie uns zeigt, wie die Araber jetzt schon bemüht waren, in die Wege der Griechen, aber auf ihre Weise, einzutreten; sie kannten aber ihre geometrischen Arbeiten noch nicht, oder vermochten noch nicht sie zu verstehen. Zur Erläuterung und Anwendung des bisher Vorgetragenen gibt der Verfasser einige Aufgaben, z. B. die Zahl 10 so in zwei Theile zu zerlegen, daß das Quadrat des einen Theiles so groß ist als das 4fache Produkt aus beiden Theilen; der dritte und vierte Theil einer Zahl jeder um 1 vermehrt, geben zum Produkte 20, welches ist die Zahl? u. s. w. . . . Um die Unbekannte zu bezeichnen, gebrauchen die Araber das Wort Ding oder Sache nach dem Vorgange der Inder, die in ihren yavat-tavat einen eben so allgemeinen und unbestimmten Ausdruck hatten. Eben so bezogen sich auch die Benennungen Quadrat, Wurzel nur auf die Unbekannte, und hier stimmten sie wieder mit den Indern und mit Diophantus überein. An einer Stelle wird die gesuchte Größe $x = \sqrt{7^1/_2}$ und hierbei nur kurz angegeben, daß, wenn die Wurzel ausgezogen werde, der erhaltene Werth genüge. Hieraus scheint nun hervorzugehen, daß die Araber den genäherten Werth eines solchen Ausdruckes zu finden wußten. Es folgen nun noch eine Menge verschiedener Aufgaben und zuletzt die Regel der drei Glieder in ihrer Anwendung auf die gewöhnlichsten Fälle des täglichen Verkehres.

Die nun folgende Abtheilung enthält eine Art Geometrie ganz nach dem Muster der indischen als einen Theil der Arithmetik; die für die Anwendung wichtigsten Berechnungen werden kurz angegeben. Die Flächenberechnungen der Dreiecke und Vierecke machen den Anfang, hierauf folgen die Kreisrechnungen, das Ganze ist höchst dürftig. Für die Berechnung des Kreisumfanges ist die bekannteste und am gewöhnlichsten angewendete Formel $\frac{22}{7}\,d$; eine andere Formel ist $\sqrt{10\,d^2}$; die Astronomen rechnen nach der Formel $\frac{62832}{20000}\,d$, welche nicht verschieden von $\frac{3927}{1250}\,d$ ist. Wir finden hier die Bestätigung des früher Gesagten, das Verhältniß $22:7$ war in Griechenland ausschließlich im Gebrauche, in Vorderasien dieses und auch $\sqrt{10}$, in Indien nur das letzte; später erhielt jedoch das einfache archimedische Verhältniß eine größere Verbreitung mit der Methode dasselbe aufzufinden, und es entstanden die andern genaueren Verhältnisse in Indien, wovon eines sogar bis auf 17 Stellen genau war, zu einer Zeit, wo man in Europa noch keine so große Annäherung hatte. Mohammed ben Musa lehrt uns weiter, wie die Kreisfläche berechnet werden kann und der Kreisabschnitt, eben so wie man zu einem Bogen den Durchmesser aus der halben Sehne und dem Pfeile finden kann.

Der pythagoräische Satz wird vom Verfasser in seiner arithmetischen Form angegeben, aber ein geometrischer Beweis beigefügt, welcher jedoch nur für das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreieck gilt. Hierauf folgen die fünf Arten Vier-

ecke der Inder, bei deren Berechnung zum Theil der pythagoräische Satz angewandt werden muß. Eben so führt er drei Arten von Dreiecken an, weicht aber hier von den Indern ab, indem er die Eintheilung nicht von den Seiten, sondern von den Winkeln hernimmt. Bei der Rechnung muß er aber auch die andere Eintheilung in gleichseitige, gleichschenkelige und ungleichseitige nehmen. Die Abschnitte der Grundlinie in einem spitzwinkeligen und ungleichseitigen Dreiecke zu finden, wird nicht durch eine Vorschrift, sondern durch eine Rechnung gelehrt, welche ihre Begründung in sich hat. Das Dreieck ist das bekannte indische mit den Seiten 13, 14 und 15. Es sei $DC = x$ der Abschnitt, welcher gesucht werden soll, so ist $BD^2 = 13^2 - x^2$; ferner $AD = 14 - x$ und $AD^2 = (14 - x)^2 = 196 - 28x + x^2$; nun ist aber auch $BD^2 = 15^2 - AD^2 = 225 - (196 - 28x + x^2) = 29 + 28x - x^2$, daher: $29 + 28x - x^2 = 169 - x^2$ oder $29 + 28x = 169$, $28x = 140$, also $x = 5$; man hat somit $DC = 5$ und $AD = 14 - 5 = 9$. Mit Hülfe des Abschnittes wird nun auch die Höhe berechnet. Das Buch enthält noch Vorschriften zur Berechnung der Körper ungefähr in der Ausdehnung, wie bei Brahmegupta, von Kugel und Cylinder geschieht keine Erwähnung. Die zweite Hälfte des Buches enthält Anwendungen des ersten Theiles auf Erbschaften, Vermächtnisse, Theilungen u. s. w., sie haben mehr Interesse für die Jurisprudenz und die Sittengeschichte der Araber, als für die Mathematik.

Fig. 18.



Außer Mohammed ben Musa haben noch viele andere Araber über Arithmetik und Algebra geschrieben, so einer ihrer ausgezeichnetsten Gelehrten **Abu Yusef Alkendi**, gewöhnlich **Alkindus** genannt. Unter seinen vielen Schriften findet sich auch eine über die Arithmetik der Inder und eine andere über Algebra. Sein Schüler **Ahmed ben Muhammed** von Sarkhasia in Persien schrieb gleichfalls über beide Zweige der Mathematik; er starb 899. Die Namen einer Menge anderer Schriftsteller werden angeführt, von denen man weder ihre Zeit noch ihre Leistungen kennt. Die Fortbildung der Algebra kann jedoch nur unbedeutend gewesen sein, denn noch gegen das Ende des 10ten Jahrhunderts fand **Abul Wefa**, einer ihrer ausgezeichnetsten Astronomen und Mathematiker, es der Mühe werth, einen Commentar zur Algebra des Mohammed ben Musa zu schreiben und zu einem andern ähnlichen Werke seines Lehrers Abu Yuhya. Wichtiger dagegen war ein anderes Unternehmen Abul Wefa's: er übersetzte die Arithmetika des Diophantus und gab in einer besondern Abhandlung Beweise zu den Problemen desselben. Es ist durchaus nicht wahrscheinlich, daß die Araber ihre Lehrer, die Griechen und Inder, in diesem Zweige übertroffen haben, ja kaum daß sie sie zu erreichen vermochten. Man hat zwar in neuerer Zeit unter der großen Zahl arabischer Manuscripte einige aufgefunden, welche Neues zu enthalten schienen; es hat sich aber bei näherer Prüfung nicht bestätigt. Ein Werk von einem gewissen **Abraham**, der aber nicht näher bezeichnet wird, enthält die einfache und doppelte Regula falsi, wie sie in Indien längst bekannt war, und bezeichnet dadurch deutlich seinen Ursprung. Ein anderes Werk aus der zweiten Hälfte des 11ten Jahrhunderts von Omar Alkhayami, von welchem man geglaubt, es enthalte die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades, enthält die geometrische Darstellung der Wurzeln solcher Gleichungen mit Hülfe der Kegelschnitte, was allerdings interessant ist, aber nicht hierher gehört.

Man nimmt gewöhnlich an, daß die Elemente Euklid's schon unter der Regierung Almansor's, also zwischen 754—775, übersetzt worden seien, die jetzt

noch vorhandene ist von dem persischen Geometer Nassir Eddin aus Thus (gest. 1273) nach einer früheren Uebersetzung. Unter den Khalifen Harun Al-Raschid und Al-Mamun erschienen neue Bearbeitungen derselben von Hedjadj ben Yusuf ben Matar Alkuphi und Isaac ben Honain; die letztere wurde von Thabet ben Corrah verbessert. Auf Befehl des Khalifen Al-Mamun wurden nun auch die Werke der berühmtesten griechischen Geometer übersetzt, so wie der Almagest durch Isaac ben Honain. Um sich die Erscheinung dieser merkwürdigen wissenschaftlichen Erhebung zu erklären, muß man sich erinnern, daß seit der Regierung der Abbasiden der persische Einfluß immer mehr zugenommen und besonders zur Zeit Harun Al-Raschid's die Verfeinerung der Sitten eine gewisse Höhe erreicht hatte. Die Unterstützung der Wissenschaften gehörte zum guten Ton; was in der ersten Zeit der Gründung des Staates aus Nothwendigkeit gethan wurde, geschah jetzt aus Mode und zur Verherrlichung des Herrschers. An den Hof zu Bagdad hatte man alle ausgezeichneten Männer, einheimische und fremde, gezogen; besonders in Ansehen standen die Aerzte, welche, aus nahe liegenden Gründen, meistens Fremde waren. Diese waren aber größtentheils Männer von umfassender Bildung und nach dem Geiste der Zeit sehr häufig zugleich Astronomen. So Johann Mesva, welcher den Prinzen Al-Mamun unterrichtete. Solche Männer hatten großen Einfluß, und ihnen mögen wir es wohl zuschreiben, wenn ein siegreicher Khalife von dem griechischen Kaiser als eine Friedensbedingung Gelehrte und Bücher verlangte. Die Erfüllung dieser Forderung mag aber wohl dem Kaiser nicht möglich gewesen sein, indem sich größtentheils zwar die Bücher, kaum aber die Gelehrten, sie gut zu erklären, auffinden ließen. Unter solchen Umständen begreift man leicht, wie die Uebersetzungen, besonders die ersten, beschaffen gewesen sein mögen; sie bestanden sicher nur in dürftigen Auszügen der Sätze ohne Beweise. Hierfür konnten die ersten Araber, die sich der Mathematik zuwandten, noch keinen Sinn haben, und die indischen Werke mußten ihrem Geschmacke viel mehr zusagen. Aus solchen Gründen läßt sich auch erklären, warum in kurzer Zeit verschiedene Bearbeitungen griechischer Werke einander folgten; man lernte immer mehr verstehen, wie ungenügend die vorausgegangenen waren. Dieselbe Erscheinung wiederholte sich später im Occidente. Die Auffassung der griechischen Werke muß aber auch bei den Arabern ganz eigenthümlicher Art gewesen sein, sie ließen fast nie die wohl überdachte Anordnung der Sätze bestehen und warfen sie oft sonderbar durch einander. Eben so ist es nicht selten, daß ihre Erklärungen sich auf unbedeutende Dinge bezogen, während schwierigere Stellen unerklärt blieben. So mögen denn wohl neben den indischen Werken die griechischen eine Zeit lang weniger benutzt bestanden haben, weil sie bei nicht gehöriger Vorbildung überhaupt schwerer zu verstehen waren. Das zeigt sich denn auch bei Mohammed ben Musa, der in seinem Buche durchaus nichts Griechisches hat, obgleich zu seiner Zeit eine Uebersetzung der Elemente Euklid's vorhanden gewesen ist. Aehnlich müssen wir uns die Verhältnisse in Bezug auf die Arbeiten des Ptolemäus denken; das Verständniß desselben erfolgte nur allmälig; zuerst faßte man die leichtesten Dinge und studirte hinterher seine geometrische Methode.

Am Hofe des Khalifen Al-Mansor lebte noch Musa ben Schaker, dessen drei Söhne Mohammed, Ahmed und Alhassan als Mathematiker sich auszeichneten. Der erste, gleichfalls Mohammed ben Musa genannt, und mit dem früheren nicht zu verwechseln, schrieb über die ebenen und sphärischen Figuren. Ein geometrisches Werk war von den drei Brüdern verfaßt worden, worin sich auch die bekannte Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks aus den drei Seiten findet mit einem Beweise und einer Anwendung auf das bekannte Dreieck mit den

Seiten 13, 14 und 15. Außer diesen Werken hat man von den Söhnen des Musa ben Schaker noch viele andere Schriften. Von Mohammed, dessen Blüthezeit in die Regierung des Khalifen Al-Mohtaded fällt, wird erzählt, daß er, wahrscheinlich um astronomische und mathematische Werke aufzusuchen, nach den griechischen Staaten gereist sei. Auf seiner Rückreise lernte er Thabet ben Corrah, einen Sabäer aus Harran, kennen und da er in ihm einen scharfsinnigen und geschickten Astronomen fand, so bewirkte er seine Aufnahme unter die Astronomen des Hofes. Hier verbesserte nun Thabet die Bearbeitung des Euklid und die Uebersetzung des Almagest und er ist auch außerdem durch die genauere Bestimmung der Schiefe der Ekliptik bekannt. Viele andere Schriften werden von diesem Gelehrten noch angeführt, unter diesen eine, welche nach ihrem Titel eine Anwendung der Algebra auf die Geometrie enthält, was nach der ganzen Entwickelung der arabischen Mathematik nicht unwahrscheinlich ist. Die Werke des Apollonius wurden gleichfalls in dieser Zeit theilweise von Ahmed ben Musa und von Thabet und später noch von andern übersetzt.

Ungefähr um dieselbe Zeit lebte auch der schon oben angeführte Alkindus, der über die Regel der sechs Größen geschrieben hat, eine Untersuchung, welche, wie früher erwähnt, wahrscheinlich einen Theil der Porismen des Euklid's ausmachte und schon von Ptolemäus zu seiner Trigonometrie benützt wurde. Aus dem 10ten Jahrhundert hat man noch von einem Geometer Mohammed von Bagdad eine Abhandlung über die Theilung der Flächen nach gegebenen Verhältnissen, sie besteht aus 22 Sätzen, von welchen sich 7 auf das Dreieck, 9 auf das Viereck und 6 auf das Fünfeck beziehen. Die große Vollendung dieses Werkes, welches durchaus nicht den Charakter der geometrischen Arbeiten der Araber trägt, macht es wahrscheinlich, daß es einem frühern Gelehrten der alexandrinischen Schule angehört.

In neuerer Zeit sind noch mehrere kleine Arbeiten arabischer Geometer bekannt geworden, welche für die Geschichte dieser Wissenschaft von Interesse sind. Hassan ben Hassan ben Haithem ist 1038 zu Cairo gestorben; unter seinen vielen Schriften ist eine, welche geometrische Gegenstände behandelt. Diese Abhandlung besteht aus drei Abtheilungen, die erste enthält eine Art philosophischer Einleitung, von welcher man aber nicht recht einsieht, in welcher Beziehung sie zu der nachfolgenden Arbeit steht; die zweite enthält 24 und die dritte 25 Propositionen. Von den Sätzen der ersten Art sagt der Verfasser selbst, daß sie vollkommen neu, und ihre Art nicht einmal den alten Geometern bekannt gewesen sei; die andern dagegen entsprächen den Data des Euklides, doch seien sie in diesem nicht enthalten. Die Angabe einiger Propositionen wird zeigen, von welcher Beschaffenheit sie sind. Prop. 1. Wenn man von einem der Lage nach gegebenen Punkte, eine Gerade zieht von gegebener Länge, so wird sich der Endpunkt dieser Geraden auf dem Umfange eines Kreises befinden, welcher der Größe und Lage nach gegeben ist. Prop. 3. Wenn man in einem der Größe und Lage nach gegebenen Kreise einen Punkt von gegebener Lage hat, verschieden vom Mittelpunkte, und wenn man von diesem Punkte eine Gerade nach dem Kreise zieht und sie verlängert, so daß die Verlängerung ein gegebenes Verhältniß hat zu dieser Geraden, so liegt der Endpunkt der Verlängerung auf dem Umfange eines neuen Kreises, welcher der Größe und Lage nach gleichfalls gegeben ist. Prop. 8. Wenn man von zwei der Lage nach gegebenen Punkten zwei Geraden von gleicher Länge zieht, bis sie sich durchschneiden, so liegt der Durchschnittspunkt auf einer Geraden, welche der Lage nach gegeben ist. Prop. 9. Wenn man von zwei der Lage nach gegebenen Punkten zwei Geraden zieht, bis sie sich durchschneiden, und wenn das Verhältniß der beiden Geraden

gegeben ist, nämlich von der größeren zur kleineren, so wird der Durchschnittspunkt auf dem Umfange eines Kreises sich befinden, welcher der Lage nach gegeben ist. Prop. 24. Wenn man in einem Kreise, welcher der Größe und Lage nach gegeben ist, irgend eine Sehne zieht und sie in irgend zwei Theile theilt, und wenn das Produkt dieser Theile gegeben ist, so wird der Theilungspunkt auf dem Umfange eines Kreises liegen, welcher der Größe und Lage nach gegeben ist. Aus der letzten Abtheilung mögen die folgenden Sätze hier stehen: Prop. 2. Wenn man von einem gegebenen Punkte durch einen der Lage nach gegebenen Kreis eine Gerade zieht, welche von ihm einen gegebenen Abschnitt trennt, so ist diese Gerade der Lage nach gegeben. Prop. 4. Wenn man von einem gegebenen Punkte nach zwei Parallellinien, welche der Größe und Lage nach gegeben sind, eine Gerade zieht, welche von ihnen irgend zwei Stücke abschneidet, und wenn das Verhältniß dieser Stücke gegeben ist, so wird auch die Gerade der Lage nach gegeben sein. Prop. 12. Wenn ein Kreis der Größe und Lage nach gegeben ist, und auch eine Gerade der Lage nach, und man zieht an den Kreis eine Tangente, welche von der Geraden begrenzt wird, so wird, wenn diese Tangente der Größe nach gegeben ist, sie es auch der Lage nach sein. Prop. 24 und 25. Wenn man zwei Kreise hat, welche der Größe und Lage nach gegeben sind, und man zieht eine Gerade, welche beide Kreise berührt, so wird auch diese der Größe und Lage nach gegeben sein. Von dieser Art sind die Sätze, welchen der Verfasser einen großen Werth beilegt. Man hat in ihnen die Anfänge der Geometrie der Lage erkennen wollen, was jedoch gänzlich falsch ist. Sie sind offenbar den Data Euklid's nachgebildet, ohne jedoch die Schärfe und Bestimmtheit der Sätze des griechischen Geometers zu erreichen. Das Wesentliche der Sätze der ersten Art besteht darin, daß, wenn eine Eigenschaft gewisser geometrischer Gebilde gegeben ist, diese einer Reihe von Punkten zukommt, welche dadurch auch gegeben sind; oder umgekehrt, daß einer Reihe von Punkten eine gemeinsame Eigenschaft zugehört. Man hat es also hier mit geometrischen Oertern zu thun, und Untersuchungen dieser Art waren den Griechen sehr geläufig. Bei den Sätzen der zweiten Art wird ausgesprochen, daß, wenn gewisse Dinge gegeben sind, alsdann auch andere Dinge gegeben sind. Manche dieser Sätze, aus beiden Reihen, sind sehr einfach, andere bieten einen ganz hübschen Stoff dar; einige sind unrichtig, wie z. B. 12 der zweiten Reihe, wo die Tangente vier verschiedene Lagen haben kann, wenn anders die Proposition richtig gefaßt ist. Ueber den wahren Werth würde man erst urtheilen können, wenn man die Beweise vorliegen hätte, worauf hier allein Alles ankommt.

Von einem andern Geometer Ahmed ben Mohammed ben Abd al Gelil mit dem Beinamen Al Sindjiari hat man mehrere kleine Stücke bekannt gemacht. Als Werke von ihm werden genannt: eine Abhandlung über die Kegelschnitte, über gerade Linien, welche von einem oder mehreren Punkten an gegebene Kreise gezogen werden, Antworten auf Fragen über die Lemmen des Archimedes. In einer seiner Abhandlungen: „Geometrische Regeln“ verweist er auf zwei andere Arbeiten, die eine „Geometrische Bemerkungen,“ die andere „Von den Eigenschaften der Ellipse.“ — Die griechischen Geometer hatten zu ihren Untersuchungen manchmal Sätze nöthig, welche in den Elementen nicht enthalten und vielleicht auch sonst nicht bekannt waren; diese wurden dann als Hülfssätze eingeschaltet und einen solchen Satz nannte man Lemma. Eine Reihe solcher Lemmen wurden von den Arabern dem Archimedes zugeschrieben, von Thebit ben Corrah übersetzt und zu verschiedenen Zeiten von andern Arabern erläutert und vielfältig besprochen. Diese Sätze, wie schon bemerkt, an sich

nicht bedeutend, entsprechen nun durchaus nicht der Schärfe und der vollendeten Darstellung dieses Geometers, und es kann wohl kein Zweifel sein, daß sie nicht von ihm herrühren. Sie scheinen jedoch ein Lieblingsthema der Araber gewesen zu sein und Al Sindjiari, dem Fragen darüber vorgelegt wurden, erkannte die Sätze und verwies den Frager auf das Werk selbst, erklärte sich jedoch bereit, die Sätze zu erklären, welche Archimedes nur unvollkommen behandelt habe. Seine Betrachtung dehnt sich nur über 15 Sätze aus, und es wäre interessant zu wissen, welche Verbesserungen er in den Beweisen angebracht hat. In den geometrischen Regeln von Al Sindjiari darf man wohl annehmen, daß er sich auf freiem Felde bewegt habe; diese werden uns daher Belege seiner eigenen Forschungen liefern. Die 11 Sätze tragen auch wirklich den Schein der Originalität, aber bei näherer Prüfung fällt derselbe. Den zweiten Satz bezeichnet der Verfasser so: Merkwürdige Verhältnisse, welche aus folgender Konstruktion hervorgehen. Diese merkwürdigen Verhältnisse bestehen aber aus dem bekannten Satze, daß, wenn man von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Sekante und eine Tangente zieht, das Rechteck aus der Sekante und dem äußeren Abschnitte gleich ist dem Quadrate der Tangente. Die angegebene Konstruktion verdeckt zwar die Sache in etwas, aber auch ein mittelmäßiger Geometer wird sogleich das wahre Verhältniß herausfinden. Hat nun Al-Sindjiari die einfache Vorlage erkannt, so hat der Satz durchaus keine Merkwürdigkeit, im andern Falle aber kann man ihm nur geringe geometrische Kenntnisse zugestehen. Der 6te Satz bezieht sich auf den Kreis, war aber von Apollonius schon für die Kegelschnitte überhaupt bewiesen worden; eben so sind die Sätze 7 und 8 bei diesem Geometer schon zu finden. Der 12te Satz ist gleichfalls ein verkleideter elementarer Satz: Nimmt man auf dem Umfange eines Kreises willkürlich zwei Punkte A und B und theilt man den Bogen AB in D in zwei Theile (gleiche oder ungleiche ?), zieht man alsdann von den drei Punkten A, B, D nach irgend einem Punkte des Umfanges C die drei Geraden AC, BC und DC, welch letztere die Sehne AB in E schneidet, so ist das Verhältniß von AE zu BE eben so groß wie das Verhältniß von AC zu BC. Sind nun die Theile des Bogens ungleich, so ist der Satz falsch, denn alsdann verhält sich AE zu BE wie $AC \times AD$ zu $BC \times BD$; für gleiche Theile ist aber der Satz richtig, dann aber auch ein ganz elementarer Satz über das Dreieck. Das andere Werk Al-Sindjiari's, den Kreis mit geraden Linien verbunden betreffend, enthält 13 Aufgaben, die theilweise gut gewählt sind; es wäre von Interesse, seine Auflösungen zu kennen. Eine Ergänzung zum 14ten Buche der Elemente Euklids hat Imam Muzhaffer al Isferledi in 11 Sätzen geschrieben, welche manche hübsche Verhältnisse enthalten. Ueber die sphärischen Dreiecke ist eine kleine Abhandlung von Abul Walid noch vorhanden, welche 9 Sätze enthält über die Congruenz dieser Dreiecke, dann daß gleichen Seiten gleiche Winkel entsprechen und umgekehrt; es sind diese Sätze denen, welche beim ebenen Dreiecke stattfinden, nachgebildet. Von Abul-Walid wird vermuthet, daß er der bekannte Averroës sei, der auch einen Commentar über den Almagest geschrieben hat. Den arabischen Schriftstellern schließen wir hier noch den schon oben erwähnten persischen Astronomen Nassir Eddin von Thus (1201—1274) an, der in arabischer Sprache über alle Zweige des menschlichen Wissens geschrieben hat. Außer seinen Uebersetzungen mehrerer griechischer Werke hat man von ihm noch Schriften über Arithmetik und Algebra.

Die Wissenschaften, welche von den Griechen kultivirt wurden, sind von den Arabern mit gleichem Eifer aufgegriffen worden, und das Bestreben, sich in ihnen zu unterrichten, war so allgemein, daß sie eine Verbreitung erhielten,

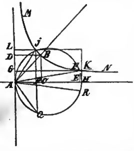
wie sie in früheren Zeiten nie vorhanden war. Dieß ist ein sehr beachtenswerthes Verhältniß der arabischen Zeit, und in ihm liegt größtentheils die Eigenthümlichkeit derselben. Die ganze Richtung dieser Zeit ging weniger auf die Fortbildung und höhere Gestaltung der geistigen Entwickelung, als auf die Ausbreitung der bisher erlangten. Wie aber eine Kraft im Einzelnen um so schwächer wirkt, je größer die Masse ist, auf welche sie übergeht, so sehen wir auch hier die Zersplitterung, und es erhob sich kein einziger Geist, der in irgend einer Beziehung den Alten hätte gleichgestellt werden können. Wie die vorhergehenden Betrachtungen gezeigt haben, so haben die Araber weder die Griechen in der Geometrie, noch die Inder in der Algebra erreicht, viel weniger, daß sie Neues in diesen Zweigen geschaffen hätten; aber beide Zweige zu verbinden war ihre Aufgabe, und hier dürfen wir Fortschritten mit Sicherheit entgegen sehen. Die Astronomie war der Theil der angewandten Mathematik, welcher am ersten geeignet war, die Arithmetik und Algebra mit der Geometrie zu verbinden, und sie wurde auch am frühesten von den Arabern aufgenommen. Die ersten Astronomen hatten die indischen Tafeln und Vorschriften zur Berechnung, und von bedeutenden Anwendungen der Mathematik war hierbei noch keine Rede. Später lernten sie den Almagest kennen und, nachdem sie einige Fortschritte in beiden Zweigen der Mathematik gemacht hatten, auch schätzen; die indischen Schriften traten in den Hintergrund, sie wurden durch die Arbeit des Ptolemäus verdrängt. Ein unbestreitbares Verdienst der Araber ist die Verbesserung der astronomischen Instrumente; sie stellten viele und genaue Beobachtungen an, die Berechnungen mehrten sich, aber hierbei mußten sie bald erkennen, daß die indische Methode der Rechnung über der Methode des Ptolemäus stehe. Es ist wahrscheinlich, daß die Astronomen der östlichen Gegenden, z. B. in Persien, die indische Methode nie aufgegeben haben, und daß die Nachahmung der Griechen auch nur in der Nähe Griechenlands stattfand. Dieses Verhältniß konnte aber nicht lange dauern; mit dem eigentlichen Aufschwunge der Astronomie mußten sie, wenn auch im Ganzen blinde Anhänger des ptolemäischen Systems, seinen Weg der Rechnung wieder verlassen. Dieß geschah unter den westlichen Astronomen zuerst durch Mohammed Ebn Geber, Statthalter der Khalifen in Syrien, nach seiner Vaterstadt Batan in Mesoptamien Albatani genannt; er gebrauchte zuerst wieder den Sinus statt der Sehne. Albatani befand sich seinen Vorgängern gegenüber in derselben günstigen Lage, wie einst Ptolemäus, und es wurde ihm Manches zugeschrieben, wovon er der Urheber nicht war. So gilt er allgemein für den Erfinder der Rechnung mit dem Sinus, obgleich, wie früher angegeben wurde, Sinustafeln aus Indien in den ersten Zeiten schon eingeführt worden waren. Er selbst schrieb sich übrigens diese Erfindung nicht zu, und sagte nur, auf welche Weise er von Ptolemäus abweiche. Die Inder hatten schon von einem andern Verhältnisse, dem Cosinus, Gebrauch gemacht; bei Albatani aber findet man die erste Idee zu den Tangenten, obschon noch nicht in ihrer vollen Entwickelung. Diese Idee war von großer Wichtigkeit für die Vereinfachung der Rechnungen, indem dadurch das zusammengesetzte Verhältniß des Sinus zum Cosinus durch ein einfaches ersetzt wurde. In seinen Werken findet sich auch zuerst die Grundformel der sphärischen Trigonometrie zwischen den drei Seiten und einem Winkel, und er gibt von ihr verschiedene Anwendungen. Die Blüthezeit dieses Astronomen fällt gegen 880, und er starb zu Antiochia 928. Abul-Wefa (937—998) war es vorbehalten, die Ideen des Albatani auszuführen, er hat eine Tangententafel für die bekannte Eintheilung des Radius in 60 Theile berechnet, er hatte auch schon die Idee der Cotangente und der Sekante. Demselben Astronomen wird auch die Entdeckung einer Ungleichheit der Bewegung des Mondes,

die sogenannte Variation, zugeschrieben, und dieses dürfte ihm wohl nicht streitig gemacht werden können; denn die Beobachtungen seiner Zeit waren genau genug, um das Vorhandensein einer solchen Ungleichheit zu bemerken, wenn man auch noch nicht fähig war, weder ihre Größe noch ihre Gesetze aufzufinden. Solche Verbesserungen wurden von Ebn Junis in Cairo (979—1008) weiter geführt: er hatte Tafeln für die Tangenten und Sekanten für den ganzen Viertelskreis, und er machte von diesen Funktionen denselben Gebrauch, welchen wir davon in unsern Rechnungen machen. Mohammed Geber ben Aflah aus Sevilla gegen 1050 hat die fünfte Formel für das sphärische rechtwinkelige Dreieck aufgefunden; den Griechen waren nur die vier ersten bekannt. Aus dem Anfange des 13ten Jahrhunderts ist noch einer der besten arabischen Mathematiker zu erwähnen: Abul Hassan Ali von Marocco, der auch ein Werk über Kegelschnitte geschrieben hat. Aus einer seiner Schriften entnehmen wir die Anschauung der Araber von den neuen trigonometrischen Linien. Man denke sich auf einer Vertikalebene eine Senkrechte, welche durch die einfallenden Sonnenstrahlen einen Schatten wirft, dieser vertikale Schatten ist die Tangente des Winkels der Sonnenhöhe; die Entfernung der äußersten Punkte der Senkrechten und des Schattens ist der Durchmesser des vertikalen Schattens, unsre jetzige Sekante. Denkt man sich aber eine horizontale Ebene und darauf eine Senkrechte, so erhält man auf gleiche Weise einen horizontalen Schatten, unsere Cotangente, und einen Durchmesser des horizontalen Schattens, unsere Cosekante. Aber nicht allein in der Einführung dieser Verhältnisse bestand das Verdienst der Araber, sie haben den ganzen Gegenstand mit Gewandtheit behandelt und ihm eine gewisse Einfachheit zu geben gewußt.

Die Araber haben uns eine beträchtliche Zahl wissenschaftlicher Werke hinterlassen, von welchen noch sehr viele nur dem Titel nach bekannt sind. In der Zukunft werden wir daher noch manche interessante Aufschlüsse über ihre wissenschaftliche Thätigkeit erhalten, nur wäre zu wünschen, daß bei derartigen Mittheilungen der Gegenstand nicht an allgemeinen Theorien aus der gegenwärtigen Zeit angeknüpft würde, dafür aber der Ideengang des arabischen Auctors und seine Darstellung, Hülfsmittel und Resultate besondere Berücksichtigung finden möchten. Es ist früher schon angedeutet worden, daß die eigentliche Aufgabe der Araber die Verbindung der Arithmetik und Algebra mit der Geometrie war; dieser haben sie entsprochen: Mohammed ben Musa hat uns die Anfänge gezeigt, Thebit ben Corrah schrieb über die Zuverlässigkeit der algebraischen Beweise, die Entwickelung der Trigonometrie hat nun die Fortschritte in dieser Richtung nachgewiesen, und es war zu erwarten, daß sie sich auch noch in anderen Leistungen kundgegeben haben werde. Diese Erwartung hat sich bestätiget, denn in der Algebra des Abul Fath Omar ben Ibrahim Alkhayami, wahrscheinlich aus dem 12ten Jahrhundert oder dem Ende des 11ten, findet man die geometrische Konstruktion der Gleichungen des dritten Grades. Die Araber hatten versäumt, sich die Zeichensprache der Inder anzueignen zum großen Nachtheile für ihre Bestrebungen; mit diesen Zeichen würden sie wahrscheinlich beträchtlich mehr geleistet haben. Diesem Mangel suchten sie nun durch geometrische Betrachtungen abzuhelfen, die Operationen an der Figur mußten ihnen den Gang der Rechnung ersetzen. Die Grundlage ist jedoch auch hier bei den Griechen zu suchen, und Menächmus hat zuerst die Wurzel der Gleichungen $x^3 - a = 0$ oder $x^3 - 2a^3 = 0$ konstruirt; er hatte aber hierbei nicht die Absicht, die dem x entsprechende Zahl zu finden, er wollte nur eine Linie, die Seite x eines Würfels, doppelt so groß

als ein anderer Würfel dessen Seite a. Die Araber verbanden mit solchen Konstruktionen einen andern Zweck: sie wollten die Wurzeln vorgelegter Zahlengleichungen, welche aufzufinden sie keine algebraische Methode hatten, wenigstens geometrische darstellen und dadurch annähernd bestimmen. Menächmus hatte die Gleichung $x^3 - 2a^3 = 0$ vermittelst zweier Parabeln $y^2 = 2ax$ und $x^2 = ay$ konstruirt; man kann auf diese Weise die Seite eines Würfels finden, dessen Inhalt gegeben ist. Durch Konstruktion einer Parabel und einer Hyperbel, oder einer Parabel und eines Kreises läßt sich die Aufgabe gleichfalls lösen. Dieser Fall ist jedoch nicht der einzige bei den Griechen und uns nur deßwegen besonders bekannt geworden, weil er ein vielbesprochenes Problem betraf. Die schon angeführte Stelle in Platon's Menon 22 d weist uns auf die Aufgabe: ein gegebenes Flächenstück als gleichschenkeliges Dreieck in einen gegebenen Kreis einzutragen. Dieselbe Stelle enthält aber auch schon indirect die Auflösung: Man soll an dem Durchmesser die gegebene Fläche als Rechteck so anlegen, daß dieses um ein Rechteck zurückbleibe, welches dem angelegten ähnlich ist. Ob nun die Griechen dieses auszuführen wußten, ist unbekannt, nach der Lösung des Menächmus sollte man es wohl glauben, besonders da die Theorie der Kegelschnitte eben aus solchen Aufgaben hervorgegangen ist und dann diese gewiß auch darauf angewendet wurden. Man denke sich, es sei AH der Durchmesser des Kreises und das Verlangte sei geschehen, also AEFG gleich der gegebenen Fläche, diese Fläche sei aber auch gleich dem Quadrate ACBD, so ist ACBD = AEFG. Nun sagt aber ein gewiß schon zu Plato's Zeiten bekannter Satz (Apoll. II., 12), daß, wenn MBN eine Hyperbel, alle Rechtecke, wie etwa AEFG, gleich sind dem Quadrate ACBD. Hieraus ergibt sich nun die Auflösung. Man mache das Quadrat ACBD gleich der gegebenen Fläche, und durch den Punkt B lege man eine gleichseitige Hyperbel, welche AL und AH zu Asymptoten hat; diese Hyperbel schneide den Kreis in den Punkten F und J, man ziehe FE und JP senkrecht zu AH und verlängere diese Linien bis zum Kreisumfange, so ist das verlangte Dreieck entweder AFR oder AJQ. Setzt man bei der algebraischen Behandlung AE = x und die gegebene Fläche = b den Durchmesser = a, so erhält man die Gleichung $x^4 - ax^3 + b^2 = 0$. Wenn also von den Griechen die Aufgabe gelöst worden ist, woran man kaum zweifeln kann, so haben sie dadurch die Wurzeln einer Gleichung des 4ten Grades konstruirt. Diese Vorarbeiten schmälern jedoch das Verdienst unsres arabischen Auctors nicht: die Griechen hatten zu allen diesen Dingen einmal den Grund gelegt, und die Theorie der Kegelschnitte war ja ganz ihr Erzeugniß, aber man sieht sogleich, daß hier gar nicht von der Konstruktion einer Gleichung die Rede sein kann; die Griechen dachten gar nicht daran, eine solche Aufgabe in dieser Form zu fassen.

Fig. 19.

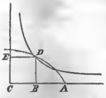


Das Werk Alkhayami's enthält nun die Auflösung der Gleichungen und besonders als neue Untersuchung die des dritten Grades. Er gibt im Eingange einen kurzen Ueberblick über die Geschichte der Gleichungen des dritten Grades von Archimedes bis auf seine Zeit und nennt hierbei zwei berühmte arabische Geometer Almahami und Abu Djafar Alkhazin. Zuletzt gibt er eine Anordnung in einfache und zusammengesetzte Gleichungen und eine übersichtliche Zusammenstellung derselben. Der einfachen Gleichungen sind sechs: $a = x$, $a = x^2$, $a = x^3$,

$b\,x = x^2$, $b\,x = x^3$, $c\,x^2 = x^3$, immer ein Glied gleich einem Gliede. Die zusammengesetzten Gleichungen gehen von 7 bis 25 und zwar, wo zwei Glieder gleich einem Gliede sind, von 7 bis 18; wo drei gleich einem, von 19 bis 22, und wo zwei gleich zwei, von 23 bis 25. Die Gleichungen sind nämlich so geordnet, wie dieß überhaupt im ganzen Alterthume nach dem Vorgange der Inder der Fall war, daß nur positive Glieder auf einer Seite stehen. Es fehlen in diesem Schema die Fälle, wo alle Glieder zusammen $= 0$ sein würden, weil sie auf negative oder unmögliche Wurzeln führen, und negative Wurzeln auch schon von den Indern den unmöglichen gleichgestellt wurden. Die Auflösung der Gleichungen des ersten und zweiten Grades geschieht auf dieselbe Weise, wie schon bei Mohammed ben Musa, nur daß die geometrischen Beweise für die letztern mehr den Elementen Euklid's entnommen sind und dadurch weniger Originalität haben.

In Bezug auf die Gleichungen vom dritten Grade, welche nun folgen, sagt Alkhayami, wie er nur die Konstruktion der Wurzeln gebe; daß er sich zwar bemüht habe, sie algebraisch aufzulösen, daß ihm dieß aber nicht gelungen sei und er es künftigen Geometern überlassen müsse. Es wäre nun zur richtigen Beurtheilung des Werkes unseres Auctors sehr zu wünschen, daß man seine allgemeinen Betrachtungen genau kennte, und überhaupt, ob er von allgemeinen Ideen geleitet worden ist. Die Konstruktion der Gleichung $x^3 + a = c\,.\,x^2$, (ein Kubus und eine Zahl ist gleich Quadraten) gibt er auf folgende Weise: Man mache die Anzahl der Quadrate $c = AC$, alsdann suche man die Seite H des Kubus, dessen Inhalt a, und mache $CB = H$. Hierauf zeigt der Verfasser, daß CB kleiner sein müsse, als AC, wenn die Auflösung möglich sein soll, d. h. für eine positive Wurzel. Der Rest der Linie AB kann nun gleich BC oder kleiner oder größer sein, der erste Fall finde in Fig. 20, der andere in Fig. 21 und der dritte in Fig. 22 statt. Man errichte nun in C eine Senkrechte und zeichne das Quadrat CBDE; durch den Punkt D lege man eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten CB und CE sind. Alsdann beschreibe man eine Parabel, deren Achse AC, Scheitel A und Parameter BC ist. Die beiden Kegelschnitte werden bestimmt und ihrer Lage nach gegeben sein. Die Parabel wird im ersten Falle durch den Punkt D gehen, im zweiten wird er außerhalb und im dritten innerhalb derselben liegen. Nunmehr, wenn die beiden Kurven sich schneiden oder berühren, wird die Auflösung möglich sein, wenn nicht, unmöglich. Der Verfasser führt nun an, wie einem andern berühmten Geometer Abul Djud dieses Verhältniß entgangen sei und er deßwegen die Auflösung für unmöglich erklärt habe, wenn BC größer sei als AB.

Fig. 20.



Um den Beweis zu führen, ziehe man in allen drei Fällen von dem Durchschnitts- oder Berührungspunkte Fig. 21 die Linie FR senkrecht zu AC, und FK senkrecht zu CE. Wegen der Eigenschaft der Hyperbel ist $CRFK = CBDE$ oder RC zu BC, wie BC zu FR; wegen der Eigenschaft der Parabel ist BC zu FR wie FR zu RA, man hat daher: RC zu BC, wie BC zu FR, und wie FR zu RA, und folglich RC^2 zu BC^2 wie BC zu RA ist. Es folgt hieraus,

Fig. 22.

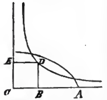
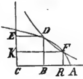


Fig. 21.



daß der Kubus von BC, welcher der gegebenen Zahl gleich ist, auch gleich sein muß dem Körper, dessen Grundfläche das Quadrat von RC und Höhe RA ist. Fügt man zu beiden Theilen noch den Kubus von RC, so folgt, daß der Kubus von RC nebst der gegebenen Zahl gleich ist dem Körper, dessen Basis das Quadrat von RC und Höhe AC ist. Dieß ist, was zu beweisen war. Durch unsere Zeichen ausgedrückt, ist: $CR . RF = CB^2$ und $RF^2 = AR . CB$, daher $CR^2 . RF^2 = CB^4$, mithin $CR^2 . AR . CB = CB^4$ oder $CR^2 . AR = CB^3$; $CB^3 + CR^3 = CR^3 + CR^2 . AR = CR^2 . (CR + AR) = CR^2 . AC$. Da nun $CR = x$ und $AC = c$, $BC^3 = a$, so ist $x^3 + a = c x^2$.

Man erkennt hieraus, wie Alkhayami sich genau an die Griechen angeschlossen hatte; für die Eigenschaften der Kegelschnitte war Apollonius seine Quelle. Was er nun auf diesem Wege erreichen konnte, hat er erreicht: in den meisten Fällen hat er die positiven Wurzeln erkannt, und die Konstruktion gab ihm auch vielfach die Bedingungen für ihre Möglichkeit. Wenn die Kegelschnitte sich blos berührten und also im Berührungspunkte zwei gleiche Wurzeln vereinigt waren, so nahm er sie für eine einfache Wurzel. Da er die negativen Wurzeln verwarf, so konnte er auch nicht erkennen, daß jede Gleichung vom dritten Grade entweder eine oder drei mögliche Wurzeln haben muß. Eben so wenig war ihm die Erfindung anderer Eigenschaften der Gleichungen möglich, die Folge wird zeigen, wie wenig später unter weit günstigeren Umständen und bei größerem Fortschritte der Algebra hierin geleistet worden ist. Die Arbeit Alkhayami's ist aber noch in andern Beziehungen wichtig: sie zeigt uns die Bestrebungen der Araber und wie weit sie in seiner Zeit gediehen waren, und hebt daher viele Vermuthungen hierüber auf. Sie zeigt uns ferner, wie sie sich in der Mathematik immer mehr dem griechischen Einflusse hingaben und sich dadurch selbst den Weg verschlossen, größere Fortschritte zu machen. Die Griechen waren so weit gekommen, als sie mit ihren Hülfsmitteln möglicherweise kommen konnten, und indem die Araber sich ihnen anschlossen, blieben sie auch auf derselben Stufe stehen, ja sie konnten sie nicht einmal erreichen, da ihnen der griechische Sinn für die reine Auffassung der Form fehlte. Auf der andern Seite wurden sie dadurch veranlaßt, sich schon frühe von der indischen Mathematik abzuwenden, welche ihnen allein die Mittel zum Weitergeben gewähren konnte. Aus dieser Quelle hatten sie Alles geschöpft, alles was sie von der Arithmetik und Algebra wußten, denn die Uebersetzung des Diophantus durch Abul-Wefa war nicht früher als 969. Das Zahlensystem mit Stellenwerthe, also eine leichtere Rechnungsweise, hat sie, verbunden mit der Idee des Sinus, zu einer beträchtlichen Erweiterung und Vereinfachung der Trigonometrie geführt. Die praktische Arithmetik der Inder hat keine Erweiterung durch sie erfahren, aber durch die Anwendung der Geometrie auf die Lehre von den Gleichungen sind sie zu Beweisen gekommen, welche die Inder nicht kannten, so wie zur Konstruktion der Gleichungen vom dritten Grade. Hieraus ergibt sich schon, daß umgekehrt von einer Erweiterung der Anwendung der Algebra auf die reine Geometrie bei den Arabern nicht die Rede sein kann; diese war schon früher durch die gegenseitige Einwirkung der beiden Hauptrichtungen angebahnt und ist nicht viel weiter gekommen, als wir dieß bereits bei Mohammed ben Musa fanden. Bei gewissen geometrischen Berechnungen wurden die verlangten Stücke als unbekannt gesetzt und mit Anwendung geometrischer Sätze eine Gleichung gebildet, die aufgelöst die gesuchte Größe gab. Was uns nun auch in der Folge von den Arbeiten der Araber noch bekannt werden mag, so wird dadurch die angegebene Grenze nicht wesentlich verändert werden, und wir können nur

noch erfahren, wie ein arabischer Schriftsteller mehr in den Geist seiner Vorbilder eingedrungen war, als ein andrer, oder die bereits vorhandene Wissenschaft mit größerer oder geringerer Gewandtheit zu handhaben wußte. Eine auffallende Erscheinung ist noch, daß beinahe gleichzeitige Schriftsteller sich auf einer sehr ungleichen Stufe wissenschaftlicher Bildung befanden und daß selbst bei ein und demselben Auctor einzelne Partien sehr gut, andere dagegen sehr mittelmäßig behandelt sind.

Die große Bedeutung der Araber liegt aber viel weniger in dem Neuen, was sie geschaffen haben, als in der Erhaltung und in der weiten Verbreitung, welche sie dem Alten zu geben gewußt. Sie haben uns die beiden Richtungen vereint übermacht und ihre Commentare das Studium erleichtert, besonders aber anregend gewirkt. Die Astronomie und Geographie sind durch sie auf eine höhere Stufe gebracht worden, sie haben die Naturwissenschaft gefördert und die Optik des Spaniers Alhazen überragt alle früheren Arbeiten über diesen Gegenstand. Der Centralpunkt der arabischen Wissenschaft war Bagdad; von hier wandte sie sich westlich nach Damaskus und Cairo, dann über das nördliche Afrika nach Spanien. Aber auch nach Osten und Südosten wirkten die Araber, ihr Einfluß ging nach Indien und China. Die Kultur der Länder des ehemaligen baktrischen Reiches wurde so weit wieder gehoben, daß sie fähig waren, beim Verfalle des arabischen Reichs, ihren neuen turanischen Herren Geschmack an den Wissenschaften beizubringen. So blühte die Astronomie noch eine Zeit lang von Samarkand bis nach Indien und nur dem anhaltenden Drängen der turanischen Völkerschaften nach Westen erlag endlich alle Kultur.

Wir sehen aber in allen diesen Vorgängen das Gesetz des Fortschrittes der höheren Entwicklung walten. Die Griechen und Inder waren, jedes Volk in seiner Richtung thätig; sie erreichten einen Höhepunkt, wobei sie gleichsam ihre Kräfte erschöpften und dann verfielen. Sie wirkten zwar auf einander ein, die Wirkung trat aber erst dann hervor, als sie schon ermattet keinen neuen Lebenslauf beginnen konnten, und dazu auch die erneuenden Kräfte fehlten. Der ganze große Kreis der alten Kulturwelt ging immer mehr seiner Auflösung entgegen und die stets gährenden Verbindungen konnten sich zu keiner neuen Gestaltung fügen. Da traten mit einem Male neue Kräfte hinzu, verwandte Elemente knüpften ein neues Band; denn fremde würden auch den letzten Haltpunkt aufgehoben und die Kultur ganz zerstört haben. Aber gerade das verwandte Element konnte keine dauernde Verbindung und keinen lebenskräftigen Organismus schaffen, es erzeugte eine kurze, aber glänzende Erhebung, aus welcher die alte Kultur gerettet hervorging. Wie schnell die Erhebung, so schnell war auch der Verfall: die neuen Träger der alten Kultur hatten gerade Zeit, sich dieselbe zu erwerben und wieder an andere Völker zu übertragen, alsdann aber war ihre Bestimmung erreicht und fremde, ihren Ideen nicht zugängliche Elemente lösten den schnell gealterten Körper wieder auf. Europa in seinen damaligen Zuständen würde aber nicht fähig gewesen sein, die Kultur der alten Welt aufzunehmen, wenn sie ihm nicht nach und nach und stückweise wäre geboten worden: von Palästina und Aegypten, von Nordafrika und Spanien drang sie langsam, aber sicher vor, und wo wir ihr Erscheinen und ihre Aufnahme an einem Orte nachweisen können, da waren die Vorbereitungen dazu schon viel früher vorhanden. Zu solchen Uebertragungen waren aber lebendige, vermittelnde Träger und eine leichte und zugängliche Form nothwendig; die todte Schrift würde nie dieß Ziel erreicht haben und konnte ohnehin erst dann wirken, nachdem die Vorbereitungen zu ihrem Verständnisse vorhanden waren.

Diese Uebertragung der Mathematik auf einen fremden Boden mit der erlittenen Veränderung war gleichfalls ein großer Fortschritt, denn Alles, was seitdem Bedeutendes in dieser Wissenschaft geleistet worden ist, wäre auf einer der beiden Grundlagen allein nicht möglich gewesen, ja selbst auf beiden nicht, wenn wir sie rein empfangen hätten; aber die uns gebotene Mischung mit dem, was allmälig dazu getreten ist, wurde der Keim zu einer Entwicklung, welche den glücklichsten Erfolg gehabt hat.

Dritter Theil.

Entwickelungsgeschichte der Mathematik bei den neuen Völkern bis in den Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts.

Ueber die Mathematik der Römer.

Die Römer haben sich weder in der Philosophie, noch in der Mathematik als selbstständige Forscher gezeigt; wir könnten sie daher hier völlig übergehen, wenn nicht besonders von Italien aus die neue Mathematik sich über Europa verbreitet hätte; der Zusammenhang erfordert somit, auch ihrer Bestrebungen zu gedenken. Außerdem bieten sich auch noch einige interessante Punkte der Betrachtung dar, welche über frühere Verhältnisse Licht verbreiten können. Es kann keinem Zweifel unterworfen sein, daß der Einfluß der Griechen auf die italischen Völkerschaften in eine Zeit hinaufreicht, aus welcher uns keine Urkunden mehr geblieben sind; wie aber auch die frühesten Verbindungen beider Länder beschaffen gewesen sein mögen, der eigentliche Einfluß der griechischen Wissenschaft und Kunst beginnt erst mit der Eroberung Unteritaliens durch die Römer. Zu den hervorragendsten Männern, die in dieser Richtung thätig waren, gehört Q. Ennius aus Campanien (239—169 v. Chr.), dessen vielseitige Bildung hier vorzüglich wirkte. Die römischen Patrioten sahen jedoch diesen Einfluß nicht gerne und das römisch-nationale Wesen sträubte sich gegen die Aufnahme einer fremden Kultur. Solche Einflüsse sind aber durch keine Verordnungen und Verbote abzuhalten, und gerade das römische Staatsleben, welches das Studium der Beredsamkeit nothwendig hervorrufen mußte, beförderte dadurch auch die Mittel, sie zu erlangen, indem nur höhere Bildung, Einsicht und Gewandtheit dem Redner seine Erfolge sichern konnten. Aber die Römer hatten überhaupt keine Neigung, auf Dinge einzugehen, welche nicht unmittelbar

einer praktischen Anwendung fähig waren, und so kam es denn, daß sie im Allgemeinen, z. B. von der griechischen Philosophie, nur aufnahmen, was sie glaubten benutzen zu können, daher ihre meistens eklektische Richtung. Die Römer scheinen jedoch insgemein mehr in die Ideen der griechischen Philosophen eingegangen zu sein, als man gewöhnlich glaubt, nur daß sie Vieles als unnützen Kram verwarfen und darüber hinweggingen. Ein vielleicht weniger bekanntes Beispiel von der Aufnahme philosophischer Ideen und ihrer unmittelbaren Anwendung auf einen praktischen Fall bietet uns der römische Jurist Alfenus Varus, zur Zeit der Bürgerkriege. Es kam folgender Fall vor. Als von den Richtern (Geschworenen im Civilprozeß) sich einige, nach Anhörung des Rechtsfalles, entschuldigten, und man an ihre Stelle andere wählte, wurde er gefragt, ob durch den Wechsel einiger Richter der Prozeß derselbe bleibe, oder das Gericht als ein anderes anzusehen sei? Er antwortete hierauf: „Nicht bloß, wenn einer oder der andere, sondern selbst, wenn alle Richter gewechselt worden wären, so bleiben doch der Prozeß und das Gericht dieselben, wie vorher, und nicht bloß in diesem Falle geschieht es, daß bei Veränderung der Theile die Sache noch als dieselbe anzusehen ist, sondern auch bei vielen andern. Denn auch eine Legion wird als eine und dieselbe betrachtet, von der so viele ausgeschieden sind und an deren Stelle andere kamen; und ein Volk gilt als das nämliche, wie vor hundert Jahren, obgleich von den damaligen Menschen heute keiner mehr lebt; auch ein Schiff, das so oft ausgebessert wurde, daß kein Brett dasselbe ist wie im Anfange, wird als das nämliche angesehen. Wenn Jemand glaubte, durch Veränderung der Theile werde die Sache selbst eine andere, so würde es ja geschehen, daß wir selbst nach dieser Ansicht nicht mehr dieselben wären, wie vor einem Jahre, da, wie die Philosophen sagen, die kleinen Theile, aus welchen wir bestehen, täglich aus unsrem Körper scheiden und andere von Außen her an ihre Stellen treten. Wenn daher die Species dieselbe bleibt, so ist auch die Sache als ein und dieselbe anzusehen". Wir sehen hier zugleich, wie schon zur Zeit des Alfenus Varus eine Ansicht über den Wechsel der Materie in den thierischen Organismen verbreitet war, welche erst die neueste Zeit wissenschaftlich begründen konnte.

Wie wenig unter solchen Umständen gerade die griechische Mathematik bei den Römern Eingang finden konnte, ist für sich klar; die ganze Lehre von den Kegelschnitten, überhaupt die höhern Theile der Geometrie, mußten von ihnen eben so wie von den Indern angesehen werden. Aber auch die Elemente selbst wurden vernachlässiget; dieses ganze kunstreiche Gebäude mit seinen strengen Beweisen kam ihnen wahrscheinlich eben so als eine Spielerei der Griechen vor, wie so manches Andere.

Es ist eine bezeichnende Thatsache, daß die Römer sich mehr der Richtung der Pythagoräer anschlossen, und daß dieß überhaupt die in Italien am meisten verbreitete war; folgerichtig huldigten sie in der Mathematik auch dem arithmetischen Prinzipe und behandelten die geometrischen Figuren wie die Inder. Es kann kein Zweifel sein, daß die Römer, wie alle Völker, die einen gewissen Kulturgrad erreicht haben, eine Arithmetik und eine Geometrie hatten, welche für das gewöhnliche Leben ausreichten; weiter haben sie dieselben aber auch nicht gehoben. Im Geschäftsleben waren arithmetische Operationen und praktische Rechnungen nothwendig; eben so sehr war eine praktische Geometrie ein erstes Bedürfniß, schon die Absteckung und Eintheilung eines Lagers, die Kriegskunst und Baukunst erforderten mathematische Kenntnisse. Die Römer hatten nur Feldmesser (Agrimensores oder Gromatici), die die Sache als ein Geschäft nach gewissen Regeln oder Vorschriften betrieben; von letztern sind uns nur

Nikomachus war wohl bekannter, als die Elemente Euklid's. Die ganze geistige Thätigkeit des Römers war in früheren Zeiten dem Staate und in späteren seinen eigenen Verhältnissen zugewandt; was dem Staate und den Privaten gut und nützlich war, nahm allein seinen Geist in Anspruch, und jede andere, auf Höheres gerichtete Speculation hatte für ihn keinen Werth. Die große Ausdehnung des römischen Reiches bot einen ungeheuern Stoff zur Geographie und Naturkunde, und doch sind auch hierin die eigenen Arbeiten der Römer verhältnißmäßig nur unbedeutend. Die Landwirthschaft wurde im Interesse der Einzelnen und des Staates schwunghaft betrieben, und hierüber besitzen wir auch für ihre Zeit werthvolle Arbeiten; es dürfte aber noch sehr die Frage sein, ob sie die Orientalen hierin übertroffen haben. Die Römer bildeten in manchen Dingen einen wahren Gegensatz zu den Indern, obgleich sich in anderen eine Uebereinstimmung zeigt, welche besonders in Bezug auf die Mathematik von Wichtigkeit ist.

Der ganzen Bedeutung nach müssen wir noch hierher ziehen den Manlius Severius Boëthius, um 470 geboren und aus einer angesehenen römischen Familie. Seine Vorfahren begleiteten schon die ersten Stellen im Staate und er selbst wurde 510 von dem König Theodorich zum Konsul erhoben. In seinem zehnten Jahre kam er nach Athen und beschäftigte sich mit dem Studium der griechischen Literatur, besonders der Philosophie. Er übersetzte die Werke des Plato, Aristoteles, Euklides und Ptolemäus, unter andern, in das Lateinische. Von seinen mathematischen Schriften scheinen noch einige in den Bibliotheken zu ruhen; diejenigen, welche aber bekannt sind, verbreiten sich über die Elemente der Geometrie und über die Arithmetik. Die Geometrie enthält zwei Bücher, von welchen das erste eine Uebersetzung der Definitionen und Sätze der vier ersten Bücher der Elemente Euklid's ist, an welche sich einige von ihm aufgelöste Aufgaben schließen. Das zweite Buch ist die praktische Geometrie in der Ausdehnung, wie sie den römischen Feldmessern bekannt war; hier findet man die ungenaue Regel zur Berechnung der Fläche des Vierecks, wie so eben erwähnt wurde. Die Arithmetik ist im Geiste der Pythagoräer geschrieben und nur eine Nachahmung des Nikomachus. Wie unbedeutend nun auch diese Arbeiten an sich sind, so erhalten sie für die Geschichte dadurch einen besondern Werth, daß sie sonst schätzbare Nachrichten enthalten, daß sie zeigen, wie tief das Studium der Mathematik in Griechenland selbst gesunken war, und endlich, daß sie uns unverkennbar darauf hinweisen, wie die Lateiner sich mehr den Ansichten der Pythagoräer zuneigten. So findet man in einem lateinischen Manuscripte aus dem 11ten Jahrhundert beinahe den ganzen Inhalt des zweiten Buches der Geometrie des Boëthius, aber auch die Formel zur Berechnung des Dreiecks mit den Seiten 13, 14 und 15, welche bei ihm fehlt. Am Schlusse des ersten Buches der Geometrie findet sich eine Stelle, welche Bezug auf unser jetziges Zahlensystem zu haben scheint und die deßhalb mit Recht berühmt geworden ist.

Die Frage, ob den Griechen unser Zahlensystem bekannt gewesen sei, ist vielfach besprochen worden, und man hat geglaubt, sie verneinen zu müssen, weil man sich nicht hat denken können, daß diese schöne Erfindung in ihren Händen unfruchtbar geblieben wäre. Von diesem Gegenstande ist schon früher die Rede gewesen, und wir führen hier nur die darauf bezügliche Stelle an. Nachdem Boëthius einige Benennungen erklärt hat, fährt er fort. „Die Pythagoräer hatten, um Irrthümer in ihren Multiplicationen, Divisionen und Messungen zu vermeiden, zu ihrem Gebrauche eine Tafel erdacht, die sie zur Ehre ihres Meisters pythagoräische Tafel nannten, weil sie zu dem, was sie entwarfen, die

erste Idee von diesem Philosophen erhalten hatten. Diese Tafel wurde von den Neueren Abacus genannt. Durch dieses Mittel, welches sie durch ihre Geistesanstrengung erfunden haben, konnten sie die Kenntniß leichter zur gebräuchlichen und allgemeinen machen, indem sie es, so zu sagen, dem Auge darlegten. Sie gaben dieser Tafel eine sehr vorzügliche Gestalt, welche hier unten dargestellt wird." Ueber diese Tafel ist nun Folgendes zu bemerken. Sie bestand aus einer obern Horizontalreihe und vertikalen Columnen; in die erste waren als Ueberschriften der letztern, von der Rechten zur Linken die römischen Zahlzeichen für 1, 10, 100 u. s. w. gesetzt. Ferner hatten die Pythagoräer neun besondere Zeichen für die neun ersten Zahlen, deren Form unwesentlich zur Sache ist. Wurde nun ein Zeichen in die erste mit 1 überschriebene Columne gesetzt, so drückte es die Einheiten aus, wurde es aber in die zweite geschrieben, die Zehner, in der dritten Columne bedeutete es eben so viele Hunderte u. s. w. Hier liegt nun klar das Columnensystem vor, welches unserem Zahlensystem vorausgegangen ist und worin die Columnen die verschiedenen Stellen bezeichnen. Nach der Darlegung des Prinzipes dieses Systems gibt Boëthius die Regeln für die Multiplication und Division an, wodurch vollends jeder Zweifel über die Bedeutung dieser Stelle gehoben wird. Die Zeichen für die neun Zahlen stimmen nach den verschiedenen Manuscripten im Wesentlichen überein, die größten Abweichungen zeigen sich für 3 und 4; sie unterscheiden sich aber bedeutend von den arabischen Ziffern und weniger von denen, welche jetzt im Gebrauche sind. Ein zehntes Zeichen, welches für die Null angesehen werden kann, scheint nicht ursprünglich, wie es denn auch im Texte nicht vorkommt, ein späterer Zusatz zu sein; denn es war für das von Boëthius dargelegte Columnensystem ganz unnütz und durch seine Einführung ging eben dieses System in unser jetziges Zahlensystem über. Merkwürdig sind noch die Namen dieser Zahlen, 1 igin, 2 andras, 3 ormis, 4 arbas, 5 quimas, 6 caltis oder calctis, 7 zenis: 8 temenias oder termenias, 9 celentis; schwer dürfte zu entscheiden sein, ob ein zehnter Ausdruck sipos sich auf die letzte Zahl 9 oder auf 0 bezieht; wahrscheinlich ist das letzte der Fall. Die richtige Auffassung dieses Verhältnisses ist jedoch wichtig für die Sache, und man hat dafür folgende nicht unwahrscheinliche Erklärung gegeben: Das Zeichen, welches man für Null angesehen hat, ist ein Kreis, worin der Buchstabe a steht; beim Rechnen war es nun nicht nothwendig, die Vertikalstriche zu machen, wenn nur die Zahlen genau unter ihre Indices, zu welchen sie gehörten, geschrieben wurden. Um aber Irrthümer, welche hier leicht vorkommen konnten, zu vermeiden, mußte man die leere Stelle durch irgend ein Zeichen andeuten, was durch zwei Striche, welche den leeren Raum zwischen sich faßten, geschehen konnte. Fehlte nun an einer Stelle eine Zahl, so setzte man das Columnenzeichen, zwei Striche, welche im Schreiben leicht zu zwei Bögen ausarten konnte. Das a mag bei den Lateinern als Endbuchstabe von Columna gegolten haben, wodurch die Bestimmung des Zeichens noch mehr hervortrat.

Aus dem Angeführten geht nun hervor, daß an dieser Stelle des Boëthius durchaus nicht von unserem jetzigen Zahlensystem die Rede war, sondern von einem anderen, dem Columnensystem, welches, in dieser Zeit, die Orientalen nicht mehr kannten. Um so weniger dürfen wir aber diese Stelle, wie es geschehen ist, einem späteren Auctor zuschreiben, der seine Kenntnisse bei den Arabern geholt hat, denn dieser würde uns auch mit der Rechnungsweise der Araber, d. h. mit unserem jetzigen Zahlensysteme bekannt gemacht haben. Vielleicht ist nie eine Stelle, welche ihren Gegenstand mit gleicher Klarheit darstellt, mehr in Zweifel gezogen worden, als diese. Da man nicht im Stande war, die Erfindung unseres Zahlensystemes den Griechen zuzuschreiben und seinen orien-

talischen Ursprung auerkennen mußte, so wollte man auch nicht zugeben, daß die Kenntniß desselben in ihren Händen unfruchtbar geblieben sei, und man sprach ihnen dieselbe gänzlich ab. Sonderbarerweise haben die einleitenden Worte des Boëthius Veranlassung gegeben, sich an dieser Stelle, als geistreiche Erfindung des Pythagoras, ein großes Einmaleins zu denken zur Erleichterung der Rechnungen, während offenbar gar keine Beziehung zu etwas Derartigem vorhanden ist. Es ist ferner in Zweifel gezogen worden, ob überhaupt diese Stelle dem Boëthius angehöre und sie nicht vielmehr von einem späteren Abschreiber beigefügt worden sei. Eine solche Annahme würde aber die Sache noch mehr verwirren, denn der Abschreiber müßte eine andere Quelle als die Araber gehabt haben, und dann würde bloß statt einem bekannten ein unbekannter Auctor auftreten, oder man müßte eine absichtliche grobe Fälschung voraussetzen, welche gar keine Wahrscheinlichkeit hat.

Unser Zahlensystem bietet einen von jenen merkwürdigen Gegenständen dar, von welchen die Mathematik noch mehrere aufzuweisen hat, die von großem Interesse für die Entwickelungsgeschichte des menschlichen Geistes sind. Viele Jahrhunderte mögen verflossen sein, bis man von den Rechenmaschinen zur Darstellung des strengen Columnensystemes kam, viele Jahrhunderte, bis man sich erlaubte, die Vertikalstriche zu vernachlässigen und die leeren Stellen mit den Columnenzeichen auszufüllen. Jetzt war nur noch ein Schritt übrig, die Indices zu unterdrücken. So leicht und einfach uns aber auch dieser Schritt erscheinen mag, so kamen die Menschen doch erst wieder nach langer Zeit dazu, und die geistreichsten unter den Griechen, die der Erfindung so nahe standen, sind darüber weggegangen. Jede Erfindung hat ihre Zeit, außer welcher sie nicht gedeihen kann. Den Arabern war es vorbehalten, unserer Rechnungsweise allgemeine Verbreitung zu verschaffen; die Zeit verlangte die Erfindung, und wäre sie uns nicht auf diesem Wege zugekommen, so würde Europa sie gemacht haben, denn wir sehen in dieser Richtung ein Drängen und Vorwärtsgehen, welches nicht allein durch die Araber hervorgerufen worden ist. Die mitgetheilten Zahlenbenennungen gehören offenbar zwei verschiedenen Sprachgebieten an, andras und quimas, vielleicht auch igin sind arisch, arbas und temenias aramäisch, die übrigen wahrscheinlich auch semitisch. Dies führt uns auf die Euphratländer, wo beide Sprachgebiete neben einander und in mannigfachen Vermischungen existirten. Die Chaldäer in Babylon scheinen das Columnensystem, wie es von Boëthius dargestellt wurde, schon gekannt zu haben, und vor ihnen hatte es Pythagoras nebst Anderem erhalten (Jamblichus im Commentar zu Nikomachus). Die Lateiner, die der arithmetischen Richtung sich zuneigten, und den Pythagoräern sich anschlossen, wurden die Erben und Bewahrer dieser Erfindung.

Boëthius wurde, auf den Verdacht einer Untreue hin, von dem argwöhnischen König Theodorich ins Gefängniß geworfen und 524 enthauptet. Nach ihm wäre von den Römern noch Cassiodorus zu nennen; aber seine Arbeiten bieten uns keinen besondern Stoff dar.

Die Mathematik in den abendländischen Reichen von 500 bis 1200.

Im fernen Osten Asiens, in den weiten Steppen, aus welchen von jeher die Völker strömten, die einen so bedeutenden Einfluß auf die Geschicke Asiens

und Europas ausgeübt haben, waren auch wieder in den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung Veränderungen vorgegangen und Bewegungen entstanden, welche, gleichsam von einer Schichte zur andern sich fortpflanzend, ganz Europa ergriffen und zuletzt den Untergang des römischen Reiches zur Folge hatten. Die germanischen Völkerschaften bildeten nach Norden und Osten einen weiten Gürtel um das ost- und weströmische Reich und in ihrem Rücken gedrängt, ergossen sie sich über die Provinzen der ehemaligen Weltmonarchie. Mit den Germanen kamen schon die Angehörigen einer andern Rasse, welche die Bewegung fortsetzten, bis auch hier ihr Ziel, der Untergang des griechischen Reiches, erlangt war. Der Verkehr der Römer mit den Germanen war durch viele Jahrhunderte hindurch gegangen, und wenn auch neue Völkerschaften die alten ersetzten, so konnte doch die Wirkung nicht ausbleiben, die ununterbrochenen Impulse brachten allmälig eine Veränderung in dem germanischen Wesen hervor und näherten sie den Römern und Griechen, und wenn dieß nicht noch stärker hervortrat, so ist eben nur die stete Erneuerung der Völkerschaften davon die Ursache. So kam es denn, daß die meisten Barbaren, wenigstens zum Theil, an der römisch-griechischen Kultur Theil nahmen oder darauf vorbereitet wurden, und daß sie nach der Eroberung nicht ohne Gewandtheit die Verwaltung der neuen Staaten zu leiten wußten. Die Völker der Provinzen, welche von den Germanen überfluthet wurden, erhielten dadurch eine nicht unbeträchtliche Beimengung germanischen Blutes, und neue Verhältnisse, gänzlich von den alten verschieden, traten hervor. Es war dieses einer von jenen Verjüngungsacten, welche von Zeit zu Zeit von arischen Stämmen, früher in Asien, jetzt wieder in Europa hervorgerufen wurden. Bei einem jeden solchen Vorgange suchten die beiden Theile, Sieger und Besiegte, sich zuerst so viel wie möglich abgesondert zu erhalten, mit der Zeit aber verschmolzen sie doch zu einem gleichartigen Ganzen. Wie auf diese Weise die öffentlichen Verhältnisse sich gestaltet haben und wie allmälig die Freiheit untergegangen ist in der germanischen Welt, dieß zu entwickeln, fällt der politischen Geschichte zu; einige allgemeine Verhältnisse müssen jedoch auch hier berührt werden.

Unter allen ähnlichen Erscheinungen von gleicher Großartigkeit ist keine, welche in ihrem Verlaufe so viele Abweichungen gegen die früheren darbietet als die Besitznahme des römischen Reiches durch die Germanen. Die Perser und Araber standen, als sie ihre großen Herrschaften gründeten, gewiß auf keiner höheren Kulturstufe als die Germanen, aber sie drückten den Reichen, welche sie schufen, ihr Siegel auf. Die Lehren Zoroasters, wie Mohammeds wurden Staatsreligionen, ein Geist ergoß sich über die eroberten Länder, und wenn auch die aufgedrungenen Religionen stillen Widerstand fanden und durch diesen endlich das wahre Wesen derselben aufgehoben wurde, so erhielt sich doch die Form und überlebte noch den Untergang dieser Staaten. Nichts von all dem haben die Germanen hervorgebracht; sie fanden in den eroberten Ländern eine Religion, welche sie nicht allein aufnahmen, sondern auch mit Waffengewalt in ihr eigenes Vaterland einführten. Sie hatten sich hierdurch in einen, ihnen völlig fremden, Ideenkreis hineingesetzt und ihren Angehörigen aufgezwungen, welcher, als nicht mit ihnen nach und nach aufgewachsen, auch nicht verstanden wurde und eine bloße Aeußerlichkeit blieb. Hieraus folgt nicht, daß die Grundidee des Christenthums dem germanischen Wesen fremd gewesen wäre, die bisherigen Entwickelungen haben vielmehr gezeigt, daß sie gerade in den arischen Stämmen ihre Erzeugung gehabt und aus ihnen hervorgegangen war. Das Christenthum ist aber den Germanen in einer Form aufgezwungen worden, welche dessen wahres Wesen verdeckte und, selbst nur etwas Aeußerliches, auch nur als

solches festgehalten wurde. Aus diesen Verhältnissen ging nun aber auch gerade das Umgekehrte hervor, als in den früheren ähnlichen Fällen. Wenn die Völker des persischen Reiches gegen die Lehren Zoroasters ankämpften, welche sie noch nicht aufzunehmen vermochten, so wurden diese dadurch verändert und verloren zuletzt gänzlich ihre große Bedeutung, damit aber auch ihre Träger selbst, die gleich ihnen ausarteten. Bei den Germanen waren der Widerstand und die Kämpfe anderer Art, sie kämpften gegen die ihnen aufgedrungene Form des Christenthums und für die Wiedereroberung ihrer Reinheit, als allein ihrem Wesen angemessen, und dieser Kampf wird fortgehen, bis er sein Ziel erreicht hat. Der Perser und Araber war groß im Anfange, um, nach kurzer glänzender Laufbahn zu fallen, der Germane fiel gleich im Anfange, um, wenn auch langsam, aber desto sicherer sich wieder zu erheben. Diese merkwürdigen Verhältnisse, anscheinend so regelwidrig, sind doch mit einer gewissen Nothwendigkeit eingetreten. Hinter den früheren Kulturvölkern standen andere Stämme naturkräftig und in ungeschwächter sittlicher Größe, diese waren bestimmt, die sinkende Kultur immer wieder zu erheben, zu erfrischen, zu verändern und weiter zu führen. Diese Quellen waren aber durch die sogenannte Völkerwanderung erschöpft worden, die alten Mittel waren verbraucht, ganz neue Verhältnisse mußten jetzt eintreten, Kräfte wurden aufgespart, um durch ihre allmälige Wiederentfaltung den künftigen Entwicklungsprozeß zu leiten.

Das Bekehrungsgeschäft der Germanen war noch nicht in seinem ganzen Umfange vollendet, als auch die Reaktion schon begann. Sie zeigte sich zuerst bei Einzelnen im Nachdenken über gewisse Gegenstände, nahm aber bald, mehr instinctartig, einen allgemeinen Charakter an. Die Richtung, welche die Kirche unter dem Einflusse der griechisch-orientalischen Geistlichkeit gewonnen hatte, ging auf die Errichtung einer zweiten ägyptischen Priesterkaste und auf die Erwerbung des weltlichen Regimentes. Die Grundzüge dazu wurden frühzeitig gelegt und alle Einrichtungen zu einem solchen Uebergange getroffen. Deutsche Fürsten boten dazu zuerst ihre Hand, sie erhoben die Macht der römischen Bischöfe, halfen die Hierarchie gründen, errichteten Klöster, machten die Kirche reich und zu einer weltlichen Macht, welche nahe daran war, ihre eigene zu vernichten. Aber wie einst die Griechen gegen die Wiedergeburt ägyptischer Zustände kämpften, so erhoben sich auch dagegen die germanischen Völker; noch zeitig genug, aber schon am Rande des Abgrundes, erkannten endlich die Kaiser die drohende Gefahr und begannen dann den langen Kampf. Einen weit gefährlichern Gegner als die weltliche Macht hatte die Kirche jedoch in ihrem eigenen Schooße. Die Religion hatte sich nothwendig von der Natur losgemacht, aber die Kirche auch jede freie geistige Thätigkeit verworfen: der Mensch selbst hatte nur noch in so ferne Werth, als er im blinden Glauben lebte und jeder geistigen Regung entsagte. Die Askese hatte, ganz nach indischem Zuschnitt, mächtig sich erhoben, und die Vernichtung alles Irdischen, die Unterdrückung der schönsten Gefühle, ohne welche die Menschheit nie zur Veredlung hätte gelangen können, sollte zur höchsten Glückseligkeit führen. Auf dieser Basis erhoben sich die Mönchsorden, welche die Kirche zu einem Glaubensheere umschuf; sie hatten nur zwei Pflichten, die Verleugnung alles Weltlichen und den unbedingten Gehorsam gegen die Kirche. Hätte die Kirche auf dieses Heer sich verlassen können, so wäre ihr der Sieg gewiß gewesen, denn die Orden beherrschten nicht allein das geistige Leben, sie hatten auch weltliche Macht und ein Ansehen erlangt, durch welche sie den großen Feudalherren oft überlegen waren. Hier trat nun aber die Richtung der arischen Rasse hervor, und eine Einrichtung, welche bestimmt war, die geistige Freiheit vielleicht auf Jahrtausende zu vernichten, brachte gerade

die umgekehrte Wirkung hervor. Im Anfange mögen die Mönche ihren Stand wohl aus Neigung und mit Freiheit gewählt haben, bald aber trat ein anderes Verhältniß ein: äußere Gründe bestimmten Viele, die in sich gar keinen Beruf dazu trugen, diesen Stand zu wählen. Anstatt sich einem beschaulichen Leben hinzugeben, fingen manche von diesen in ihrer Abgeschlossenheit wieder zu denken an, sie beschäftigten sich mit den Wissenschaften, und so gaben gerade die Klöster die erste Anregung zu ihrer Wiederaufnahme. In den meisten Klöstern wurden Bibliotheken angelegt, und in diese flossen die Reste der Wissenschaften, welche den Abendländern noch übrig geblieben waren. Die Werke, welche zuerst wieder studirt wurden, gehörten der römischen Literatur an, weil das Griechische beinahe gänzlich in Vergessenheit gekommen war. Was sich nun aber in dieser von den eigentlichen Wissenschaften fand, war höchst dürftig, griechischen Quellen entnommen und meistens entstellt. Die Beziehung zur griechischen Literatur lag jedoch überall vor, und der Mangel an Kenntniß des Griechischen machte sich jetzt recht fühlbar und erweckte wieder das Studium derselben. So hob sich denn allmälig und sehr langsam, aber desto sicherer, das wissenschaftliche Leben; die griechische Wissenschaft war nicht untergegangen, sie hatte fortgelebt, wenn auch in dürftigen Ueberbleibseln, und brach sich mühsam Bahn in ihrer neuen Heimath. Stückweise und verstümmelt kam sie ihren neuen Trägern zu, damit sie am Einzelnen und Unzulänglichen ihre Kraft üben konnten, und als sie ihnen endlich unverfälscht übermacht wurde, waren sie erstarkt, sie konnten sie frei aufnehmen und blieben bewahrt vor der bloßen Nachahmung, denn sie hatten die Aufgabe, eine neue Kultur zu gründen und nicht bloß eine alte wieder zu beleben.

Man hat den Einfluß der Germanen auf die Völker, die sie sich unterworfen, vielfach in Abrede gestellt und sie nur als die Barbaren, die die frühere Kultur zerstört und Jahrhunderte der Finsterniß hervorgerufen, geschildert. Wirft man aber einen Blick auf die Zustände des römischen Reiches in der nächsten Zeit vor der Eroberung, so wird man erkennen, daß längst schon die Kultur und die Wissenschaften im Verfalle begriffen waren und dieser durch die Germanen nur beschleunigt worden ist; man wird eine Bevölkerung sehen, die von sich aus unfähig zur Wiedererhebung war und einer Regeneration nothwendig bedurfte. Diese ist ihr durch die Aufnahme des germanischen Blutes nicht allein geworden, sondern es sind aus dieser Vermischung auch ganz neue Völker hervorgegangen, mit Geistesrichtungen, welche von den früheren ganz verschieden waren. Man vergleiche nur die Italiener mit den Römern und man wird leicht die auffallende Verschiedenheit erkennen; die erstern haben entschiedene Neigung zu der abstrakten Wissenschaft und den Naturwissenschaften, welche den letztern ganz fehlte. Die Germanen haben keine Wissenschaften und Erfindungen mitgebracht, sie haben aber eine versunkene und abgestandene Kultur vernichten helfen und die Fähigkeit eingepflanzt, aus den Trümmern eine neue und lebenskräftige Kultur zu erziehen. Mit Unrecht bezeichnet man die auf den Untergang des römischen Reiches folgenden sieben Jahrhunderte als eine Zeit der geistigen Finsterniß oder des Verfalles, sie müssen vielmehr als die Zeit der neuen Erhebung betrachtet werden, welche, wenn man die Macht betrachtet, mit der sie bekämpft wurde, nur langsam vor sich gehen konnte. Die geistige Thätigkeit war in dieser Zeit größer als in der der vorhergehenden Jahrhunderte, denn jene legte ein Fundament, während diese verfallen ließ.

Nordfrankreich, Belgien und England zeigen uns zuerst die geistigen Bestrebungen, welche sogleich hervortraten, als die öffentlichen Zustände sich einigermaßen befestigt hatten. Wie sehr aber das Nachdenken bald wieder erwacht

war, möge ein Beispiel unter vielen zeigen. Johann Scotus Erigena (860) bemühte sich, die Vernunft mit dem Glauben zu versöhnen, er stellte die Vernunft über den Glauben, und suchte beide in Uebereinstimmung zu bringen. Nach ihm ist Gott das Wesen aller Dinge, aus dem Alles hervorgegangen ist und in den sich Alles wieder auflöst; die menschliche Natur ist daher in stetem Fortschreiten nach dem Höheren begriffen, und in der sittlichen Welt waltet freier Wille. Man ersieht aus dieser Stelle, daß Scotus sich nicht bloß auf gewöhnliche Weise mit der Philosophie beschäftiget hatte. Es ist aber auch interessant, das Urtheil der Lyoner Kirchenversammlung über solche Bestrebungen zu erfahren. „Es sind uns die Schriften eines prahlerischen, geschwätzigen Menschen zugekommen, der von der göttlichen Vorhersehung und Vorherbestimmung auf menschliche Weise oder, wie er sich selbst rühmt, mit philosophischen Gründen disputirt, ohne sich auf die heilige Schrift zu stützen und die Auctorität der Kirchenväter beizubringen, sondern er wagt dieß aus sich zu vertheidigen und auf seine eigenen Gesetze zu stellen, ohne sich den göttlichen Schriften und Auctoritäten der Väter zu unterwerfen." —

Beda, ein Engländer (671—735), hat sich in allen Zweigen des menschlichen Wissens versucht und uns auch manche schätzbare Nachrichten hinterlassen. In einer Abhandlung über die Zahlen erzählt er, daß unter den Griechen zuerst Pythagoras die Zahlenlehre betrieben habe und dann später Nikomachus. Unter den Römern bezeichnet er Appulejus als den ersten Schriftsteller über Arithmetik und nach diesem Boëthius. Appulejus aus Madaura in Afrika war im zweiten Jahrhundert einer der ausgezeichnetsten Gelehrten und fruchtbarer Schriftsteller; seiner Richtung nach gehörte er der neuplatonischen Schule an. Wichtiger ist eine andere kleine Abhandlung in den Schriften des Beda unter dem Titel „de numerorum divisione", welcher ein Zueignungsbrief an seinen Freund Constantinus vorhergeht. Man hat diesen Brief, von welchem aber die nachfolgende Abhandlung nicht getrennt werden kann, dem nachher zu nennenden Gerbert zugeschrieben und darin die Auseinandersetzung der Rechnungsweise der Inder finden wollen. Wer nun aber der Urheber beider Stücke sein mag, so läßt sich doch aus dem Briefe wie aus den Regeln der Abhandlung, trotz mancher Dunkelheiten, unschwer erkennen, daß hier nur das Columnensystem des Boëthius erklärt werden soll, keineswegs aber die später durch die Araber eingeführte Methode der Inder. Da nun Boëthius von Beda angeführt wird und der Verfasser des Briefes und der Abhandlung erklärt, daß er seit Jahren über diesen Gegenstand, weder ein Buch in Händen gehabt, noch auch sich mit demselben beschäftiget habe, sondern Alles sich wieder in das Gedächtniß zurückrufen müsse, so dürfte es nicht unwahrscheinlich sein, daß Beda wirklich der Verfasser war, und um so mehr als es sich hier nicht um einen neuen Gegenstand, sondern um einen längst bekannten handelte.

Die deutschen Fürsten verläugneten bei aller Unterstützung, welche sie der Kirche und ihren Bestrebungen gewährten, dennoch nicht ihren germanischen Charakter. So haben Karl der Große in Frankreich, und Alfred der Große in England für die Wiederbelebung der Wissenschaften, für ihre Zeit, Außerordentliches geleistet. Der gelehrte Engländer Alkuin, ein Schüler Beda's, leitete Karl in seinen Bestrebungen, und jetzt wurde auch schon der Grund gelegt zu jenen gelehrten Vereinen, welche später unter dem Namen der Universitäten hervortraten.

Man wollte durch sie allerdings nur Stützpunkte schaffen für die Kirche gegen die Angriffe auf dieselbe, welche sich immer mehr häuften, sie entsprachen auch im Anfange ihrem Zwecke; wie es aber in der Regel bei solchen Dingen

zu gehen pflegt, sie förderten zuletzt doch das wahre Wissen und die freie Wissenschaft. In den Schriften Beda's findet sich Einiges, was Alkuin zugeschrieben wird; noch andere Abhandlungen sind von ihm vorhanden, welche nicht ohne Interesse sind. Dahin gehören die arithmetischen Aufgaben zur Uebung für die Jugend, welche beweisen, daß man in der Auflösung solcher Aufgaben nicht sehr ungeschickt sein konnte, und daß die Neigung zu diesem Zweige der Mathematik noch vorherrschend war.

Wir übergehen die ganze Reihe von Männern, die bemüht waren, das ganze Wissen ihrer Zeit sich anzueignen oder es zu verbreiten; Neues konnte natürlich jetzt noch nicht geschaffen werden, es war die Zeit der Vorbereitung und des Ueberganges. Die Geister waren thätig, aber das Vorhandene mußte gewissermaßen erst erschöpft werden, ehe die Menschen sich gedrungen fühlten, neue Quellen aufzusuchen. Das Kloster der Benedictiner zu Fleuri hatte durch den wissenschaftlichen Eifer seines Abtes Abbo einen hohen Ruf erlangt, und der Orden sandte fähige Männer dahin, um daselbst ihre Studien zu machen. Unter diesen war Gerbert, der später zum Papste erwählt, als Sylvester II. 1003 gestorben ist. Er studirte zuerst in Fleuri die Mathematik und da ihm das, was er hier zu erlangen vermochte, nicht genügte, so erhielt er die Erlaubniß, nach Spanien zu gehen und dort seine Studien fortzusetzen. Es waren nämlich 711 die Araber schon nach Spanien gekommen und hatten, wie in Asien, so auch hier die Wissenschaften in Aufnahme zu bringen gewußt. Der Ruf ihrer Gelehrsamkeit hatte sich verbreitet, und wie einst die Griechen nach Aegypten, so zogen jetzt Gelehrte aus den christlichen Staaten nach Spanien, um sich daselbst zu unterrichten. Wir kennen von solchen Vorgängen immer nur einzelne Fälle, und was von Gerbert erzählt wird, ist sicher schon von andern vor ihm geschehen, nur daß uns davon keine Kunde geworden ist. Was nun die mathematischen Arbeiten Gerberts betrifft, so kann man wohl sagen, daß sie nicht aus dieser Quelle geflossen sind, da sie weder der Form, noch dem Inhalte nach das Gepräge der arabischen Wissenschaft tragen. Von der Abhandlung über Arithmetik ist schon oben bei Beda die Rede gewesen, aber auch seine Geometrie ist ganz nach dem Muster der lateinischen Schriftsteller gearbeitet, und wie bei diesen hat sie auch eine mehr praktische Bestimmung. Er setzt zuerst die römischen Maße auseinander und geht dann zu den pythagoräischen Dreiecken über. In Bezug auf diese Dreiecke löst nun aber Gerbert eine für seine Zeit schwierige Aufgabe, welche auf eine Gleichung vom zweiten Grade führt, nämlich aus dem Inhalte und der Hypotenuse eine Kathete zu finden. Im Dreiecke, dessen Seiten 13, 14, 15, lehrt er die Höhe aus den Seiten finden, aber die bekannte Formel für die Fläche aus den Seiten gibt er nicht an. Es finden sich hier ferner die falschen Vorschriften der römischen Feldmesser zur Berechnung der Flächen, welche früher erwähnt worden sind. Hieraus läßt sich noch kein Schluß ziehen über das, was Gerbert den Arabern verdankt, da wir auch außerdem nicht wissen, wie weit die spanischen Araber selbst gekommen waren. Die wichtigste Frage bleibt immer, ob Gerbert das indische Zahlensystem zuerst eingeführt hat oder nicht; aus der Abhandlung bei Beda geht dieß nicht hervor; es würde aber entschieden sein, wenn sich nachweisen ließe, daß er in seinen Schriften von den arabischen Zahlen Gebrauch gemacht hat. So lange dieß nicht der Fall ist, müssen wir annehmen, daß nur von dem Columnensystem und der pythagoräischen Rechnungsweise die Rede ist, welche schon von Boëthius „Abacus" genannt wurde. Als Zeitgenossen und Schüler Gerberts nennt man Adelbold, Bischof von Utrecht, Heriger, Abt von St. Gallen und Bernelin, die auch sämmtlich über Arithmetik geschrieben haben; zum Theil

waren ihre Schriften Commentare zur Arithmetik des Gerbert. Aus dem elften Jahrhundert haben sich außer den genannten nur noch wenige Namen von Männern erhalten, die durch ihre Kenntnisse in den mathematischen Wissenschaften sich ausgezeichnet haben, obschon aus anderen Erscheinungen geschlossen werden kann, daß dieselben immerfort kultivirt wurden.

Im zwölften Jahrhundert folgte Adhelhard, ein englischer Mönch, dem Beispiele Gerberts; er ging ebenfalls nach Spanien und selbst nach Aegypten, wo er das Arabische erlernte und unter andern Werken auch die Elemente Euklids aus dieser Sprache übersetzte. Diese Uebersetzung zeichnete sich dadurch von früheren ähnlichen Arbeiten aus, daß sie außer den Sätzen auch die Beweise derselben enthielt, was einen sehr beachtenswerthen Fortschritt beweist. Noch weiter verdient aber bemerkt zu werden, daß er dieser Uebersetzung sogar einen Commentar beigab. Man hat in neuerer Zeit Spuren gefunden, welche darauf hinweisen, daß in England die Elemente Euklids schon vor Adhelhard bekannt waren; schwerlich dürften diese aber von anderer Beschaffenheit als die des Boëthius gewesen sein.

Gerard von Cremona (1114—1187) ging gleichfalls nach Spanien, studirte in Toledo die arabische Sprache und übersetzte Werke aus allen Wissenschaften, welche die Araber kultivirten. Er hat die erste Uebersetzung des Almagest geliefert, und bei dem Umfange seiner Arbeiten ist es kaum glaublich, daß sie nicht auch die Arithmetik und Algebra umfaßt haben sollten, was indessen nicht hinreichend nachgewiesen ist. Plato von Tivoli übersetzte um 1120 die Sphärik des Theodosius aus dem Arabischen und eben so aus dem Hebräischen die Geometrie des Juden Savosarda. Diese Geometrie ist bemerkenswerth, weil es scheint, daß durch sie zuerst die Formel für die Fläche des Dreiecks aus den drei Seiten, eine größere Verbreitung erlangt hat; der Verfasser gibt keinen Beweis dazu, erklärt aber, ihn nur seiner Schwierigkeit wegen ausgelassen zu haben. Außerdem enthält sie die ersten Spuren der Algebra und eine Tafel der Sehnen mit arabischen Ziffern. Gleichfalls mit arabischer Wissenschaft vertraut waren Rudolph von Brügge und der Jude Johann von Sevilla.

Alles, was hier hat angeführt werden können, sind bloß einzelne Vorgänge bei dem großen Prozesse, welcher langsam war vorbereitet worden und nun gegen das Ende des zwölften Jahrhunderts eine kräftigere Entwicklung genommen hatte. In Spanien war zuerst die Verbindung mit den Arabern angeknüpft worden, und hatte sich allmälig über Afrika bis nach Aegypten und Syrien ausgebreitet. In den Kreuzzügen lag bloß jene instinktartige Nöthigung, welche die Menschen antreibt, solche Verbindungen zu suchen, als deren Ziel wir stets die höhere Entwicklung zu betrachten haben. Dieses obgleich feindliche Zusammentreffen der beiden entgegenstehenden Theile hob dennoch den Verkehr außerordentlich, und wir müssen annehmen, daß die Früchte davon bei weitem größer waren, als die Reste der schriftlichen Denkmäler aus dieser Zeit uns nachweisen. Wir haben gesehen, wie jetzt schon griechische Werke aus dem Arabischen übersetzt wurden, und man wird sich darüber nicht verwundern, wenn man bedenkt, daß dieser Verkehr schon durch einige Jahrhunderte hindurch geführt wurde. Das Ergebniß konnte jedoch kein größeres sein, weil in dieser Zeit die Araber eben auch erst heranreiften und ihr Wissen nicht so plötzlich auf andere Völker übertragen werden konnte. Es ist namentlich ein Verhältniß, die Rechenkunst betreffend, nicht zu übersehen. Das eigentliche Rechnen, d. h. die Art der Ausführung der Geschäfte mit Zahlen hatten die Griechen „Logistik" genannt; Archimedes und Apollonius hatten gezeigt, daß die Griechen im Stande waren,

jede noch so große Zahl, durch ihre Zeichen darzustellen, auch die Römer hatten ihre beschränkte Bezeichnung zu verbessern gewußt. Dieß Alles mag zu einiger Erleichterung der Rechnungen geführt haben: wesentliche Veränderungen konnten aber dadurch nicht erzeugt werden. Die Zeit verlangte jedoch hierin eine Verbesserung und die ersten Spuren dazu haben wir in dem System des Boëthius gefunden. Diese Rechnungsweise wurde, wie die griechische durch Logistik, durch den Ausdruck Abacus oder Abacus Pythagoricus, d. h. die Rechnung nach der pythagoräischen Tafel, bezeichnet. Es mag der Ausdruck Abacus später wieder in Abgang gekommen und die Rechnungsweise bloß die pythagoräische genannt worden sein. Gegen die Zeit, zu welcher wir jetzt übergehen, tauchte aber ein anderer Ausdruck „Algorismus" auf, welcher eben so eine besondere Rechnungsweise zu bezeichnen scheint. Wie diese Rechnungsweisen sich zu einander verhalten haben, worin sie verschieden waren, ist unbekannt, nur so viel darf man mit Sicherheit annehmen, daß sie nicht das indische System bezeichneten, wenn sie demselben auch nahe gestanden haben mögen. Den Arabern war das indische System in der ersten Hälfte des achten Jahrhunderts noch nicht bekannt, aber im neunten muß es eingeführt worden sein. Es läßt sich nun nicht annehmen, daß dieses System sich augenblicklich über das ganze große Reich der Araber sollte verbreitet haben, auch dazu war eine längere Zeit nöthig. Ein anderer beachtenswerther Umstand ist, daß die arabischen Zahlzeichen mit den unserigen durchaus nicht übereinstimmen, und auch nicht, mit Ausnahme der 9, daraus hervorgegangen sein können, wohl aber stimmen diese mehr mit den Zeichen, die in dem Manuscripte des Boëthius stehen, überein. Dazu kommt noch, daß die Araber sich nicht der Null, sondern eines Punktes dafür bedienten. So sicher es nun ist, daß wir das indische System mit seiner leichten Praxis durch die Araber erhalten haben, so sicher scheint dasselbe seine Vorgänger gehabt zu haben, welche es vorbereiteten und seinen Eingang erleichterten. Wir erkennen sie noch in unseren Zahlenzeichen, und wenn sie selbst nicht zur Ausbreitung gelangen konnten, so lag es nur an der Schwerfälligkeit ihrer Regeln, worüber man zum Beweise nur die Stellen bei Boëthius und Beda nachlesen darf.

Die Mathematik von der Einführung unseres Zahlensystems bis auf die Erfindung der Buchstabenrechnung.

Sogleich mit dem Anfange des 13ten Jahrhunderts begann für die mathematischen Wissenschaften eine neue Zeit. Nach allen Vorbereitungen, deren Entwickelung wir kennen gelernt haben, wurden jetzt erst das indische Zahlensystem und die Algebra im christlichen Europa eingeführt. Ein Kaufmann aus Pisa, der in Bugia auf der Küste von Afrika eine Stelle bekleidete, ließ seinen Sohn Leonardo Bonacci zu sich kommen und veranlaßte ihn, bei den Arabern die Arithmetik zu studiren. Dieser kam nun in der Folge auf seinen Geschäftsreisen nach Aegypten, Syrien, Griechenland, Sicilien und das südliche Frankreich; überall unterrichtete er sich über die in diesen Ländern gebräuchlichen Rechnungsweisen und erkannte dabei, daß die indische Methode allen vorzuziehen sei, daß sie selbst den Algorismus und die Methode des Pythagoras übertreffe und diese ihm wie Irrthümer gegen die indische vorgekommen seien. Dieses Verhältniß war für die Wissenschaft ein höchst glückliches; Bonacci hatte Gele-

genheit, Alles, was Bedeutendes über diesen Gegenstand existirte, kennen zu lernen und war dadurch im Stande, den Werth der verschiedenen Methoden gegen einander zu würdigen. Wir ersehen aber auch hieraus, daß er zwei Methoden besonders hervorhob und sie vor den übrigen auszeichnete. Diese Methoden mögen der seinigen nicht viel nachgestanden haben, aber der Gebrauch der Columnen und die schwerfälligen Regeln mögen ihm gleichwohl wie Irrthümer gegen seine eigene einfache Rechnungsweise vorgekommen sein. Es dürfte nun auch gar nicht unwahrscheinlich sein, daß er die Zahlzeichen, welche er bereits im Gebrauche fand, statt der arabischen aufnahm und dabei auch die Null allgemein einführte. Eben so dürfte auch daraus, daß er seine Methode mit dem Namen Abacus bezeichnete, die Verwandtschaft derselben mit der früher so genannten hergeleitet werden können. Die einfache Mittheilung Bonacci's, über diese Sache, in seiner Einleitung, verbunden mit dem Verlaufe der früheren Entwickelung, läßt nun keinen Zweifel zu, daß er wirklich zuerst das indische Zahlensystem bei uns eingeführt und mit um so größerem Erfolge, als er sich dem Bestehenden angeschlossen hat, dessen genaue Kenntniß wir bei ihm nothwendig voraussetzen müssen. Mit der Einführung dieses Systems beginnt eine neue Aera in der Geschichte der Mathematik, und es hat selbst eine allgemeine Bedeutung durch seinen Einfluß auf verschiedene Zweige des menschlichen Wissens, namentlich auf die Naturwissenschaften, die ihrerseits immer mehr umgestaltend auf alle unsere Lebensverhältnisse eingewirkt haben und einwirken werden.

Das in Rede stehende Werk Bonacci's besteht aus 15 Kapiteln, von welchen die ersten 14 die Rechenkunst und ihre Anwendung auf das Geschäftsleben enthalten. Das 15te Kapitel besteht aus drei Theilen; der erste Theil behandelt Fragen über geometrische Proportionen, welche auf Gleichungen des zweiten Grades führen; der zweite enthält Einiges aus der Geometrie, und in dem dritten wird die Auflösung der Gleichungen des ersten und zweiten Grades gelehrt. Nach seiner eigenen Angabe war Bonacci mit den Elementen des Euklid bekannt, wahrscheinlich nach arabischen Uebersetzungen; dieß zeigt auch die Behandlungsweise des ersten Theiles des 15ten Kapitels, in welchem die Zahlen durch Linien ausgedrückt werden. Die Linien werden von ihm für bekannte und unbekannte Zahlen gesetzt, zuweilen aber auch blos die Zeichen dafür, was man nicht mit dem Gebrauche der Buchstaben in den Rechnungen verwechseln darf. Der dritte Theil ist offenbar aus der Algebra von Mohammed ben Musa genommen, die Behandlungsweise der Gleichungen ist ganz dieselbe, oft werden sogar die gleichen Worte und Beispiele gebraucht. In den Beweisen weicht Bonacci größtentheils von diesem Araber ab, so z. B. in dem für die Gleichung $x^2 + 10x = 39$, welcher ebenfalls geometrisch, aber einfacher ist. Außerdem kommt auch Neues vor, z. B. die Auflösung der Gleichung $(x + \sqrt{x})(3x + \sqrt{3x}) = 30x$. Unbestimmte Aufgaben werden einige aufgelöst, z. B.: Wenn $a^2 = m^2 + n^2$ ist, so soll man zwei Zahlen x und y finden, für welche ebenfalls $a^2 = x^2 + y^2$. Man nehme zwei Zahlen p und q, deren Quadratsumme wieder ein Quadrat ist, also $p^2 + q^2 = b^2$, so ist $x = \frac{p\,a}{b}$ und $y = \frac{q\,a}{b}$. In ähnlicher Art wird die Auflösung der Aufgabe gefunden: Wenn $m^2 + n^2 = a$, zwei Zahlen x und y zu finden, für welche auch $x^2 + y^2 = a$. Er sucht eine Zahl b, so daß ab^2 die Summe zweier Quadrate ist, $p^2 + q^2 = ab^2$; alsdann ist $x = \frac{p}{b}$ und $y = \frac{q}{b}$. Ist z. B. im zweiten

Falle $4^2 + 5^2 = 41$ gegeben und soll auch $x^2 + y^2 = 41$ sein, so setze man $b = 5$ also $b^2 = 25$ und $ab^2 = 41 . 25 = 1025 = 64 + 961 = 8^2 + 31^2$, so ist $x = \frac{8}{5}$ und $y = \frac{31}{5}$.

Es würde ganz überflüssig sein, ermitteln zu wollen, was von all diesen Dingen Bonacci angehört und was er von den Arabern entlehnt hat. Der Calcül war die stärkste Seite derselben, aber gerade hier wissen wir nicht, wie weit sie gekommen waren, d. h. wie weit sie in die Untersuchungen der Inder, des Diophantus und des Nikomachus eingedrungen waren. Die mitgetheilten Aufgaben erinnern an Diophantus. Indessen läßt sich nicht läugnen, daß die Art, wie Bonacci seinen Gegenstand behandelt, viel Eigenthümliches hat, was eine freie Auffassung bezeugt. Es tritt bei ihm schon das abendländische Element hervor, seine Behandlungsweise ist gleichmäßig; er ist Herr über seinen Gegenstand und sichtlich leuchtet der Einfluß der griechischen Mathematik hervor. Die Schrift über die Arithmetik erschien zum ersten Male 1202 und dann wieder in verbesserter Gestalt 1228. In der Zwischenzeit hatte er eine praktische Geometrie geschrieben, in welcher sich auch die bekannte Formel für die Fläche des Dreiecks aus den drei Seiten befindet, sie erschien 1220. Eine dritte Schrift über die Quadratzahlen soll viel Interessantes enthalten haben. Die Griechen allein hatten die Mathematik um ihrer selbst willen betrieben als reine Geistesübung, bei den Indern war sie nur Mittel zum Zweck; die Araber neigten sich mehr der letzten Richtung zu und die dürftigen Sätze der abendländischen Gelehrten waren nur der Anwendung wegen da. Auch in Italien fand jetzt die Mathematik nur in so fern Berücksichtigung, als sie nützliche Anwendungen zuließ. Bonacci folgte natürlich dieser Richtung, aber in seiner Schrift über die Quadratzahlen scheint er sich schon theoretischen Speculationen hingegeben zu haben, wenn sie nicht eine bloße Mittheilung aus dem Arabischen war. Wie groß nun aber auch das Verdienst dieses Mannes war, seine Landsleute zollten ihm wenig Anerkennung; seine Studien erschienen ihnen noch als Träumereien und in ihren Augen war er nur ein geschwätziger Müßiggänger: so sehr hatten die materiellen Interessen noch die Oberhand über die geistigen.

So waren denn nunmehr die griechische und indische Wissenschaft in das Abendland übergegangen, und beide durch die Araber verbundene Ideenkreise begannen jetzt ihren Kampf auf einem andern Schauplatze und mit andern Kämpfern. Dieses Verhältniß war von wesentlichem Einfluß auf die Gestaltung der Mathematik: sie entwickelte sich in jener Form, zu welcher der Grund schon in der alexandrinischen Schule gelegt worden war und welche von Indien aus, durch die Vermittelung der Araber, eine höhere Bedeutung erhalten hatte. In dieser Form wurde die Mathematik vorzüglich geeignet zur Anwendung auf die Naturwissenschaften, so wie auf alle Verhältnisse des Lebens, und dadurch übte sie einen bedeutenden Einfluß auf die neue Gestaltung der Dinge aus. Neben dieser Richtung, welche unmerklich sich Bahn gebrochen hatte, zuerst von den Lateinern bewahrt, dann durch den Verkehr mit den Arabern wieder angeregt und zuletzt von Bonacci nach Italien verpflanzt, gewann nun aber auch die alte griechische Geometrie wieder Boden.

Die Elemente Euklid's waren schon aus dem Arabischen in's Lateinische übersetzt worden, eben so die Sphärik des Theodosius und der Almagest. Aus den Werken des Archimedes war gleichfalls Manches bekannt, wahrscheinlich durch die Vermittelung der Araber, denn einer Uebersetzung geschieht noch keine Erwähnung. Im 13ten Jahrhundert wurden nun die Elemente durch Cam-

panus von Novara von Neuem aus dem Arabischen in's Lateinische übersetzt, oder wie auch behauptet wird, er benutzte die vorhandene Uebersetzung Adhelhard's und fügte ihr seine Erläuterungen bei. Campanus hat das Verdienst, daß durch ihn die Elemente erst verbreitet worden sind, und bei allen spätern Ausgaben hat seine Arbeit immer Berücksichtigung gefunden.

Johann von Halifax, gewöhnlich Sacro-Bosco genannt, lehrte zu Paris und starb daselbst 1256; er hatte sich durch einen Auszug aus dem Almagest einen dauernden Ruf erworben. Dieses Buch enthielt nur die elementarsten Lehren aus der Astronomie und wurde eben dadurch von allgemeinem Nutzen, indem es bei vierhundert Jahre lang in den Schulen beim Unterrichte gebraucht wurde. In den astronomischen Schriften dieses Gelehrten sind die Rechnungen schon nach der indischen Methode ausgeführt und die Zahlzeichen haben beinahe die Form, wie die jetzt gebräuchlichen. Ueber diese Arithmetik hat Sacro-Bosco ein Werk in Versen geschrieben, in welchem er 9 Operationen ausführen lehrt, und diese Eintheilung ist lange noch beibehalten worden. — Ungefähr um dieselbe Zeit lebte Jordanus Nemorarius, der in der Art des Nikomachus über die Eigenschaften der Zahlen geschrieben hat; viele Sätze sind dem Boëthius entlehnt. Dieses Werk ist mit einem Commentare des Jakob Faber 1496 in Paris gedruckt worden. Außerdem hat Jordanus aber auch eine praktische Arithmetik für das indische Zahlensystem geschrieben, welche aber Manuscript geblieben ist. Ueber Geometrie, Optik und Mechanik hat derselbe gleichfalls einige Werke verfaßt.

Wahrscheinlich in die erste Hälfte des 13ten Jahrhunderts gehört eine italienische Algebra aus dem Arabischen übersetzt von Wilhelm von Lunis, unter dem Titel: Regola dell' Agabar. Der Ausdruck Agabar scheint entstellt aus Ajabar oder Arjabar, ein Name, mit welchem die Araber den indischen Astronomen und Mathematiker Aryabhatta bezeichneten, so daß dieses Werk die Doctrinen dieses berühmten Gelehrten enthalten haben könnte. Aus dieser Zeit erwähnen wir noch ein kleines Werk des griechischen Mönches Maximus Planudes, welches weiter keinen Werth hat, als daß es die Rechnungsweise der Inder erklärt und dadurch beweist, daß sie auch im griechischen Reiche Eingang gefunden hatte. Albert Grott, gewöhnlich Albertus Magnus genannt, besaß eine ausgebreitete Kenntniß der arabischen Werke; er war ein fruchtbarer Schriftsteller und seine Arbeiten dehnten sich über alle Zweige aus, welche man zur Mathematik rechnete; sie sind aber nicht auf uns gekommen.

Die genannten Gelehrten des 13ten Jahrhunderts hatten, theils durch die Uebersetzungen der griechischen Werke, theils durch die Einführung der arabischen Mathematik, theils dadurch, daß sie zur Verbreitung und zum besseren Verständnisse derselben beigetragen, sich nicht nur um die Mathematik, sondern auch um die Wissenschaften im Allgemeinen große Verdienste erworben. An eine eigene freie Thätigkeit konnte jedoch noch nicht gedacht werden, und man wird nicht zu viel sagen, wenn man behauptet, daß in der reinen Mathematik wenigstens nichts Neues zum Vorschein gekommen ist. Neben der Philosophie, welche in den Dienst der Kirche getreten war und die Tradition genießbar zu machen suchte, aber die Vernunft verwarf, zeigte sich jetzt schon eine andere, deren Grundsatz die freie Forschung war, obschon davon noch keine Anwendung auf die Theologie gemacht wurde. In Italien, Frankreich, England und Spanien bestanden zwar schon längere Zeit Universitäten, aber die Art, wie die Wissenschaften meistens gelehrt und getrieben wurden, war nicht geeignet, dem geistigen Leben neuen Aufschwung geben zu können. Einzelnen Männern, besonders aus dem geistlichen

Stande, war es vorbehalten, die Geister anzuregen und die Welt in eine freiere Richtung zu bringen.

Ein solcher kräftiger Geist war Roger Bacon, ein Engländer, geboren 1214 in der Nähe von Ilchester. Er studirte zuerst in Oxford und vollendete seine Studien in Paris. Nach England zurückgekehrt, trat er in den Franziskanerorden und dehnte seine Studien über die meisten der damals kultivirten Wissenschaften aus. Mit der Mathematik muß er, nach seinen andern Arbeiten zu schließen, wohl vertraut gewesen sein, selbst mit der neuen Zahlenlehre; aber er förderte sie nicht sowohl durch eigene Forschungen, als dadurch, daß er hervorzuheben wußte, welche wichtige Stellung sie in der Gesammtheit der menschlichen Kenntnisse einnimmt, und wie sie für viele Zweige die nothwendige Grundlage sei. Bacon stand hoch über seinen Zeitgenossen durch seinen philosophischen Geist und seine tiefe Einsicht in Alles, was er betrieb. Er war groß in einer Zeit des Aberglaubens, der geistigen Unterdrückung, in welcher über unbedeutende theologische Gegenstände mit lächerlicher Wichtigkeit gestritten wurde, und suchte die Menschen auf die Naturbetrachtung und auf die Forschung durch Versuche hinzuweisen. Er war noch größer dadurch, daß er das Studium der Natur als den rechten Weg bezeichnete zur wahren Erkenntniß Gottes und zu einer sicheren Grundlage der Religion. Ein solcher Geist konnte der Verfolgung nicht entgehen; den aufgeklärten Bacon, der überall nur an die Natur appellirte, traf die Anklage der Zauberei. Mächtige Unterstützung wandte den Schlag noch ab; während der Regierung des Pabstes Clemens IV. blieb er unbelästiget und konnte sein großes Werk vollenden (1266); aber nach dem Tode dieses Pabstes wurde er wiederholt in das Gefängniß geworfen, seine Schriften verboten und seine Lehren verdammt. Endlich vermochten seine Freunde ihn wieder zu befreien, er verfolgte seine Studien und starb im Frieden 1292 in seinem Kloster zu Oxford.

Vittelio, ein Pole, machte 1270 eine Bearbeitung der Optik des Alhazen bekannt, die hier besonders wegen der Geometrie erwähnt zu werden verdient, welche als eine Art von Einleitung in dem ersten Buche enthalten ist. Diese Geometrie bestand aus einer Reihe Sätze, von denen er in seinem Werke Gebrauch machen mußte; sie waren aus den Elementen des Euklid und den Kegelschnitten des Apollonius genommen, die auch beide genannt werden. Außerdem kommen aber noch andere Sätze vor, welche andern Werken des Apollonius und dem Pappus entlehnt scheinen, die aber von ihm nicht erwähnt werden. Hier bestätiget sich wieder die früher gemachte Bemerkung, daß die Schriften der Griechen und Araber von verschiedenen Seiten her in die Abendländer eingedrungen sind, ohne daß man den Weg angeben kann, oder daß überhaupt Nachrichten davon auf uns gekommen wären, denn aus der Zeit Vittelio's kennt man weder eine Uebersetzung des Apollonius noch des Pappus.

Das 13te Jahrhundert hatte für die Mathematik so reichen Stoff geliefert, daß es nicht befremden kann zu sehen, wie ein neues Jahrhundert dazu gehörte, ihn zu bewältigen. Man darf hierbei nicht vergessen, daß es sich nicht um eine passive Aufnahme des Dargebotenen handelte, sondern daß dieses nur das Material zu einem neuen Gebäude werden sollte. Unstreitig war die Mathematik im 14ten Jahrhundert zu einer größern Verbreitung gelangt, als je vorher im römischen Reiche. Dies ist in neuerer Zeit nachgewiesen worden, und es hat selbst nicht an Versuchen gefehlt, sie zu erweitern. Sie war aber seit ihrer Wiedererhebung immer Hülfswissenschaft geblieben; sie diente der Astronomie, der Optik und Mechanik. In diesem Jahrhundert war sie auch in's Geschäftsleben eingedrungen und die Arithmetik und Algebra wurden besonders auch von

den Kaufleuten studirt, und die meisten Werke darüber sind mit Rücksicht auf diese geschrieben; gerade hierdurch mußten sie aber verhältnißmäßig schnell verbreitet werden. In Italien scheinen besonders Bonacci's Werke einen guten Erfolg gehabt zu haben, wie ähnliche Arbeiten bezeugen. Von diesem Lande aus und ganz in aller Stille erwarb sich die Mathematik ein immer größeres Gebiet.

Wenn auf der einen Seite durch die materiellen Interessen die Mathematik gefördert wurde, so kam sie auch von einer andern Seite her mehr in Ansehn. Die neuplatonische Philosophie hatte seit Scotus Erigena immer mehr Anhänger gefunden und nach und nach festere Wurzel gefaßt. Die Anhänger dieser Richtung, sei es nun, daß sie die Dogmen auf die Vernunft zurückzuführen und sie aus einer Quelle wie die Sätze der Geometrie herzuleiten versuchten, oder, daß sie ihre Betrachtungen an die Natur knüpften und durch ihre Erforschung zur Erkenntniß Gottes gelangen wollten, — hatten in beiden Fällen die Mathematik nöthig. Von der letzten Art waren die Bestrebungen Bacon's, den ersten Weg versuchte Thomas von Bradwardin, Erzbischof von Canterbury, einzuschlagen. Von diesem gelehrten Engländer hat man eine Geometrie, wahrscheinlich gegen 1344 herausgegeben, welche nach Boëthius, Campanus, Euklid, Archimed und Theodosius ausgearbeitet ist, außerdem aber auch eine von Campanus angeregte Untersuchung über die sternförmigen Vielecke enthält. Viele andere Schriftsteller, besonders Italiener und Engländer, könnten hier noch angeführt werden und ihre Zahl wird sich bei weiteren Forschungen noch vermehren, aber durch ihre Arbeiten ist die Wissenschaft nicht erweitert worden; dieses war dem nächsten Jahrhundert vorbehalten.

Die Wissenschaften waren nunmehr in alle civilisirten Länder eingedrungen, hatten aber nur in beschränkten Kreisen Verbreitung gefunden. Wie schon erwähnt, hatten sie in den Klöstern Zufluchtsstätten erhalten; von ihnen waren von Zeit zu Zeit ausgezeichnete Männer hervorgegangen, die durch ihre geistigen Erzeugnisse Kunde gaben von den Bestrebungen und Fortschritten ihrer Zeit. Ein gewisser Unabhängigkeitssinn hatte sich allmälig entwickelt und schon waren ihm zahlreiche Opfer gefallen. Mit eiserner Strenge hatte die Kirche jede Meinungsäußerung, jedes Resultat der Forschung zu unterdrücken gesucht, von welchem ein entfernter Widerspruch gegen die Auctoritäten derselben hätte abgeleitet werden können. Aber dem höchsten Gesetze gegenüber, dem Gesetze des Fortschrittes, gibt es keine Macht, keine Gewalt, ihn zu vernichten, ja nur ihn aufzuhalten. Von Italien war die neue Bewegung in dem Gebiete des Geistes ausgegangen, aber jenes Land konnte sie nicht hegen; die Blüthe des Geistes gedeiht nur bei allseitig unverkümmerter Entfaltung, und hier wurde ihr meistens nur das Entgegengesetzte zu Theil. Der theoretischen Mathematik als einem Spiele des Geistes und auch ihrer Anwendung auf das Geschäftsleben wird man wohl nirgends hindernd entgegengetreten sein; in ihrer neuen Gestalt hatte sie aber eine andere Bedeutung gewonnen: unsere höchsten Interessen sollten durch sie gefördert werden, sie war in diese Form eingetreten, um uns die Natur und die Offenbarung Gottes in ihr zu erschließen. Wenn nun schon durch die Hebung des reinen Denkens die Mathematik den Bestrebungen der Kirche entgegenarbeitete, so war dies noch viel mehr der Fall in ihrer Verbindung mit den Naturwissenschaften, zunächst der Astronomie. Dieses Verhältniß war anfänglich unbeachtet geblieben, und die materiellen Interessen erforderten außerdem gebieterisch die Begünstigung jener geistigen Produktionen, durch welche allein sie gedeihen konnten. Daher das Schwanken und die Inconsequenz in der Behandlung dieser Angelegenheit von Seiten der Kirchenhäupter, und, wie

bei allen derartigen Kämpfen, der Streit wurde von beiden Seiten nicht mit Bewußtsein geführt. Die eigenthümlichen Verhältnisse Italiens begünstigten aber den Widerstand, dessen Früchte jedoch andern Völkern zufallen sollten. Und so sieht man nur von Zeit zu Zeit glänzende Erscheinungen hier auftauchen, die allgemeinen Zustände aber immer wieder zurückfallen. Das brittische Inselreich war schon durch seine Lage mehr von der Ungunst solcher Verhältnisse verschont geblieben, und frei und mächtig erhob sich hier die geistige Freiheit. Frankreich war in der allgemeinen Bewegung nicht zurück geblieben, aber Spanien stand noch außerhalb dieses Kreises. Ueber den Zustand der geistigen Thätigkeit und der Wissenschaften in Deutschland hat man nur dürftige Nachrichten, allein die Erscheinungen des 15ten Jahrhunderts zeigen, daß auch hier die Fortschritte bedeutend gewesen sein müssen, und daß die Wissenschaften schon längere Zeit Eingang und Verbreitung gefunden hatten.

Die griechische Sprache war zwar bis jetzt beinahe unbekannt geblieben, aber die Hauptwerke der griechischen Mathematiker hatten fast alle, aus arabischen Uebersetzungen, ihren Weg in die abendländischen Reiche gefunden, ohne daß man in den meisten Fällen Genaueres darüber angeben kann. Solche Uebersetzungen sind wahrscheinlich später von denen bekanntern Ursprunges verdrängt worden und dadurch in Vergessenheit gekommen. Eben so hatten die Arithmetik und Algebra auf diese Weise in Deutschland Eingang gefunden; wir kennen als Quelle nur die Schriften Bonacci's, aber sicher waren auch noch andere Wege vorhanden. Es kann kein Zweifel sein, daß alle diese Werke auch in Deutschland verbreitet waren; schon durch den lebhaften Verkehr mit Italien war dieses Verhältniß geboten, wenn wir auch sonst keine andere Quelle annehmen wollen. Deutschland mußte nun wirklich schon lange an dem allgemeinen Fortschritte Theil genommen haben, denn nur hieraus kann es erklärt werden, daß man sich hier schon kräftig und mit Gewalt dem geistigen Drucke zu widersetzen anfing. Bald sollten Johann Huß und Hieronymus von Prag, angeregt durch Wiklef's Schriften, als Opfer ihrer Bestrebungen fallen. Dies war das Vorspiel der großen Bewegung, durch welche eine beispiellos rasche Entwickelung der Menschheit herbeigeführt werden sollte.

Der erste Mann, der im 15ten Jahrhundert der Mathematik einen neuen Impuls gab und uns zugleich einigen Aufschluß verschafft über den Zustand dieser Wissenschaft in Deutschland, war Georg Purbach, so genannt von seinem Geburtsorte Peurbach in Baiern, wo er 1423 geboren wurde. Die Universitäten Prag (1348) und Wien (1356) waren kurz nach einander gestiftet worden; ihnen folgten bald Heidelberg (1386), Cöln (1388) und Erfurt (1392). Die Stiftung so vieler gelehrten Anstalten, welche die Bestimmung hatten, die Wissenschaften zu hegen und zu verbreiten, bewies das Bedürfniß der Zeit und wie allgemein schon das Bemühen war, sich in höheren Dingen zu unterrichten. In Wien, wo Purbach studirte, wurde die Mathematik oder vielmehr die Astronomie von Johann von Gmünden († 1442) gelehrt, der zugleich Professor der Theologie war. Dieses Mannes Thätigkeit, so wie seine Kenntnisse können nicht unbedeutend gewesen sein; er hatte treffliche Schüler gebildet, und die Kenntnisse, welche Purbach in Wien sich erworben, waren so ausgezeichnet, daß, als er auf seinen Reisen in Bologna und Padua Vorlesungen gehalten hatte, man ihn für diese Städte zu gewinnen suchte; er zog es aber vor, seinem Vaterlande zu dienen und wurde gegen 1450 der Nachfolger seines Lehrers. Purbach war Astronom und für die Astronomie war immer noch der Almagest das Hauptwerk. Er unternahm nun eine Arbeit, welche der des Sacro-Bosco ähnlich war und sie ergänzen sollte; nämlich eine Theorie der

Planeten nach dem Almagest ohne die Rechnungen und Beweise. Die arabischen Uebersetzer waren den griechischen Originalen nicht treu geblieben und eben so hatten sich wieder in die lateinischen Uebersetzungen aus Unkenntniß des Gegenstandes viele Fehler eingeschlichen; eine treue Uebersetzung des griechischen Textes war daher sehr zu wünschen. Eine solche war nun auch erst kürzlich von einem Griechen aus Kreta, gewöhnlich Georg von Trapezunt genannt, gefertiget worden und Purbach erhielt sie durch den Cardinal Bessarion. Der Uebersetzer war aber weder Astronom noch Mathematiker, weßhalb auch diese Arbeit sehr mangelhaft ausfiel. Durch eigene Beobachtungen hatte sich Purbach überzeugt, wie fehlerhaft außerdem die astronomischen Tafeln waren, sein Hauptbemühen ging daher dahin, sie zu verbessern, und überhaupt den Almagest in einer neuen Uebersetzung, frei von den gerügten Fehlern, zu geben. Dieses große Unternehmen wurde von ihm zwar angefangen, die Vollendung aber durch seinen frühzeitigen Tod verhindert. Purbach starb in der Blüthe seiner Jahre 1461; man kann ihn wohl den ersten abendländischen Astronomen nennen, denn seine Vorgänger waren nicht über die einfachsten Lehren des Almagest hinausgekommen, weil ihnen die nöthigen mathematischen Kenntnisse abgingen. In ihm hat man den ersten genauer beobachtenden und zugleich rechnenden Astronomen, der auch weiter über den Gegenstand nachgedacht, und hieraus entsprangen denn auch seine besonderen Verdienste um die Mathematik.

Es ist früher angegeben worden, daß die Winkel- oder Kreistheilung bei den Griechen wie bei den Indern dieselbe war, den ganzen Kreisumfang in 360 Grade, die Grade in 60 Minuten u. s. w. Eine Abweichung fand bei der Eintheilung des Radius statt, für welchen die Griechen 60 gleiche Theile annahmen und diese Theile wieder in 60 kleinere Theile theilten; die Inder drückten ihn aber in Theilen des Umfanges aus, so daß auf ihn annähernd 3438 Theile kamen. Bei der letzten Weise hatte man ein gemeinschaftliches Maß für die Bögen und Sehnen und ein Bogen von 57° 18′ entsprach der Länge des Radius, überhaupt konnte man hier leicht die Bogenlängen mit geraden Linien vergleichen. Die Trigonometrie scheint nun vor Purbach wenig Beachtung gefunden zu haben, er aber widmete ihr seine ganze Aufmerksamkeit und brachte sie wieder in Aufnahme, und namentlich führte er in das eben angegebene Verhältniß eine wichtige Aenderung ein. Zuerst nahm er, wie die Araber, die indische Methode der Rechnung mit dem Sinus an und führte in einer neuen Sinustafel statt der griechischen Sexagesimaltheilung die Decimaltheilung ein, was als ein eben so wichtiger Fortschritt angesehen werden muß. Es kann kein Zweifel sein, daß er die Arbeiten der Araber gekannt und benützt hat und durch diese auch mit indischen Vorstellungen vertraut geworden ist. So erwähnt er namentlich das Verhältniß von $\sqrt{10}$ zu 1 und 3927 : 1250 als den Indern angehörig, und gibt an derselben Stelle ein anderes Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser 377 zu 120, in Graden des letzteren, wie dies von den Indern, nur umgekehrt, geschehen ist, und beide Verhältnisse stimmen ziemlich genau überein, denn 377 : 120 ist von 21600 : 6876 nur wenig verschieden. Bei den Berechnungen folgt Purbach dem Gange des Ptolemäus und beweist in seinen einfachen Bemerkungen eine tiefe Einsicht in geometrischen Dingen.

In einer Zeit, in welcher man die Leistungen der Araber in der Mathematik noch nicht kannte, schrieb man Purbach die Erfindung und den Gebrauch des Sinus zu. Wenn nun dies auch nicht der Fall ist, so bleibt ihm doch das große Verdienst, den Gebrauch wenigstens in den Abendländern zuerst eingeführt zu haben; eben so die Decimaltheilung, durch welche die Rechnungen bedeutend vereinfacht wurden. Noch wichtiger aber als durch seine eigenen Leistungen wird

er uns als Lehrer eines Mannes, der immer unter den Mathematikern aller Zeiten eine hohe Stelle einnehmen wird. Dieser Mann war Johannes Müller aus Königsberg in Franken, wo er 1436 geboren wurde; nach der Sitte der damaligen Zeit nannte man ihn daher gewöhnlich Regiomontanus. Man erzählt von ihm, daß er schon im 12ten Jahre sich nach Leipzig begeben habe, um daselbst Astronomie zu studiren, da er aber keine Gelegenheit fand, sich auch mathematische Kenntnisse zu erwerben, so ging er 1451 nach Wien zu Purbach, bei dem er freundliche Aufnahme und Unterstützung in seinen Studien fand. Hier beschäftigte er sich nun besonders mit dem Almagest und den griechischen Mathematikern, die man in lateinischen Uebersetzungen hatte; unter diesen wird nun auch eine von des Archimedes Werken von einem gewissen Jacobo von Cremona angeführt. In Wien lernte er den Cardinal Bessarion kennen, der ein Grieche war, und im Umgange mit diesem erwarb er sich die ersten Kenntnisse der griechischen Sprache. Nach Purbach's Tode wurde er zu dessen Nachfolger im Lehramte ernannt; er hatte sich aber die Erlaubniß erwirkt, den Cardinal vorher nach Italien begleiten zu dürfen. Er benützte den Aufenthalt in diesem Lande, sich so viele Manuscripte zu verschaffen, als ihm möglich war. Der Zeitpunkt war für solche Bemühungen günstig, viele Griechen hatten sich nach der Einnahme Constantinopels durch die Türken, und viele schon vorher nach Italien geflüchtet und einen großen Theil ihrer literarischen Schätze mitgebracht. Jetzt erst wurde die griechische Sprache und Literatur in die Abendländer eingeführt, und jetzt erst lernte man die mathematischen Schriften der Griechen in ihrer unverfälschten Form kennen. Der Zeitpunkt ist merkwürdig, indem von jetzt an die unbeschränkte Herrschaft des indisch-arabischen Elementes in der Mathematik gebrochen wird und das griechische dagegen immer mehr in die Schranken tritt. Dies ist in so ferne wichtig; als jetzt auch das strenge wissenschaftliche Denken wieder gefördert wurde, was dem leichtern Mechanismus des Calculs größere Sicherheit gab. Der Calcul gewann jetzt erst seine wahre Kraft und Bedeutung und entwickelte sich in glänzender Weise.

Regiomontanus, ein gewandter Mathematiker und Kenner des Griechischen, hat die Hauptwerke der Griechen in ihrer Originalsprache gelesen und von den meisten treuere Uebersetzungen geliefert, als die Araber. Die Uebersetzung des Almagest, von Purbach angefangen, wurde von ihm vollendet; zu all diesen Arbeiten lieferte er werthvolle Commentare, welche zugleich seine eigenen Entdeckungen enthielten. Als hierher gehörige selbstständige Arbeiten von Bedeutung sind anzuführen, eine vollständige ebene und sphärische Trigonometrie und eine praktische Arithmetik. In dem ersten Werke gab er dem Gegenstande die Form, welche er bis heute behalten hat, und Regiomontanus zeigt darin, daß er, obschon ein großer Verehrer der Griechen, doch nicht verschmähte, sich der Vortheile zu bedienen, welche die Rechnung darbot. So löste er verschiedene Aufgaben, deren Konstruktion keinen Schwierigkeiten unterworfen war, mit Hülfe der Algebra, und zeigte, wie die unbekannten Stücke berechnet werden können. Hier bewies er, wie sehr vertraut er war mit dieser immer noch seltenen Kunst, welche sein großer Geist aber schnell erfaßt hatte. In der Arithmetik bediente er sich schon der Buchstaben als allgemeiner Zahlzeichen und nur sein früher Tod scheint ihn verhindert zu haben, diesem Gebrauche eine allgemeine Bedeutung zu geben. Durch die Uebernahme von Purbach's unvollendeter Arbeit wurde er auf die trigonometrischen Tafeln hingewiesen, und er führte zuerst den Gebrauch der Tangenten ein, ohne ihnen jedoch diesen Namen zu geben. Die Araber hatten schon 500 Jahre früher diese wichtige Vereinfachung in den trigonometrischen Rechnungen erdacht und Tafeln dafür berechnet; es dürfte daher

wohl die Frage sein, ob er nicht die erste Idee zu seiner Tangententafel aus dieser Quelle geschöpft hat, wenn er auch in der Ausführung seinen eigenen Weg gegangen ist.

Durch Purbach und Regiomontanus war die Mathematik wieder selbstständig geworden, der letzte besonders hatte so umfassende Kenntnisse, daß ihm eine freie Auffassung möglich wurde und er dadurch die ersten Erweiterungen zu schaffen im Stande war. Der Ruf seiner Gelehrsamkeit war so groß, daß ihn der Pabst Sixtus IV. zur Verbesserung des Kalenders nach Rom berief; er machte ihm große Versprechungen und ernannte ihn zum Bischof von Regensburg. Seit 1471 befand er sich in Nürnberg, wo er in freundschaftlichen Verhältnissen lebte mit einem reichen Bürger Bernhard Walther, der ein großer Liebhaber der Astronomie war und die Kosten zur Anfertigung astronomischer Instrumente übernahm und selbst eine Druckerei unterhielt. Auf die Einladung des Pabstes übertrug er Walthern, die Beobachtungen fortzusetzen und begab sich nach Rom, wo er aber schon im folgenden Jahre im Alter von 40 Jahren starb. Wahrhaft bewundernswürdig ist die Menge der Produktionen dieses mit Recht berühmten Mannes, welche er in so kurzer Zeit hervorzubringen im Stande war, besonders wenn man die Schwierigkeiten bedenkt, mit welchen er noch zu kämpfen hatte. Seine hinterlassenen Arbeiten brachte Walther an sich, und als dieser starb, ging Manches durch die Gleichgültigkeit der Erben gegen gelehrte Dinge verloren, aber seine Thätigkeit hatte eine Anregung gegeben, welche nicht verloren war und reiche Früchte trug.

Wie einst in Indien, verdankte auch jetzt die Mathematik ihre neue Erhebung der Astronomie, welche wieder auf der sichern Basis der Beobachtung einer schnellen Entwickelung entgegen ging. Regiomontanus hatte schon Tafeln berechnet, in welchen auf eine ganze Reihe von Jahren zum voraus die Oerter der Planeten angegeben waren, und Walther hatte die Beobachtungen mit aller für seine Zeit und seine Hülfsmittel möglichen Genauigkeit fortgesetzt. Von jetzt an findet man eine große Zahl beobachtender Astronomen in allen Ländern, welche an der allgemeinen geistigen Bewegung Theil genommen hatten. Der Cardinal Nicolaus von Cusa, ein Deutscher, dessen mathematische Arbeiten von keinem besondern Werthe sind, hat dennoch dieser Wissenschaft dadurch genützt, daß er, wie einst Bradwardin, ihre Anwendung und ihren Nutzen hervorhob und sie zu verbreiten suchte. Er soll zuerst unter den Neueren die Bewegung der Erde um die Sonne behauptet haben. Wegen ihrer Kenntnisse in der Mathematik sind noch Albrecht Dürer und Leonardo da Vinci berühmt. Von dem ersten hat man eine Geometrie für Maler, ursprünglich in deutscher Sprache geschrieben, worin unter andern Dingen auch die Zeichnung vieler krummer Linien, z. B. der Kegelschnitte gelehrt wird, was eine der frühesten Erscheinungen war, welche diesen Gegenstand betreffen.

Gegen das Ende dieses Jahrhunderts erschien in Italien ein Werk, welches die Arithmetik, Algebra und Geometrie umfaßte. Der Verfasser war ein Franziskaner, Lucas Pacioli von Burgo San Sepolcro in Toskana, unter dem Namen Lucas de Burgo bekannt. Er hatte den Orient bereist und war später in vielen Städten als öffentlicher Lehrer aufgetreten. Quellen für sein Werk waren ihm Euklid, Boëthius, Bonacci und andere italienische Mathematiker, sowie auch Sacro-Bosco; was er auf seinen Reisen erlernt oder von sich zugefügt hat, läßt sich nicht wohl angeben. Dieses Werk ist eine Fortsetzung der Bemühungen der Italiener um die Algebra, welche ununterbrochen von ihnen kultivirt wurde, und es bildete die Grundlage zu den schönen Erfindungen,

welche man ihnen verdankt. Man darf in diesem Buche keine Erweiterung der Wissenschaft erwarten; es steht kaum auf der Stufe, welche wir wohl für die Araber annehmen müssen, aber es beweist doch die Fortschritte, welche die Algebra indessen gemacht hatte; es werden in demselben Aufgaben gelöst, welche schon einen gewissen Grad von Gewandtheit voraussetzen. Der erste Theil enthält die Zahlenlehre, die Rechnungen mit Wurzelgrößen, die unbestimmte Analytik, wahrscheinlich ganz nach Bonacci, die Gleichungen des 2. Grades und die kaufmännischen und Geschäftsrechnungen sind von beträchtlichem Umfange. Wenn man den Theil ausnimmt, welcher wahrscheinlich nach Boëthius gearbeitet, also der griechischen Arithmetik entlehnt ist, und an welchen sich die unbestimmten Aufgaben anschließen, so trägt das Ganze das Gepräge der Algebra des Mohammed ben Musa, nur ist es umfassender, und die geometrische Darstellung findet gleichfalls oft Anwendung. Man findet hier schon einen weitern Schritt zur Zeichensprache: p und m werden als Anfangsbuchstaben für plus und minus gesetzt; die Zahlen aber noch nicht wie bei Regiomontanus durch allgemeine Zeichen ersetzt. Die Geometrie, obgleich theilweise der griechischen entlehnt, zeichnet sich durch die Anwendung der Algebra auf die Lösung der Probleme aus und trägt dadurch den indisch-arabischen Charakter. Oft ist nur das Resultat der Rechnung angegeben, wo es interessant wäre, zu wissen, wie es erlangt worden ist. Eine Aufgabe ist, z. B. zwei Säcke von gleicher Höhe und gegebenem Inhalte werden der Breite nach zusammengenäht, so daß sie einen Sack bilden, man soll den Inhalt des neuen Sackes angeben; das Resultat ist: wenn A und a die Inhalte der einzelnen Säcke sind, so hat der neue den Inhalt $A + a + 2\sqrt{A\,a}$. Dieses Buch war das erste über Algebra, welches im Drucke erschienen ist, und das schon hierdurch eine größere Verbreitung, als alle frühern erlangt hat. Es ist oben erwähnt worden, daß in Deutschland diese Arte maggiore oder „die große Kunst", wie die Algebra genannt wurde, schon bekannt war, wie denn auch Pacioli von ihr wie von einer bekannten Sache spricht; aber über Italien war sie eingeführt worden, wie die dabei gebräuchlichen Ausdrücke hinreichend beweisen. Man wird bei diesem Werke doch auch öfter an die griechischen Schriften erinnert; so findet man unter Andern ein Porisma wie bei Diophantus. Wenn man zwei aufeinander folgende Zahlen ins Quadrat erhebt und ihre Quadratsumme wieder quadrirt, und nun das doppelte Produkt beider Zahlen mit ihrer doppelten Summe multiplizirt, entweder zu- oder abzählt, so entstehen wieder Quadrate. Sind a und $a + 1$ diese Zahlen, so ist $(a^2 + (a + 1)^2)^2 + 2\,a\,(a + 1).\,2\,(a + a + 1) = (2\,a\,(a + 1) + a + a + 1)^2$ und $(a^2 + (a + 1)^2)^2 - 2\,a\,(a + 1) + 2\,(a + a + 1) = (2\,a\,(a + 1) - (a + a + 1))^2$. Pacioli wendet dieses Porisma an, um eine Quadratzahl zu finden, welche so beschaffen ist, daß, wenn man eine gegebene Zahl zuzählt oder auch abzählt, beide Male Quadratzahlen entstehen. Die Anwendnng ist jedoch sehr beschränkt.

In Deutschland war 28 Jahre später ein ähnliches Werk, aber nicht von demselben Umfange, von einem gewissen Christoph Rudolph aus Jauer herausgegeben worden. Der Verfasser scheint einen Theil des Materials zu seinem Buche aus der Bibliothek zu Wien geschöpft zu haben, und wenn dasselbe der Wissenschaft auch keine Erweiterung gebracht hat, so hat es doch zur Verbreitung derselben wesentlich beigetragen. Man findet in dieser Schrift die ersten Schritte zur Vereinfachung der bisher so sehr getheilten Regeln; so hat er namentlich 24 Regeln über Gleichungen auf 8 zurückgeführt, und außerdem den Anfang zu einer zweckmäßigen Bezeichnung gemacht. Auf die Anleitung

zur Rechnung folgte eine sehr große Zahl von Aufgaben und Anwendungen, und die Auflösungen beweisen, daß die Coss, wie die Algebra auch genannt wurde, in Deutschland nicht neu war. Die Darstellung läßt erkennen, daß Paciolis Werk nicht die Grundlage desselben war, und wahrscheinlich waren schon früher Bonacci's Abacus oder ähnliche Werke italienischer Mathematiker nach Deutschland gelangt. Wie brauchbar übrigens die Schrift Rudolphs war, beweist, daß sie 1540 zu Rom aus dem Deutschen ins Lateinische übersetzt wurde.

Johann Werner aus Nürnberg gehört gewissermaßen noch in dieses Jahrhundert, denn seine Hauptthätigkeit trifft in die letzten Jahre desselben und in den Anfang des nächsten. Der Bildung nach gehörte Werner der griechischen Schule an, doch war ihm als Astronom auch die Rechnung nicht fremd, und durch den Umfang seiner Kenntnisse, so wie durch seine selbstständigen Forschungen verdient er eine ausgezeichnete Stellung unter den Gelehrten seines Jahrhunderts. In seinem Werke über die Kegelschnitte, welches das erste war, das im christlichen Europa erschienen ist (1522), zeigt er sich unabhängig von seinen griechischen Vorbildern, und die Weise seiner Betrachtungen hat später noch Nachahmer gefunden. Er beschäftigte sich auch mit dem Problem der Verdoppelung des Würfels, wobei er sich einer Parabel und einer Hyperbel bediente, eben so auch mit andern Problemen der Alten.

Tausend Jahre hatten die Griechen zur Entwickelung ihrer Mathematik gebraucht und tausend Jahre waren in den Abendländern zu ihrer Wiedererwerbung nöthig. Die erste Hälfte dieses Zeitraums wurde verwandt, um aus den lateinischen Schriftstellern die spärlichen Reste griechischer Weisheit zu erlernen, die zweite Hälfte, um aus arabischen Quellen ein Gemische indisch-griechischer Wissenschaft aufzunehmen. Alles zusammen bildete aber einen Stoff, welcher auch dann noch seine Bedeutung behielt, als die griechischen Werke in ihrer ächten Gestalt bekannt wurden. In der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts war dieser Stoff bewältiget, die bloße Reproduktion hörte auf, die freie Forschung trat wieder ein. Regiomontanus hatte diese neue Periode eröffnet, ihm folgten Pacioli, Werner und Rudolph, auch das Kleine war jetzt groß. Die Erfindung der Buchdruckerkunst begünstigte den Fortschritt durch die Erleichterung der Mittheilung, und die Entdeckung Amerika's hob die Menschen in doppeltem Sinne zu einer neuen Welt empor. Ueberall, in allen Gebieten des Wissens und des Lebens, zeigte sich die gleiche Erscheinung, und schon 1517 begann in Deutschland der Riesenkampf für die freie Forschung. Ehe wir zur Schilderung der Erhebung der neuen Mathematik in diesem Jahrhundert übergehen, mögen vorher erst noch die Uebersetzungen griechischer Werke hier Erwähnung finden. Zamberti aus Venedig übersetzte die Elemente Euklids (1505), und Memmo eben daher (1537) die Kegelschnitte des Apollonius. Da diesen Gelehrten die Kenntniß der Mathematik abging, so fielen beide Uebersetzungen sehr ungenügend aus. Bei weitem den größten Ruf als Uebersetzer und Commentator hat sich der Arzt Commandinus aus Urbino (1509—1575) erworben. Unter seinen vielen Uebersetzungen ist besonders die der mathematischen Sammlungen des Pappus hervorzuheben, weil sie die einzige ist, welche von diesem wichtigen Werke erschienen ist. An Commandinus schließt sich zunächst Maurolycus aus Messina, seiner Herkunft nach ein Grieche; er war, wie jener, nicht nur der griechischen Sprache mächtig, sondern auch ein gewandter Mathematiker. Italien, Frankreich und Deutschland haben in diesem Jahrhundert eine Menge Uebersetzer aufzuweisen, deren Aufzählung weiter nicht interessiren kann. Für die Verbreitung der Geometrie waren besonders die Auszüge und Zusammenstellungen wichtig, welche zum Zwecke des ersten Unter-

richtes gemacht wurden, und hier lieferte Deutschland die brauchbarsten Werke. Von allen diesen Arbeiten zeigten sich die Früchte nicht sogleich, sie waren aber äußerst wichtig für die Gestaltung der Mathematik in der Folge. Die Betrachtungen der Griechen waren allgemein, die Elemente, womit sie ihre geistigen Operationen ausführten, waren Raumgrößen, und der Anschauung unmittelbar gegeben. Man konnte dem ganzen Beweise von Folgerung zu Folgerung eben so durch die Anschauung nachkommen und sich von der Richtigkeit der Untersuchung überzeugen. Die gegebenen Größen und die erzeugten Raumgebilde stellten zwar allerdings nur specielle Fälle vor, aber dennoch waren die für die Untersuchung gewählten Größen allgemeine Größen und konnten überhaupt irgend welche ihrer Art sein. In der neuen Form der Geometrie betrachtete man die Raumgrößen als Zahlen, oder drückte vielmehr ihre Ausdehnung durch Zahlen aus. Dieser Unterschied ist an sich unbedeutender, als es auf den ersten Anblick scheint, und man kann mit den Zahlen eben so allgemeine Resultate erzielen, wenn nur die Schlüsse und Folgerungen unabhängig von den gewählten Zahlen sind. Aber der große Unterschied findet bei den Operationen mit Zahlen statt, daß sich alle Gebilde immer wieder in Zahlen auflösen, und im Resultate der Anschauung die Gedankenreihe entzogen ist, welche dazu geführt hat. An die Zahl selbst knüpft sich, welche Bedeutung man der Einheit auch untergelegt haben mag, während der Operationen doch nur der Begriff der Vielheit, und da viele in der Arithmetik in Anwendung kommende Sätze mehr das Gedächtniß, als den Gedanken in Anspruch nehmen, so wird die gewöhnliche Rechnung bald mechanisch, und die geometrischen Sätze gehen, wie in Indien, in Rechnungsvorschriften über. So war es also von der größten Wichtigkeit, daß von jetzt an der Einfluß der griechischen Geometrie immer mehr zunahm, sie gab der neuen Richtung erst ihren Gehalt und ihre Stärke.

Das 16. Jahrhundert beginnt mit den Entdeckungen der Italiener in der Lehre von den Gleichungen. Die Gleichungen des 1. und 2. Grades hatte man bis jetzt allein aufzulösen gewußt, und auch noch die höhere Form $x^{2n} + a\,x^n = b$. In Bezug auf die Wurzeln ließ man nur die positiven Werthe zu, und alle andern wurden als unstatthaft oder unmöglich in eine Klasse zusammengefaßt. So weit waren auch schon die Inder und Griechen. Von der Bildung der Gleichungen aus zweitheiligen Faktoren und dem Zusammenhange der Wurzeln mit den Coefficienten der Gleichung hatte man nicht die entfernteste Vorstellung, und so einfach die Sache ist, so dauerte es doch noch lange, ehe man die richtige Ansicht gewann, und viele Kräfte mußten dazu zusammenwirken. In den Schriften der Inder, bei Diophantus und den Arabern findet man zwar schon Gleichungen des dritten Grades aufgelöst, aber nur in einzelnen, sehr leichten Fällen, wo die Methode der Auflösung nur auf den besondern Fall anwendbar war. Wie wir gesehen haben, war den letzteren auch die Konstruktion der Gleichungen des 3. Grades bekannt, aber eine eigentliche Auflösungsmethode gab es noch nicht: diese sollte erst in Italien aufgefunden werden.

Scipio Ferro, Professor der Mathematik zu Bologna, von 1496—1525, war der erste, dem die allgemeine Auflösung gelang. Er hatte gegen 1508 eine Vorschrift gefunden, die Gleichungen der Form $x^3 + a\,x = b$ aufzulösen. Ferro starb, ohne seine Vorschrift bekannt gemacht zu haben, und seine Bemühungen wären für die Nachwelt verloren gewesen, wenn er sie nicht einem gewissen Fiore anvertraut hätte. Dieser Mann, der ein bloßer Rechner war und ohne tiefere mathematische Kenntnisse, benützte sein Geheimniß, um den Geometern verschiedene Probleme vorzulegen, welche allein durch seine Vorschrift aufgelöst werden konnten. So kam es, daß er sich 1535 an Tartaglia wandte, und

diesen dadurch zum Nachdenken anregte, was den günstigen Erfolg hatte, daß dieser die allgemeine Auflösung erfand. Hier zeigt sich wieder, wie gewisse Fragen ihre Zeit haben, welche zu ihrer Beantwortung bestimmt ist, und wie dann gleich instinktartig sich Viele mit ihr beschäftigen. Auch Tartaglia hatte sich bereits mit der Auflösung der Gleichungen des 3. Grades beschäftigt, und, wahrscheinlich in besondern Fällen, schon 1530 die Auflösung von $x^3 + a = b x^2$ gefunden. Die allgemeine Theilnahme, welche diesen Entdeckungen zu Theil wurde, beweist, wie hoch das Studium der Mathematik in dieser Zeit in Italien stand und wie verbreitet dasselbe war.

Nicolaus Tartaglia war aus Brescia und von armen Aeltern, gegen das Ende des 15. Jahrhunderts, geboren. Schon als Kind hatte er das Unglück, von einem französischen Soldaten auf schreckliche Weise verwundet und verstümmelt zu werden, so daß er selbst lange Zeit der Sprache beraubt war. Elend und Mißgeschick waren die Gefährten des Mannes, dem eine Entdeckung gelang, welche den Bemühungen der ausgezeichnetsten Männer im Laufe vieler Jahrhunderte gespottet hatte. Die Gelehrten, von denen bisher die Rede war, zeichneten sich sämmtlich durch die große Mannigfaltigkeit ihrer Kenntnisse aus; Tartaglia war aber nur Mathematiker, und dieses war er durch sich allein im Kampfe mit allen möglichen Widerwärtigkeiten geworden. Die Herausforderungen Fiore's gaben die Veranlassung zu dieser schönen Entdeckung, welche aber gleichfalls von Tartaglia geheim gehalten wurde. Man weiß nicht, auf welchem Wege er seine Vorschrift gefunden hat, doch scheint er sie aus geometrischen Betrachtungen abgeleitet zu haben.

Die Occidentalen hatten die frühere Eintheilung der Gleichungen nach den Zeichen der Coefficienten beibehalten, so daß z. B. $x^3 + a\,x = b$ und $x^3 + b = a\,x$ zwei verschiedene Fälle darstellten. Noch immer wurden die Gleichungen so geordnet, daß die Glieder beider Seiten sämmtlich positiv waren; — Gleichungen von der Form $x^3 + a\,x + b = 0$ wurden gar nicht beachtet, weil sie keine positive Wurzeln haben konnten. Die Vorschrift des Fiore bezog sich einzig auf die Gleichung $x^3 + a\,x = b$, und alle seine gestellten Probleme führten auf dieselbe. Dieses wurde nun von Tartaglia bald erkannt, und so wie er seine allgemeine Auflösung gefunden hatte, löste er nicht nur die ihm gestellten Fragen, sondern er gab auch andere zurück, welche nicht auf die angeführte Form führten, und daher auch nicht von Fiore gelöst werden konnten. Die öffentlich geführten Verhandlungen erregten die allgemeine Theilnahme, und es läßt sich wohl denken, wie sehr von allen Seiten die Mittheilung der Auflösungsmethode gewünscht wurde. Am meisten wurde er aber von einem ihm befreundeten Gelehrten, Cardanus, gedrängt, dem er endlich das Geheimniß anvertraute, nachdem dieser vorher durch einen Eid sich hatte verbindlich machen müssen, es zu bewahren.

Cardanus war zu 1501 zu Mailand geboren; mit großen Fähigkeiten begabt und reichen Kenntnissen ausgestattet, war er eitel und selbstsüchtig, sein Charakter eine Mischung von gut und schlecht. Der Astrologie war er so ergeben, daß er sich zu Tode hungerte, um an dem Tage zu sterben, welchen er als seinen Todestag vorher bestimmt hatte. Er starb 1575 zu Rom. Das ihm anvertraute Geheimniß bewahrte er nicht, und veröffentlichte es mit seinen eigenen Forschungen 1545, und brachte so den armen Tartaglia um die Krone seines Ruhmes; denn bis auf den heutigen Tag nennt man seine Vorschrift die Regel des Cardanus. Die Streitigkeiten, welche hierdurch zwischen Cardanus und Tartaglia und ihren Schülern und Anhängern hervorgingen, dauerten bis zum Tode des letzteren, welcher 1559 zu Venedig starb. Die Wissenschaft hatte bei diesen

Vorgängen nur gewonnen; wie Ferro dem Fiore, so hatte auch Tartaglia dem Cardanus nur die Vorschrift ohne Beweis mitgetheilt, dieser fand jedoch denselben sehr bald, und behandelte den Gegenstand außerdem in größerer Ausdehnung und Allgemeinheit. Schon Tartaglia hatte erkannt, daß eine Gleichung vom 3. Grade mehrere Wurzeln haben könne, aber erst Cardanus gibt ihre Zahl bestimmt an, indem er auch die negativen und unmöglichen Wurzeln betrachtet; in ihrer wahren Bedeutung hat er sie aber nicht erkannt, wie dieß schon aus seinen Benennungen hervorgeht. Man findet in seinem Werke zuerst die Rechnungen mit unmöglichen Größen, und daß solche Wurzeln in einer Gleichung immer paarweise vorkommen müssen. Er zeigte, wie die Gleichung verändert und das 2. Glied hinweggeschafft werden konnte; er gab ferner zuerst an, daß, wenn bei zwei aufeinander folgenden Substitutionen für die Unbekannte die Resultate verschiedene Zeichen haben, der wahre Werth der Wurzel zwischen beiden liegen müsse. Tartaglia hatte geglaubt, daß durch seine Vorschrift alle Gleichungen des 3. Grades aufgelöst werden könnten, Cardanus aber hat gefunden, daß die Wurzeln oft unter der Form unmöglicher Wurzeln erscheinen, und er hat auch an besondern Fällen nachgewiesen, wie diese verschwinden, wenn die Kubikwurzel wirklich ausgezogen werden kann, in andern Fällen aber ihre Realität durch geometrische Konstruktionen gezeigt. Beide Gegner haben die Algebra auf die Geometrie angewandt und umgekehrt sich geometrischer Betrachtungen bei ihren algebraischen Untersuchungen bedient. Tartaglia hat die Elemente Euklids ins Italienische übersetzt, und auch einiges aus Archimedes Werken; Cardanus zeigt sich gleichfalls mit griechischer Geometrie vertraut. Die Vorschrift des Letztern für die Auflösung der Gleichung $x^3 + a\,x = b$ ist: Man suche die Werthe von y und z aus den Gleichungen $y - z = b$ und $y \,.\, z = \frac{a^3}{27}$, alsdann hat man $x = \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}$. Unstreitig war Cardanus trotz seiner vielen Schwächen einer der ausgezeichnetsten Männer seiner Zeit. Was er als berühmter Arzt, Philosoph und Naturforscher geleistet hat, kann hier nicht berührt werden.

Die allgemeine Auflösung der Gleichungen des 4. Grades wurde bald hierauf von **Ludwig Ferrari**, einem Schüler von Cardanus, gefunden. Auch diese Erfindung war veranlaßt worden durch die Aufgaben, welche die italienischen Mathematiker einander öffentlich zur Lösung vorlegten. Eine solche Aufgabe führte auf die Gleichung $x^4 + 6\,x^2 + 36 = 60\,x$, Ferrari gab ihr die Form $x^4 = -6\,x^2 + 60\,x - 36$, und überlegte nun, daß, wenn es gelänge, auf beiden Seiten, die Ausdrücke zu Quadratzahlen zu ergänzen, auch die Auflösung möglich wäre. Er zählte nun auf beiden Seiten $2\,a\,x^2 + a^2$ zu und erhielt $x^4 + 2\,a\,x^2 + a^2 = 2\,a\,x^2 - 6\,x^2 + 60\,x + a^2 - 36$. Der Ausdruck zur Linken ist $(x^2 + a)^2$, und es war also nur noch nöthig, a so zu bestimmen, daß auch $(2\,a - 6)\,x^2 + 60\,x + a^2 - 36$ eine Quadratzahl darstellte. Vergleicht man nun diesen Ausdruck mit $(m\,x + n)^2 = m^2\,x^2 + 2\,m\,n\,x + n^2$, so erkennt man, daß, wenn dieß der Fall sein soll, $m^2 = 2\,a - 6$, $2\,m\,n = 60$ und $n^2 = a^2 - 36$ sein muß. Dieß gibt $m = \sqrt{2\,a - 6}$, $n = \sqrt{a^2 - 36}$, daher $m \,.\, n = \sqrt{2\,a - 6} \,.\, \sqrt{a^2 - 36}$, also auch $30 = \sqrt{2\,a - 6} \,.\, \sqrt{a^2 - 36}$ oder $900 = (2\,a - 6)\,(a^2 - 36)$ und entwickelt $a^3 - 3\,a^2 - 36\,a = 342$. Die vorgelegte Gleichung war hierdurch auf eine Gleichung vom 3. Grade zurückgeführt worden, und da diese aufgelöst werden konnte, so war damit auch die Auflösung der Gleichungen vom 4. Grade gefunden. **Ferrari** wurde 1522 zu Bologna geboren und war

Professor zu Mailand und zu Bologna, starb aber schon 1565, wie man vermuthet, an Gift, welches ihm seine Schwester beigebracht hatte. Von seinem Charakter und seinem Leben hat uns sein Lehrer Cardanus ein wenig schmeichelhaftes Bild entworfen, und wie bei Tartaglia, war auch bei ihm die ganze Bildung auf seine Kenntnisse in der Mathematik beschränkt. Er hat seine Erfindungen nicht bekannt gemacht, sie wurden zuerst von Cardanus angegeben und dann von Bombelli weiter auseinander gesetzt; außerdem soll er auch über Geometrie geschrieben haben, aber diese Arbeit ist nie bekannt geworden.

Rephael Bombelli, aus Bologna, hat 1572 eine Algebra herausgegeben, in welcher die Arbeiten seiner Vorgänger eine gewisse Vollendung erhalten haben. Durch dieses Werk erhielt die Algebra zuerst ihre streng wissenschaftliche Form, und der Einfluß der griechischen Mathematik zeigte sich hier zum ersten Male in diesem Zweige und verdrängte für immer die indisch-arabische Darstellung. Diese Algebra, welche alles umfaßte, was bis jetzt im Occidente bekannt und erfunden worden, war eingetheilt in drei Bücher. Das erste Buch enthielt die Elemente, die Rechnungen mit Wurzelgrößen, dem zehnten Buche des Euklid entsprechend, und die Rechnungen mit imaginären Größen. Das zweite Buch umfaßte die Lehre von den Gleichungen mit der vollständigen Entwickelung der neuen Erfindungen und vielen geometrischen Beweisen. Im dritten Buche gibt Bombelli ungefähr 300 Aufgaben gleichsam zur Probe für die vorgetragenen Lehren, unter diesen befinden sich auch sehr schwierige aus der unbestimmten Analytik. Aber nicht allein durch die Erweiterungen und Ergänzungen der früheren Theorien, durch die strengen und vollständigen Beweise, sondern auch durch die Aufnahme einer besseren Bezeichnung zeichnete sich Bombelli's Werk aus. Mit den frühern Gelehrten gebrauchte er p und m, für unsere Zeichen + und —; die Quadrat- und Kubikwürzeln wurden ausgedrückt durch R. q. und R. c.; durch zwei L, welche gegen einander gestellt sind, L ⅃, wurden Klammern angedeutet; ferner bezeichnete er die Unbekannte durch $\overset{1}{\smile}$, ihre zweite Potenz durch $\overset{2}{\smile}$, die dritte durch $\overset{3}{\smile}$ u. s. w. Interessant ist die Einleitung, welche eine Art Geschichte der Algebra enthält. Bombelli beginnt mit Diophantus und Mohammed ben Musa, erwähnt Bonacci und Pacioli, unter den Gelehrten kurz vor seiner Zeit, welche über Algebra geschrieben haben, wird auch Stiefel angeführt, von welchem unten die Rede sein wird. Hier erzählt auch Bombelli, daß er mit Anton Pazzi, Professor zu Rom, von den sieben Büchern des Diophantus die fünf ersten übersetzt habe, an der Vollendung des Ganzen aber durch andere Arbeiten verhindert worden sei. Merkwürdig ist die Behauptung Bombelli's, daß in seinem Manuscripte des Diophantus die Inder oft angeführt seien, was in keinem der noch vorhandenen der Fall ist. Wenn nun auch diese Uebersetzung nicht herausgekommen ist, so hat er doch beinahe Alles in seine Algebra aufgenommen, nämlich den Inhalt der vier ersten Bücher und einen Theil des fünften.

Wilhelm Holzmann von Augsburg, gewöhnlich Xylander genannt, seit 1558 Professor in Heidelberg, war der erste, welcher die Arithmetik des Diophantus in einer lateinischen Uebersetzung bekannt gemacht hat. Auf einer Reise, welche er 1571 nach Wittenberg machte, wurde ihm von den dortigen Professoren Sebastian Theodorich und Wolfgang Schüler ein Bruchstück einer Abschrift dieses Werkes gezeigt, und er erfuhr zugleich, daß Andreas Dudicius, kaiserlicher Gesandter am polnischen Hofe, der Besitzer eines vollständigen Manuscriptes sei. An diesen wandte er sich nun, und erhielt dasselbe mit der Aufmunterung, es zu übersetzen. Die Uebersetzung erschien mit einem für seine Zeit werthvollen Commentar 1575. Ungefähr um dieselbe Zeit wurde dieses

Werk auch von dem Neapolitaner Joseph Auria übersetzt; ist aber nie im Druck erschienen. Noch scheint eine vorhandene Uebersetzung älter als die von Holzmann zu sein, aber auch sie ist nie gedruckt worden.

Im Jahre 1544 war indessen in Nürnberg eine Arithmetik und Algebra erschienen, deren Verfasser Michael Stiefel aus Eßlingen, früher Klostergeistlicher war, später aber ein eifriger und schwärmerischer Protestant wurde. Dieses Buch, wenn auch gerade keine bedeutenden Entdeckungen enthaltend, ist dennoch ausgezeichnet in Bezug auf die Fortschritte in der Bezeichnung. Hier findet man zum ersten Male die Zeichen + und —, dann Buchstaben als Zeichen für unbekannte Größen; ferner gebraucht Stiefel ganze, positive und negative Zahlen, welche er Exponenten nannte, zur Bezeichnung der Potenzen, eben so ein Zeichen mit Zahlen verbunden, um die verschiedenen Wurzeln auszudrücken, welches alles dann für immer in die Algebra übergegangen ist. Er kam nicht über die Gleichungen des zweiten Grades, denn die Erfindungen der Italiener konnten ihm noch nicht bekannt sein; aber bei diesen Gleichungen erkannte und bewies er die Mehrheit der Wurzeln, was man bei Pacioli noch nicht hat. Das Buch enthält viele treffliche Bemerkungen, welche eine tiefe Einsicht in die Sache verrathen, und an einigen Stellen erkennt man die ersten Spuren der Logarithmen. Stiefel stellte die Zahlenreihe mit der Potenzenreihe zusammen und schaltete auch Zwischenglieder ein; da er aber in seinen Beispielen nur ganze Zahlen für diese suchte, so gingen ihm die Früchte seiner Betrachtungen verloren. Beim Wurzelausziehen ging er bis zur 8. Wurzel, und entwickelte hierbei das Gesetz für die Bildung der Binomialcoefficienten, also ziemlich gleichzeitig mit Tartaglia, der diesen Gegenstand gleichfalls behandelte. Wie Bombelli beschäftigte sich auch schon Stiefel mit der Darstellung der Sätze des zehnten Buches der Elemente Euklids durch Rechnung, und wendete sie auf die Geometrie an; eben so sind die Sätze des 13. Buches algebraisch behandelt. Stiefel verstand kein Griechisch, er benützte daher besonders des Campanus Uebersetzung; da er aber doch gerne den Urtext gelesen hätte, so unterstützten ihn darin Dionysius Roner, Joh. Hein. Mayer und ein junger Patrizier aus Frankfurt Adolph von Glauburgk: da sie die Worte verstanden und er die Sache, so gelangte er endlich zum Ziele.

Vieles hat Stiefel aus dem Werke von Christoph Rudolph genommen, welches von ihm, vermehrt und verbessert, wieder herausgegeben worden ist. In wie weit das Werk von Pacioli auf die deutschen Mathematiker eingewirkt hat, läßt sich schwer bestimmen; sicher ist, daß die Algebra in Deutschland schon blühte, ehe man noch von diesem etwas wußte. Wir müssen jedoch immer die Italiener als unsere ersten Lehrmeister in der Algebra ansehen, obgleich ihre Ausbildung eine unabhängige und selbstständige war, wie dieß schon die Verschiedenheit der Bezeichnung beweist. Bombelli hatte, wie erwähnt, Kunde von Stiefels Werk; ob er es aber gekannt hat, möchte bezweifelt werden dürfen, gewiß hätte der intelligente Italiener die Vorzüge der Bezeichnung des Deutschen anerkannt und sie aufgenommen, wie dieß von nun an in den Schriften über Algebra immer mehr der Fall war. Die Werke über Algebra und Arithmetik waren in diesem Jahrhundert in Deutschland sehr zahlreich; da aber durch sie die Wissenschaft keine Erweiterung erfahren hat, so müssen sie übergangen werden.

Der Engländer Robert Recorde schrieb ungefähr um dieselbe Zeit wie Stiefel, und gebrauchte in seiner Abhandlung zuerst das jetzt geltende Gleichheitszeichen. Der Franzose Pelitarius machte in einer Schrift, welche 1558 erschien, zuerst die Bemerkung, daß die Wurzel einer Gleichung ein Divisor des letzten Gliedes derselben sei. Zu den Gelehrten, die mit Glück die Algebra

mit der Geometrie zu verbinden wußten, gehört Benedetto, der im Dienste des Herzogs von Savoyen war und dessen Werk 1585 in Turin erschienen ist.

Ein Jahrhundert, welches sich so sehr in Uebersetzungen der griechischen Geometer auszeichnete, konnte unmöglich in diesem Zweige produktiv sein. Unterdessen nahm aber gerade hierdurch die Geometrie einen merkwürdigen Aufschwung, und besonders Deutschland hatte eine sehr bedeutende Zahl geometrischer Schriften aufzuweisen. Eine eigentliche Erweiterung wurde der Wissenschaft dadurch nicht zu Theil, aber vorbereitet wurde sie durch die große Verbreitung, welche sie erlangte. Maurolycus, von dem früher schon als Uebersetzer die Rede war, war auch selbstständiger Denker; wie Werner hat er die Kegelschnitte am Kegel selbst betrachtet und versucht, nach den Angaben des Pappus, das Buch des Apollonius vom Größten und Kleinsten wieder herzustellen.

Seit Purbach und Regiomontanus die erste Anregung gegeben, hatte man sich in Deutschland fortwährend mit der Trigonometrie und insbesondere mit der Berechnung der trigonometrischen Tafeln beschäftigt. Unter den vielen Unternehmungen dieser Art verdient besonders die von Georg Joachim aus dem Vorarlbergischen — daher gewöhnlich Rhäticus genannt — erwähnt zu werden. Er berechnete zuerst Sinustafeln von 10 zu 10 Sekunden für den Halbmesser 10,000 Millionen, später durch alle Sekunden auf 15 Stellen. Die Tangententafel, welche er entworfen, hatte dieselbe Ausdehnung, und seit 1539 beschäftigte er sich mit einer Sekantentafel, welche, die erste im Abendlande, noch vor 1553 herauskam. Gleichzeitig mit Rhäticus hatte sich auch Maurolycus mit diesem Gegenstande beschäftigt, und seine Sekantentafel erschien 1558. Diese ungeheure Unternehmung wurde durch den Tod des Rhäticus unterbrochen, aber von seinem Schüler Otto wieder aufgenommen, und mit Unterstützung des Kaisers und einiger Fürsten konnten die Tafeln endlich gedruckt werden, sie erschienen 1594 zu Heidelberg. Zur Geschichte dieser Tafeln ist noch zu bemerken, daß sie, nach unglaublichen Mühen und Arbeiten, von vielen Fehlern gereinigt und noch mehr erweitert, von Bartholomäus Pitiscus 1613 von neuem herausgegeben wurden. Rhäticus war aber nicht bloßer Rechner, seine Ansichten über die trigonometrischen Linien beweisen, daß er über die Sache nachgedacht hatte. Er erklärte, daß diese Linien ganz uneigentlich mit dem Kreise in Verbindung gebracht würden und nur als Seiten rechtwinkeliger Dreiecke angesehen werden dürften; er vermied daher auch die bisher gebräuchlichen Benennungen und bezeichnete die Seiten durch die Ausdrücke: Hypotenuse, Senkrechte und Basis. Er war somit der erste, der es aussprach, daß diese Linien Funktionen der Winkel und nicht Funktionen des Kreises seien. In diesen Ansichten hatte nun auch Rhäticus vollkommen Recht, und der Unterschied zwischen goniometrischen Funktionen und Kreisfunktionen ist wissenschaftlich begründet; die ersten gehören den Elementen, die andern aber der höheren Geometrie an, und die Zusammenwerfung beider war nur dadurch möglich, daß gleichen Bogen des Kreises auch gleiche Winkel entsprechen. Die Kreisfunktionen haben eine höhere Bedeutung und gehören zu den Kurvenfunktionen, welche in der neuen Mathematik eine so große Rolle spielen.

Von dem niederländischen Mathematiker Simon Stevin kam 1585 eine Arithmetik und bald darauf eine Algebra heraus. In dieser bediente er sich einer neuen Bezeichnung für die Potenzen, die aber nicht aufgenommen wurde, und nur deßhalb merkwürdig ist, weil er hier die Potenzen mit gebrochenen Exponenten zuerst darstellte und sich auch negativer Exponenten bediente. Seine Bezeichnung für die Unbekannte war ein Kreis, in welcher der Exponent eingeschrieben wurde. Seit Regiomontanus war die Decimaltheilung eingeführt, sie

wurde beim Ausziehen der Wurzeln von Bucklay, Recorde und Ramus angewandt; von Stevin wurde sie sehr empfohlen und scheint durch seine Arithmetik jetzt verbreitet worden zu sein. Die Bezeichnung geschah aber noch nicht durch die Kommata, sondern durch Accente, welche über die Ziffern gesetzt wurden.

Von der Begründung der allgemeinen Arithmetik bis zur Erfindung der Analysis des Unendlichen.

Von der Einführung der Buchstabenrechnung und der Entwickelung der Algebra.

Während in Italien die allgemeine Auflösung der Gleichungen auf eine Stufe gebracht wurde, welche bis jetzt nicht überschritten werden konnte, und in Deutschland glückliche Anfänge gemacht worden waren, durch Einführung einer passenden Bezeichnung die Algebra von der unvollkommenen Form zu befreien, welche sie bis jetzt gehabt hatte, wurde zu Fontenay in Frankreich der Mann geboren, dem es vorbehalten war, eine gänzliche Umwälzung in diesem Zweige wie überhaupt in der Mathematik hervorzurufen. Franz Vieta, gegen 1540 geboren, war es, der zuerst sich der Buchstaben als allgemeiner Zahlzeichen bediente und dadurch den Grund legte zur allgemeinen Arithmetik, aus welcher allein die hohe Vollendung hervorgehen konnte, welche die Mathematik in verhältnißmäßig so kurzer Zeit erlangt hat. Um diese Neuerung besser würdigen zu können, muß man auf die Entwickelung sehen, welche die Wissenschaft in dieser Hinsicht genommen hat. Zuerst wurde jede Rechnung ausführlich durch Worte dargestellt, wobei man für die Unbekannte ein entsprechendes Wort, wie Sache, Ding, Zahl u. s. w. gebrauchte. In dieser Art rechnete noch Mohammed ben Musa, der selbst die Zahlen durch Worte ausdrückte. Die nächste Stufe war, daß oft wiederkehrende Worte abgekürzt wurden, so p für plus, m für minus, das umgekehrte ψ, des Diophantus in demselben Sinne, co für cosa, n für numerus u. s. w. In Bezug auf die Unbekannte wurden höhere Potenzen eben so durch solche Abkürzungen ausgedrückt, wie wir dieß bei Diophantus und später bei den Italienern finden. Die gegebenen Größen wurden sämmtlich durch Zahlzeichen dargestellt. In Indien war man schon weiter gegangen. Die erste Unbekannte, yavat-tavat, drückte das Unbestimmte aus, wie das italienische tanti; das Zeichen ya war noch Abkürzung und die Zeichen für die andern Unbekannten können auch nicht für mehr gelten, sie waren yavat von einer andern Farbe. Operationszeichen gab es nur eines, den Punkt; die Division wurde so wie die Addition durch die Stellung ausgedrückt, für das Multipliciren, Potenziren und das Wurzelausziehen waren Abkürzungen gebräuchlich. Ein Unterschied fand aber hier zwischen den Indern und Diophantus und den Occidentalen statt, daß die beiden letztern die Potenzzeichen allein setzten, während die ersten sie mit dem Zeichen der Unbekannten verbanden und sie daher auch auf verschiedene Unbekannten ausdehnen konnten. Zu bemerken ist hier noch, daß Diophantus allein ein einfaches, sich an keine Bedeutung anlehnendes Symbol für die unbekannte Größe hatte. Bei höherer Ausbildung mußte sich die Algebra von diesen Abkürzungen frei machen und sie durch allgemeine Zeichen ersetzen; der erste Schritt hierzu war die Wahl der Buchstaben für die Unbekannte und die Bezeichnung der Potenzen durch Zahlen, so wie die Erfindung

der Operationszeichen. Dieß Alles war bis zur Mitte des 16ten Jahrhunderts geschehen, auch das Gleichheitszeichen war erfunden; aber nie, weder im Oriente noch im Occidente hatte ein Mathematiker für eine im Allgemeinen gegebene Zahl auch ein allgemeines Zeichen so gesetzt, daß er wie mit Zahlen damit gerechnet hätte. Vieta hat zuerst dieses eingeführt und dadurch die Resultate der Algebra von der speciellen Form entkleidet, welche sie bisher immer gehabt hatten. Wenn man z. B. eine Zahl, welche aus zwei Theilen besteht, 5 + 7, mit 8 vervielfachen soll, was ausgedrückt wird durch: $8 \times (5 + 7)$, so kann man zuerst zuzählen und dann vervielfachen, $8 \times 12 = 96$, oder man kann zuerst vervielfachen und dann zuzählen $8 . 5 + 8 . 7 = 40 + 56 = 96$. Mit drei andern Zahlen lassen sich dieselben Betrachtungen anstellen, man findet dasselbe Gesetz. Wenn man nun Zahlen gebraucht und setzt $8 (5 + 7) = 8 . 5 + 8 . 7$, so ist der Satz hier nur für die Zahlen 8, 5 und 7 ausgedrückt; will man ihn allgemein darstellen, so muß dieß weitläufig durch Worte geschehen. In der algebraischen Sprache genügen wenig Zeichen hierfür: man setzt $a (b + c) = a . b + a . c$ und die Auffassung wird hier noch durch die Anschauung unterstützt. Zu allgemeinen Sätzen gelangte man früher nur dadurch, daß man fand, daß der Gang der Rechnung unabhängig war von den besondern Zahlen, mit welchen sie geführt wurde, und der allgemeine Satz mußte vor Vieta immer durch Worte ausgedrückt werden. Die Mathematik der Griechen hätte uns allein zu all' diesen Dingen nicht führen können, und es zeigt sich hier, wie nothwendig eine Unterbrechung und die Verbindung mit einer andern Richtung war, und daß beide nur als Keime zu uns kamen, um zu einer selbstständigen Entwickelung zu gelangen.

Der Gebrauch der Buchstaben statt der Zahlen ist Vieta ganz geläufig, wir haben von ihm nicht etwa bloß die Anfänge oder nur Andeutungen, sondern schon eine vollständige Entwickelung, indem sie durch die vorhergehenden Schriftsteller schon angebahnt war. Die Zeichen + und — führt er als schon bekannt an, und wir sehen hier die Verbreitung dieser Neuerung, ohne die Art und Weise derselben angeben zu können. Die Division drückt er durch die Bruchform aus; für die Multiplication hat er noch kein Zeichen und setzt für $A \times B$, A in B. Das Gleichheitszeichen hat er in anderem Sinne, er gebraucht es für die unbestimmte Subtraction und $A = B$ heißt $A - B$ oder $B - A$, je nachdem die eine oder die andere Zahl die größere ist, weil hier nur der positive Rest gelten soll. In der Potenzbezeichnung steht er noch auf der Stufe der Inder, mit dem Zeichen der Unbekannten wird das Wort der Potenz oder die Abkürzung desselben verbunden; zuweilen und besonders bei den Gleichungen bedient er sich auch der zu seiner Zeit gebräuchlichen Bezeichnung; so ist 1 Q . Q — 6 N = 128 so viel als ein Quadrat-Quadrat weniger 6 Numerus gleich 128, d. h. $x^4 - 6 x = 128$, aber auch Aquad + B in A gleich Z, so viel als $A^2 + B . A = Z$. Die Coefficienten werden bald vor-, bald nachgeschrieben.

Die 1646 herausgekommene Sammlung von Vieta's Arbeiten enthält 13 hierhergehörige Abtheilungen. Nach einer Einleitung in die analytische Kunst und den Grundzügen seiner Buchstabenrechnung (Logistica speciosa) behandelt er in der dritten Abtheilung unbestimmte Aufgaben, von welchen ein großer Theil der Arithmetik des Diophantus entnommen ist. Am Schlusse der Buchstabenrechnung steht eine Abhandlung über die Bildung rechtwinkeliger Dreiecke überhaupt, worin sich auch Vorschriften der Inder wiederfinden. Die Auflösung der unbestimmten Aufgaben ist allgemein, und nur am Schlusse werden Beispiele in Zahlen mitgetheilt. Eine der einfachsten Aufgaben ist: drei Quadratzahlen

zu finden, welche gleichweit von einander entfernt sind. Vieta setzt die eine A^2, die andere $A^2 + 2\ AB + B^2$, so muß die dritte $A^2 + 4\ AB + 2\ B^2$ sein; damit dieser Ausdruck nun ein Quadrat werde, setzt er ihn gleich $D^2 - 2\ D \,.\, A + A^2$, woraus er $A = \frac{D^2 - 2\ B^2}{4\ B + 2\ D}$ erhält. Werden nun hiernach die beiden andern Zahlen berechnet, und dabei, was keinen Einfluß hat, die gleichen Nenner weggelassen, so erhält man für die drei Zahlen $D^2 - 2\ B^2$, $D^2 + 2\ BD + 2\ B^2$ und $D^2 + 4\ DB + 2\ B^2$, deren Quadrate die verlangte Eigenschaft haben. Eine ähnliche Rechnung ist früher nie gemacht worden. Die vierte Abtheilung enthält in ihrem ersten Theile eine sehr ausgedehnte Untersuchung über die Veränderungen, welche mit den Gleichungen aller Grade vorgenommen werden können. Hier lehrt Vieta, wie man die Wurzeln, ohne sie zu kennen, um beliebige Größen vermehren oder vermindern, oder durch eben solche vervielfachen oder theilen kann. Er zeigt, wie das zweite Glied einer Gleichung durch eine solche Veränderung hinweggeschafft werden kann, und in welchem Zusammenhange die Coefficienten mit den Wurzeln stehen, wobei jedoch diese alle positiv angenommen werden. Im zweiten Theile wird die allgemeine Auflösung der Gleichungen des 2., 3. und 4. Grades mitgetheilt; die Methoden sind zum Theil verschieden von denen der Italiener. Ist $A^2 + 2 \,.\, BA = Z$ die Gleichung des 2. Grades, so setzt er $A + B = E$, wo E eine neue Unbekannte ist, woraus er erhält $E^2 = Z + B^2$, hieraus $E = \sqrt{Z + B^2}$ und somit $A = -B \pm \sqrt{Z + B^2}$. In den zur Erläuterung gegebenen Beispielen werden immer nur die positiven Wurzeln angeführt. Die Gleichung des dritten Grades $A^3 + 3 \,.\, BA = 2\ Z$ wird aufgelöst, indem er $E^2 + A \,.\, E = B$ also $A = \frac{B - E^2}{E}$ setzt; die Substitution führt ihn auf die neue Gleichung $E^6 + 2\ Z \,.\, E^3 = B^3$, wodurch er zur Cardan'schen Formel gelangt. In der Gleichung des 4. Grades $A^4 + 2\ G \,.\, A^2 + B \,.\, A = Z$ vergleicht er die linke Seite mit dem Quadrate von $A^2 + G + \frac{1}{2} E^2$, von E wieder die neue Unbekannte ist; diese Vergleichung gibt ihm $A^4 + 2\ G A^2 = Z - B\ A$ und auch $A^4 + 2\ G\ A^2 = \left(A^2 + G + \frac{1}{2} E^2\right)^2 - \left(G^2 + \frac{1}{4} E^4 + E^2 . A^2 + G . E^2\right)$ und hieraus $\left(A^2 + G + \frac{1}{2} E^2\right)^2 = Z - B\ A + G^2 + \frac{1}{4}\ E^4 + E^2 \,.\, A^2 + G \,.\, E^2$. Damit der Ausdruck auf der rechten Seite ein Quadrat werde, setzt er ihn $= \left(\frac{B}{2\ E} - E \,.\, A\right)^2$; zuletzt ergibt sich hieraus: $E^6 + 4\ G \,.\, E^4 + 4\ (Z + G^2) \,.\, E^2 = B^2$. Hat man nun hieraus den Werth $E = D$ gefunden, so ist $\left(A^2 + G + \frac{1}{2}\ D^2\right)^2 = \left(\frac{B}{2\ D} - D \,.\, A\right)^2$ oder $A^2 + D \,.\, A = \frac{B}{2\ D} - \frac{1}{2}\ D^2 - G$; woraus auch A gefunden werden kann.

Die 5. Abtheilung hat eine große Ausdehnung und enthält die Vorschriften für das Wurzelausziehen. Vieta faßt die Aufgabe allgemeiner, als es jetzt geschieht, und sucht sie auf alle Zahlengleichungen auszudehnen. Das gewöhnliche Wurzelausziehen ist ihm die Auflösung der Gleichung $x^n = A$, er gibt dafür die Regel von $n = 2$ bis $n = 6$. Eben so löst er aber auch Glei-

chungen vom 2. und von höheren Graden auf; seine Methode kann jedoch nur auf besondere Klassen von Gleichungen angewendet werden, und da man später leichtere Verfahrungsweisen erfunden hat, so ist sie wieder in Vergessenheit gekommen. Man denke sich, es sei $x^2 + 12\,x = 1645$ aufzulösen, so wird x eine Zahl von zwei Ziffern sein und dargestellt werden können durch $10\,a + b$; es ist daher $(10\,a + b)^2 + 12\,(10\,a + b) = 1645$ oder $100\,a^2 + 20\,a\,b + b^2 + 120\,a + 12\,b = 1645$. Das erste Glied zur Linken wird den beträchtlichsten Theil des ganzen Ausdruckes bilden und daher gesetzt werden können $100\,a^2 = 1645$ oder $a^2 = 16$, also $a = 4$, wofür mit Rücksicht auf die vernachlässigten Glieder $a = 3$ gesetzt wird. Führt man diesen Werth ein und zählt dann von beiden Seiten $100\,a^2 = 900$, $120\,a = 360$ ab, so bleibt $60 \,.\, b + 12\,b + b^2 = 385$ oder $72 \,.\, b + b^2 = 385$. Auch hier hat das erste Glied den größten Werth, und deßhalb setzt man $72 \,.\, b = 385$, also $7 \,.\, b = 38$, was $b = 5$ gibt; wenn man nun diesen Werth einführt, so sieht man, daß er Genüge leistet und daß also $x = 10 \,.\, 3 + 5 = 35$ ist. In allen Beispielen hat übrigens Vieta niemals auf negative Wurzeln Rücksicht genommen.

Die neue Form der Arithmetik gestattete nun Vieta eine ganz andere Anwendung auf die Geometrie; er vermochte es jetzt, die räumlichen Größen allgemeiner als durch Zahlen darzustellen und die Konstruktion solcher Ausdrücke wurde jetzt erst durch ihn in die Geometrie eingeführt. Er zeigte, wie die Konstruktion der Wurzeln der Gleichungen des 3. Grades von den berühmten Problemen der Verdoppelung des Würfels und der Dreitheilung eines Winkels abhängen, und gab Beispiele für die Anwendung. Hierher gehört gleichfalls seine Untersuchung über die Winkeltheilung oder die Berechnung der Sehnen des Kreises. Er gibt hier zum ersten Male die Ausdrücke für die Sehnen des $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ .... Bogens aus der Sehne des ganzen Bogens, also auch die Seiten der ordentlichen Vielecke im Kreise, wenn dieser Bogen dem ganzen Umfange gleichgesetzt wird; das Gesetz der Coefficienten ist von ihm vollständig erfaßt und angegeben. Schon 1579 hatte Vieta trigonometrische Tafeln herausgegeben, sie aber größtentheils wieder an sich gebracht wegen der vielen Fehler, welche darin enthalten waren; seine gesammelten Werke enthalten aber Abhandlungen über ebene und sphärische Trigonometrie und besonders die letzte hat durch ihn einige Erweiterung erfahren. In der Geometrie der Griechen war Vieta gleichfalls sehr bewandert, was sich überall in seinem ganzen Werke ausdrückt, und er stellte das Werk des Apollonius über die Berührungen wieder her; hier löste er auch die Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, welcher drei in einer Ebene gelegene Kreise berührt. Dieser Mann, der den mathematischen Wissenschaften so große Dienste leistete und die großen Fortschritte des nächsten Jahrhunderts vorbereitete, war kein Mathematiker von Beruf, sondern ein Beamter; er beschloß sein thätiges Leben zu Paris 1603 im Alter von 63 Jahren.

Das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser ist in dieser Zeit ebenfalls genauer bestimmt worden. Zuerst hat es Vieta auf zehn Stellen, der Belgier Adrianus Romanus bis auf 15, und Ludolph van Ceulen aus Hildesheim bis auf 35 berechnet. Der belgische Geometer hatte sich mit der Kreistheilung beschäftiget, wie aus einer Aufgabe erhellet, welche er Vieta vorgelegt und welche in der Auflösung einer Gleichung vom 45. Grade bestand. Die Unbekannte dieser Gleichung drückte die Sehne des 45. Theiles eines Bogens aus, dessen ganze Sehne gegeben war. Die eigenen Untersuchungen Vieta's ließen ihn leicht die Beschaffenheit der vorgelegten Gleichung erkennen und er wies nicht nur auf die eine, sondern auf die Bedeutung aller 23 positiven Wurzeln hin.

Inmitten der Bewegungen, welche in Deutschland die Reformation hervorgerufen hatte, gewannen die Wissenschaften immer größeren Boden und besonders hatte es sich den Ruhm erhalten, die Heimath der Astronomie zu sein. Durch Purbach und Regiomontanus hatte dieser Zweig der Naturwissenschaften eine ganz andere Bedeutung gewonnen, die Instrumente waren verbessert worden, die Beobachtungen hatten einen höhern Grad von Genauigkeit erreicht, und die Rechnungen konnten nunmehr, wo die sphärische Trigonometrie in einer gewissen Vollendung dastand und genaue Tafeln vorhanden waren, mit größerer Leichtigkeit und Sicherheit ausgeführt werden. So kam es, daß Copernikus, angeregt durch den Ruhm eines Regiomontanus, nachdem er seine medizinischen Studien in Krakau gemacht hatte, ebenfalls nach Italien ging und dort wirklich durch seine Kenntnisse sich die Achtung erwarb, welche man seinem Vorbilde gezollt hatte. Es kann hier nur noch bemerkt werden, daß Rhäticus, sein Schüler und Commentator, ihn zur Herausgabe seines Werkes ermunterte und diese selbst besorgte, so daß ihm noch vor seinem Tode (1543) die Befriedigung zu Theil wurde, es zu sehen. Das System des Copernikus war so sehr dem Scheine entgegen, daß es im Anfange wenig Anhänger fand; aber die bedeutendsten unter den deutschen Astronomen schenkten ihm ihren Beifall und verschafften ihm Eingang. Der bescheidene Mann, dem es nicht um den Beifall der Menge zu thun war, vermied vorsichtig, seine Forschungen einer öffentlichen Besprechung auszusetzen; es genügten ihm die Mittheilungen an Astronomen und ihre Zustimmung, und so entging er den Verfolgungen, welche seine Nachfolger zu erdulden hatten.

Diese Entdeckungen waren die Folge der neuen Mathematik im Abendlande, welche sich immer mehr in der Form herausbildete, um den Naturwissenschaften als Hauptstütze zu dienen. Sie hatte jetzt unter dem Einflusse der griechischen Mathematik durch Vieta eine allgemeinere Begründung erhalten, und so sehr war die Zeit dazu vorbereitet, daß sie sogleich eine willige Aufnahme und eine große Verbreitung fand. Albert Girard, ein niederländischer Geometer, beschäftigte sich bald nach Vieta mit der Algebra; in seinem Werke „Neue Erfindung in der Algebra" zeigte er den Zusammenhang der Wurzeln einer Gleichung mit ihren Coefficienten und nahm dabei auch auf die negativen Wurzeln Rücksicht. Er hatte eine Vorstellung von den unmöglichen Wurzeln und zeigte, daß überhaupt die Anzahl der Wurzeln den Grad der Gleichung nicht übersteigen könne. Von den negativen Wurzeln gab er verschiedene Anwendungen in der Geometrie; er bezeichnete z. B. das + durch das Vorwärtsgehen in einer Richtung und durch — das Rückwärtsgehen, so daß eine Größe ihr Zeichen ändert, wenn sie durch 0 gegangen ist. Er zeigte ferner, wie man die Summen der Quadrate, der Kuben u. s. w. der Wurzeln einer Gleichung aus den Coefficienten derselben herleiten kann, und gab dafür die unabhängige Bildungsweise an. Im Jahre 1626 erschienen von ihm Tafeln für die trigonometrischen Funktionen, begleitet von einer Abhandlung über die ebenen und sphärischen Vielecke. Eben so gab er 1629 zwei Werke über denselben Gegenstand heraus und eine holländische Uebersetzung des ersten Werkes. Girard bediente sich darin schon der Bezeichnungen, wie sie jetzt gebräuchlich sind: Sin. Tang. Sec. Er hat außerdem noch die Werke des niederländischen Mathematikers Stevin herausgegeben; sie erschienen 1634 mit einer Zueignung an den Prinzen von Oranien, aus welcher man erfährt, daß Girard die Vollendung nicht erlebt hatte, daß er ein Jahr vorher gestorben war und eine Wittwe mit elf Kindern in dürftigen Umständen hinterlassen hatte. Die Algebra wurde durch den Druck erst 1669 bekannt.

Ein anderer Nachfolger Vieta's war Thomas Harriot, geb. zu Oxford 1560; sein Werk kam erst nach seinem Tode 1631 heraus. Harriot zeigte zum ersten Male die Entstehung der Gleichungen aus der Multiplication einfacher Faktoren vom ersten Grade, deren Anzahl dem Grade der Gleichung gleich ist. Hieraus ergibt sich der schon angeführte Zusammenhang zwischen Wurzeln und Coefficienten, welchen Girard entdeckt hat, von selbst. Merkwürdigerweise verkannte Harriot wieder die Natur der negativen Wurzeln, obschon er in der Bildung seiner Gleichungen solche mit aufnahm. Es war dieß einer der Gegenstände, vor welchen die Menschen wiederholt stehen blieben, die stückweise erfunden und wieder verlassen und endlich nur mit Mühe erkannt und festgehalten wurden. Die Gewohnheit, am Alten zu hängen, war so groß, daß man es als einen Fortschritt bezeichnen muß, daß Harriot es gewagt hat, alle Glieder einer Gleichung auf eine Seite des Gleichheitszeichens zu bringen und sie gleich 0 zu setzen, eben so, daß er die kleinen Buchstaben gebrauchte, während Vieta sich der großen bediente. Denkt man sich a als die Unbekannte und bildet nun aus den Faktoren $a + b$, $a + c$, $a - d$ durch Vervielfachen die Gleichung $a^3 + (b + c - d)\, a^2 + (bc - bd - cd)\, a = b.c.d$, so gibt Harriot an, daß $a = d$ eine Wurzel der Gleichung sei und die anderen $a = -b$ und $a = -c$ läßt er unbeachtet. Wenige Gegenstände unserer Forschungen dürften so lehrreich sein für die Entwickelungsgeschichte des menschlichen Geistes, wie die Lehre von den Gleichungen, sie bilden ein Seitenstück zur Erfindung unseres Zahlensystems. Es kann kaum etwas Einfacheres geben, als die Art, wie man sich die Entstehung der Gleichungen denken muß und doch ist man im Laufe vieler Jahrhunderte nicht darauf gekommen; ja man hat Jahrhunderte hindurch nicht einmal gewagt, die überkommene Form im geringsten abzuändern. Um erkennen zu lernen, daß Gleichungen entstehen aus der Multiplication einfacher Faktoren und daß sie sich in diese wieder müssen auflösen lassen, dazu bedurfte es Männer wie Vieta, Girard, Harriot. Und selbst später war die Gewohnheit so mächtig, daß, nachdem man die Realität der negativen Wurzeln erkannt hatte, sie noch falsche Wurzeln genannt wurden.

Von der Erfindung der Logarithmen.

Die Geometrie in ihrer neuen Gestaltung und Ausbildung hatte bis jetzt nur in der Astronomie eine ausgedehnte Anwendung finden können, wie diese denn auch die Hauptursache der Erzeugung und Fortbildung der neuen Richtung war. Mit unendlicher Mühe hatte man trigonometrische Tafeln geschaffen und ihnen eine Ausdehnung gegeben, wie sie heut zu Tage kaum mehr eine Anwendung findet. Mit den Zahlen dieser Tafeln, welche oft 16 und noch mehr Stellen hatten, mußte man rechnen, große Operationen mußten ausgeführt werden, was außerordentlich mühesam und zeitraubend war. Es ist daher ganz natürlich, daß sich vielfache Bestrebungen kundgaben, diesem Uebelstande abzuhelfen, die großen beschwerlichen Zahlenrechnungen zu erleichtern und abzukürzen. So oft sich ein wahres Bedürfniß bei den Menschen herausstellt, ist die Abhülfe nicht ferne, der Geist durchbricht alle Schranken, welche den Fortschritt hemmen. Wie bereits erwähnt wurde, hatte schon Stiefel die Bemerkung gemacht, daß bei einer Potenzenreihe und der ihr zugehörigen Zahlenreihe gewisse Glieder als Hauptglieder genommen werden können, und daß alsdann die andern als Zwischenglieder erscheinen. So schaltete er zwischen 2 und 32 die Glieder 4, 8, 16 als gleichweit entfernte Potenzen von 2 ein. Von dieser Bemerkung zu einer glänzenden Entdeckung war nur noch ein Schritt: er durfte

nur seine Zahlenreihe vervollständigen und zu den fehlenden Gliedern 3, 5, 6, 7 die entsprechenden Potenzen von 2 suchen. Stiefel wurde aber nur von theoretischen Betrachtungen geleitet, und da ihn noch kein Bedürfniß nöthigte, weiter zu gehen, so wurde eine höchst wichtige Erfindung um 70 Jahre verspätet. Wählt man als Grundlage einer Potenzenreihe irgend eine Zahl, z. B. 8, so ist die Reihe selbst 8^0, 8^1, 8^2, 8^3, ... und die entsprechende Zahlenreihe 1, 8, 64, 512 ... Schaltet man zwischen je zwei Gliedern zwei neue ein, so ist die neue Reihe 8^0, $8^{\frac{1}{3}}$, $8^{\frac{2}{3}}$, 8^1, $8^{1\frac{1}{3}}$, $8^{1\frac{2}{3}}$, 8^2, ... und die Zahlenreihe 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... In der letzten Reihe fehlen die Glieder 3, 5, 6, 7 u. s. w.; fährt man aber fort, von neuem Glieder einzuschalten, so gelangt man endlich zu einer Potenzenreihe, in welcher sich entsprechende Glieder zu den fehlenden Gliedern der Zahlenreihe, wenigstens angenähert, finden. Als Grundzahl nimmt man gewöhnlich die Zahl 10 an. Hat man nun eine Potenzenreihe 10^0, 10^a, 10^b, 10^c ..., deren entsprechende Werthe die Zahlen 1, 2, 3, 4,... sind, so kann man eine jede Zahl in eine Potenz von 10 verwandeln und dadurch alle Vortheile der Potenzenrechnung auf die Zahlenrechnung übertragen. Man verwandelt hierdurch jede Multiplication von Zahlen in ein Zuzählen der Exponenten der entsprechenden Potenzen, die Division in ein Abzählen, das Erheben zu Potenz in eine Multiplication, das Wurzelausziehen in eine Division, jede dieser arithmetischen Operationen wird um eine Stufe erniedriget.

Was der deutsche Gelehrte angedeutet, aber nicht ausgeführt hatte, gelang dem schottischen Edelmann John Napier von Merchiston, geb. auf dem Schlosse Merchiston 1550. Die Ansichten beider Männer von der Sache waren aber sehr verschieden, während Stiefel die natürlichste Ansicht von der Sache hatte, ging Napier einen ganz eigenen Weg, der allein schon ihm das Eigenthum seiner Erfindung sichert. Es seien AB und DE zwei gerade Linien, von welchen die erste begränzt, die andere aber unbegränzt ist. Man denke sich: von A und D bewegen sich zwei Punkte in der ersten Linie von A gegen B und in der zweiten von D gegen E. Die Bewegung beginne gleichzeitig in A und D und die Geschwindigkeit in dem ersten sehr kleinen Zeittheilchen sei für beide Punkte gleich. Die Geschwindigkeit des Punktes in DE sei gleichförmig, in AB aber abnehmend, so daß, wenn er z. B. in C angekommen ist, seine Geschwindigkeit noch dem Reste des Weges BC proportional ist. Hat nun der Punkt in AB auf diese Weise den Weg AC zurückgelegt, und in DE den Weg DF gleichförmig, so nennt Napier DF den Logarithmus von BC.

Fig. 23.



Der Ideengang bei dieser Darstellung ist so eigenthümlich, und so verschieden von allen gewöhnlichen Vorstellungen der Sache, daß er vollständig als das Erzeugniß Napier's angesehen werden muß und ihm ohne Schmälerung der Ruhm der Erfindung gebührt. Zur Erklärung muß man hinzufügen, daß er eigentlich nur die Logarithmen der Sinus suchte zum Gebrauche in der sphärischen Trigonometrie. Die Linie AB nimmt er für den Sinus von 90° oder den Sinus totus, BC ist ihm der Sinus eines Bogens und DF der Logarithmus desselben. Aus der Darstellung ergibt sich, daß die abnehmenden BC in geometrischer Progression abnehmen, aber von einer Basis ist nirgends die Rede und an eine solche auch nicht gedacht worden. Bezeichnet man mit 1 : e das Verhältniß der Glieder der geometrischen Reihe, so läßt sich leicht

zeigen, daß nach n Zeitabschnitten $BC = AB(1-e)^n$, zugleich aber auch $DF = e . AB . n$. Nennt man $BC = y$ und $DF = x$, $AB = A$, so ist $y = A(1-e)^n$ und $x = e . A . n$, daher $n = \frac{x}{e . A}$, also $y = A(1-e)^{\frac{x}{e . A}}$ oder wenn ferner $(1-e)^{\frac{1}{e . A}} = a$, so wird $y = A . a^x$ und $\frac{y}{A} = a^x$, also $x = \log . \frac{y}{A}$. Hieraus läßt sich der Zusammenhang der Napier'schen Logarithmen mit unsern jetzigen Systemen erkennen. In dem Systeme Napier's ist der Logarithmus von Sin $90^0 = 0$ und wächst von hier an, während die Sinus abnehmen, alle Logarithmen sind positiv, während die unserigen negativ sind. Eben so eigenthümlich und erfindungsreich ist seine Methode der Berechnung und die Erleichterung, welche er sich zu verschaffen wußte bei einer so ungeheuren Arbeit. Die Tafeln von Napier erschienen 1614 zu Edinburg, sie enthalten die Logarithmen der Sinus und auch die der Ergänzungsbögen oder der Cosinus, zugleich die Unterschiede beider oder die Logarithmen der Tangenten.

Diese erste Ausgabe erwähnt der Vortheile, welche die Logarithmen bei allen Rechnungen gewähren: sie enthält eine Anweisung zum Gebrauche der Tafeln, aber noch keine Begründung und Entwicklung der Rechnung; der Eingang enthält die ebene und sphärische Trigonometrie. Wollte man aus diesen Tafeln den Logarithmus einer gewöhnlichen Zahl finden, so mußte man sie als einen Sinus oder als eine Tangente ansehen und als solche aufsuchen. Napier starb schon am 4. April 1617; von seinem Sohne Robert wurde aber 1619 eine 2te Ausgabe der Tafeln besorgt und darin auch die Methode mitgetheilt, nach welcher sie berechnet worden waren. Zu Lyon wurden die Logarithmen schon 1619 und die Erklärung der Berechnung 1620 nachgedruckt. In Deutschland wurden größere Tafeln, welche die Funktionen der Winkel von 10 zu 10 Sekunden enthielten, von Ursin berechnet und 1624 veröffentlicht. Fast zur selben Zeit erschienen Logarithmen von Kepler für gewöhnliche Zahlen, aus welchen man die Sinus aussuchen mußte. Krüger gab 1634 zu Danzig Tafeln für gewöhnliche Zahlen und für Sinus heraus; in allen diesen Tafeln war Napier's System beibehalten worden. Henry Briggs (1560—1630), Professor in London und später in Oxford, hatte die neue Erfindung mit Eifer aufgenommen, aber auch alsbald erkannt, daß es einfacher sein würde, ein System zu wählen, in welchem 0 der Logarithmus von 1 und 1 der von 10 sein würde. Er besuchte Napier und theilte ihm seine Ansicht mit; dieser billigte dieselbe, gab aber doch seine Arbeit unverändert heraus. Von Edmund Gunter, Professor zu London, erschienen 1620 die Logarithmen der Sinus und Tangenten nach dem Brigg'schen Systeme und 1624 von Briggs selbst, von 1 bis zu 20000 und von 90000 bis 100000 auf 14 Stellen berechnet. Die Lücke von 20000 bis 90000 wurde von dem Buchhändler Blacq, der auch Mathematiker war, ausgefüllt, und die vollständigen Tafeln von 1 bis 100000 auf 10 Stellen berechnet, erschienen 1628 in Gouda.

Um dieselbe Zeit etwa, und wahrscheinlich ganz unabhängig von Napier, ist auch ein Schweizer Jobst Burgi auf die Idee der Logarithmen gekommen. Die Tafeln sind aber erst 1620 zu Prag erschienen und gehören einem System an, in welchem log. 1 = 0 und log. 10 = 230270 ist. Man sieht, daß diese Logarithmen mehr Aehnlichkeit mit den Brigg'schen haben, sie wachsen mit den Zahlen wie diese. Beide Erfindungen entsprachen ihrem Zwecke. Napier wollte die Rechnungen in der Trigonometrie abkürzen, Burgi aber nur die gewöhnlichen Rechnungen mit großen Zahlen.

Die Erfindung der Logarithmen scheint ganz unvorbereitet gewesen zu sein, wenigstens kennen wir keine Vorarbeiten, und die Andeutung bei Stiefel kann kaum dafür gelten, da sie außerdem nicht die Grundlage abgegeben hat. Wir urtheilen aber in der Regel nur nach uns schriftlich hinterlassenen Denkmälern, ohne zu bedenken, daß nur das Fertige gewöhnlich bekannt wird, daß fruchtlose Bemühungen zur Verwirklichung einer Idee meistens verborgen bleiben, diese aber dennoch sehr verbreitet gewesen sein kann. So sehen wir die Erfindung Napier's von ihrer Zeit wie ein erwarteter Freund aufgenommen, begrüßt und sogleich verstanden. Noch mehr. Die unvollkommene Form, in welcher sie erschien, wurde sogleich erkannt und in eine andere umgesetzt, welche heute noch gilt; was später hinzugekommen ist, hat die Sache nicht ändern können. Wie schnell die neue Erfindung sich verbreitete, beweist, daß Kepler schon 1617 zu Prag Kenntniß von den Logarithmen erhielt, aber erst ein Jahr später lernte er sie kennen und würdigen. Da die Vortheile, welche er durch sie erhielt, seine Erwartungen übertrafen, so ließ er sich sogleich Tafeln berechnen, und bediente sich ihrer bei der Berechnung seiner rudolphinischen Tafeln, welche ohne dieses Hülfsmittel wohl unvollendet geblieben wären.

Der Mann, durch dessen Bemühungen die meisten Rechnungen auf ein Kleinstes zurückgeführt worden sind, der die Thätigkeit vieler Menschen dadurch wenigstens verzehnfacht hat, ist noch in andern Beziehungen merkwürdig. Er war, was sich mit seiner Eigenschaft als Mathematiker wohl vereinbaren läßt, Theologe aus Neigung, aber kein freisinniger Theologe, sondern eifriger und strenger Puritaner, wie nur einer seiner Landsleute. Er machte von seinen mathematischen Fähigkeiten einen höchst sonderbaren Gebrauch, indem er eine Auslegung der Offenbarung Johannis schrieb, in aphoristischer Form mit Propositionen und Beweisen. In Prop. 26. wird behauptet, daß der Pabst der Antichrist sei; in Prop. 36, daß die Heuschrecken die Türken und Mohammedaner seien u. s. w. Eben so hat er das Ende der Welt auf das Jahr 1786 vorausgesagt. Man darf sich hierüber nicht wundern, solche Erscheinungen sind vielfältig da gewesen; vor ihm und nach ihm sind noch größere Männer solchem Aberglauben verfallen.

Erweiterung der unbestimmten Analytik.

Die unbestimmte Analytik hatte seit ihrer Einführung in Europa keine erheblichen Fortschritte gemacht, die glückliche Lösung einzelner Aufgaben konnte die Sache nicht wesentlich fördern. Der Gegenstand erlangte jedoch eine größere Verbreitung durch die Bekanntwerdung der Arithmetik des Diophantus, und besonders hat die Uebersetzung Holzmanns hierzu beigetragen. Die Unvollkommenheit dieser ersten Uebersetzung und Bearbeitung erschwerte aber noch sehr das Studium dieses zur Zeit noch schwierigen Zweiges der Mathematik. Der erste, der hier Bahn brach, war Bachet de Meziriac von Bugey in Frankreich. Wir verdanken diesem ausgezeichneten Gelehrten die noch jetzt gebräuchliche Methode der Auflösung der unbestimmten Gleichungen vom ersten Grade in ganzen Zahlen. Diese Methode war freilich schon vor mehr als tausend Jahren den Indern bekannt, aber nach Europa war sie nicht gedrungen, und für uns ist Bachet der Erfinder. Wir besitzen von ihm über die unbestimmte Analytik zwei Schriften, welche 1612 und 1624 herauskamen, und welche in unterhaltenden Aufgaben ganz geeignet waren, dem Gegenstande eine große Theilnahme zuzuwenden. Bei seiner Vorliebe für diesen Zweig der Algebra mußte er es für sehr wünschenswerth halten, eine gute Ausgabe des einzigen griechischen Werkes zu Tage zu

fördern, welches davon handelte, und so besorgte er (1621), gestützt auf die Vergleichung dreier Handschriften, eine Ausgabe des Diophantus; er gab den griechischen Text mit lateinischer Uebersetzung und mit Anmerkungen. Bachet war ein vielseitig gebildeter Gelehrter, seine Thätigkeit in der Mathematik fällt in sein 20stes bis 32stes Jahr; er starb 1638.

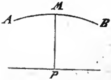
Wie erwähnt, hatten früher schon Bombelli, Vieta und Andere Vieles von Diophantus in ihre Arbeiten aufgenommen, auch der holländische Mathematiker Stevin hatte vier Bücher übersetzt und diesen Girard noch die Uebersetzung des 5ten und 6ten Buches beigefügt; sie sind in den Werken des Stevin, welche Girard besorgt hat, enthalten. Auch später sind die Schriften des Diophantus in verschiedene Sprachen übersetzt, noch öfter herausgegeben worden.

Einführung der Idee des Unendlichen in die Mathematik und Anwendung auf die Quadraturen und Kubaturen.

Kepler aus Weil in Württemberg (1571—1630) war vorzugsweise Astronom, doch hat er auch in der Mathematik Neues angeregt, was durch seine Folgen von großer Wichtigkeit geworden ist. Die alten Geometer bedienten sich zu gewissen Zwecken der Exhaustionsmethode z. B. Euklid, um zu beweisen, daß der Flächeninhalt eines Kreises gleich ist einem Dreiecke, dessen Basis der Umfang und Höhe der Radius ist; noch mehr Archimedes z. B. bei der Darstellung der Fläche der Parabel und der Berechnung der Konoide. Der Grundgedanke hierbei war, wie man die Sache sonst auch ansehen mag, daß, wenn z. B. die Seiten eines ordentlichen Vielecks im Kreise immer fort halbirt werden, neue Vielecke von doppelter Seitenzahl entstehen, und die Umfänge derselben sich immer mehr dem Umfange des eingeschriebenen Kreises nähern, eben so die Vielecke um den Kreis; die eingeschriebenen Figuren blieben stets kleiner und die umgeschriebenen stets größer als der Kreis. Man konnte nun die Theilung in Gedanken so weit fortsetzen, daß die Unterschiede kleiner wurden als jede angebbare Größe, also in der That unendlich klein, d. h. verschwindend. Eine solche Vorstellung, welche den Indern geläufig war, wagten aber die Griechen nicht, sie umgingen sie auf künstliche Weise, und dadurch wurden ihre Beweise zum Theil höchst schwerfällig. Archimedes fand die Fläche der Parabel dadurch, daß er zeigte, daß sie aus einer Reihe Flächen zusammengesetzt sei, von welchen jede folgende $\frac{1}{4}$ der vorhergehenden ist, und da diese Reihe kein Ende hat, so werden die Glieder immer kleiner und zuletzt unendlich klein; er vermied dieses auszusprechen, die Sache wurde aber dadurch nicht verändert. Man begreift aber leicht, wie die Griechen bei ihrer Richtung einer Vorstellung ausweichen mußten, bei welcher ihnen die Sache gleichsam unter den Händen verschwand und sie nichts Darstellbares mehr hatten, woran sie sich halten konnten. Kepler brach nun zuerst dieses Verhältniß und hat dadurch der Mathematik einen großen Dienst geleistet, denn bei allen derartigen Dingen kommt es nur darauf an, daß Jemand den ersten Schritt thut. Die Einführung der Idee des Unendlichen war so nothwendig, daß ohne sie gar keine Fortschritte von Bedeutung möglich gewesen wären, und sie wird sich immer erhalten, wie sehr man sich auch bemühen mag, sie zu verdecken oder zu umgehen. Kepler betrachtete den Kreis als eine Summe kleiner Dreiecke, deren Spitzen im Mittelpunkte beisammenliegen, die Grundlinien aber im Umfange des Kreises; nimmt man nun diese immer kleiner an, also die Anzahl der Dreiecke immer größer, so ist die Gränze dieser Vorstellung nothwendig der Kreis. Eben so betrachtete er die

Kugel als die Summe einer unendlich großen Anzahl kleiner Pyramiden mit ihren Spitzen im Mittelpunkte beisammenliegend, mit ihrer Grundfläche aber in der Oberfläche der Kugel, den Cylinder als eine eben solche Anhäufung von Prismen u. s. w. Aehnliche Vorstellungen hatten auch die Inder angenommen. Wie fruchtbar diese Idee war, wird die Folge beweisen, obgleich dadurch nichts Neues geschaffen und das Bestehende nur aus dem natürlichen Gesichtspunkte angesehen wurde. Archimedes hatte die Körper betrachtet, welche durch Umdrehung eines Kegelschnittes um seine Achse entstehen, Kepler faßte die Sache allgemeiner und ließ Körper hervorgehen durch Umdrehung dieser Kurven oder auch nur von Theilen derselben um beliebige Linien als Achsen. Er vermochte freilich nicht diesen Stoff zu bewältigen und hinterließ ihn künftigen Forschern, doch wurden einige einfachere Fälle auch von ihm gelöst. Eine unmittelbare Frucht seiner Idee des Unendlichen war die Bemerkung, daß, wenn PM die größte Ordinate einer Kurve AB ist, die Zu- oder Abnahme dieser Ordinate bei unendlich kleiner Veränderung ihres Ortes gleich 0 sein muß, eine Bemerkung, welche die Grundlage der so wichtigen Lehre vom Größten und Kleinsten wurde. Diese Arbeit Keplers war 1615 herausgekommen.

Fig. 24.



Derselbe Gegenstand wurde kurze Zeit nachher von einer andern Seite aufgenommen. Bonaventura Cavalleri (1598 — 1647), Professor zu Bologna, gab 1635 seine Geometrie des Untheilbaren heraus; er bezeichnete damit eine neue Methode, die Flächen- und Körperräume aufzufinden. In diesem Werke beabsichtigte er, die Methode der Alten zu vereinfachen, ohne wie Kepler die Vorstellung des Unendlichkleinen aufzunehmen. Die Flächen theilte er durch Linien, die Körper durch Ebenen in Schichten, und suchte nun die Summen dieser Linien und Ebenen zu bestimmen. Man denke sich über der Basis eines Dreieckes ein Rechteck von gleicher Höhe gezeichnet und in beiden Figuren eine Menge Linien parallel zur Grundlinie und in gleichen Abständen von einander gezogen, so wird die Summe der Linien im Dreiecke die Hälfte sein von der Summe der Linien im Rechtecke, und deßhalb, schloß Cavalleri weiter, wird auch die Fläche des Dreiecks die Hälfte sein der Fläche des Vierecks. Auf diese Weise gelang es ihm nun, eine Menge neuer Berechnungen von Raumgrößen aufzufinden; aber in seiner Methode lag doch wieder versteckt, was er vermeiden wollte, die Vorstellung des Unendlichen.

Entwicklung allgemeiner Methoden für die Tangenten und die Maxima und Minima.

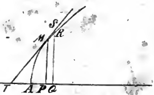
Ungefähr zur selben Zeit wie Cavalleri und unabhängig von diesem beschäftigte sich auch in Frankreich Roberval (1602—1675) mit diesem Gegenstande. Er dachte sich die Flächen als eine Anhäufung unendlich schmaler Rechtecke und die Körper eben so aus unendlich kleinen Prismen zusammengesetzt. — Archimedes hatte bereits seine Spirallinie als durch eine doppelte Bewegung erzeugt angesehen; diesen Gedanken dehnte nun Roberval auf alle Kurven aus. Eine ebene Kurve kann auf diese Weise betrachtet werden als beschrieben von einem Punkt, auf welchen zwei Kräfte wirken. Als Beispiele sind die Kegelschnitte aus der Mechanik bekannt.

Man denke sich einen unendlich kleinen Theil einer Kurve, so wird dieser als eine gerade Linie angesehen werden können und zugleich als die Mittelkraft

zweier Seitenkräfte, welche der Natur der Kurve entsprechen. Sind nun die Seitenkräfte gegeben, so kann man daraus die Mittelkraft finden, also auch die Richtung der Kurve an jener Stelle, d. h. die Tangente. Auch hier ist die Vorstellung des Unendlichkleinen die Grundlage, denn ohne sie kann die veränderliche Bewegung gar nicht aufgefaßt werden, die stete Einwirkung einer Kraft — die außerdem in der Natur gar nicht existirt — muß aufgelöst werden in die einzelnen Impulse, wie sie in den unendlich kleinen Zeitelementen auf einander folgen. Diese Ansicht war allgemeiner als alle bisherigen und sie diente Roberval zur Konstruktion der Tangenten. — Unterdessen hatte man in Frankreich auch angefangen, andere Kurven als die aus dem Alterthum überkommenen zu betrachten. Um 1636 beschrieb schon Fermat eine Spirale, welche von der des Archimedes verschieden war. Eben so erfand man eine ganze Klasse von Kurven, von welchen die Parabel der Alten ein specieller Fall war; alle diese Kurven umfaßt ein gemeinsames Gesetz, irgend eine Potenz der Ordinate ist ein Vielfaches einer andern Potenz der Abscisse. Roberval und Fermat fanden sogleich die Flächenräume dieser Parabeln, die Konstruktion ihrer Tangenten und die Lage der Schwerpunkte derselben.

Ausgezeichnet war in allen Zweigen der Mathematik, Fermat (1590—1663), Rath beim Parlamente zu Toulouse. Er ist mit Pascal der Erfinder der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Begründer eines eben so schönen als schwierigen Theiles der Arithmetik, nämlich der Theorie der Zahlen, welche mit der Theorie der unbestimmten Gleichungen im innigsten Zusammenhange steht. Die oben berührte Idee Keplers zur Bestimmung des Größten und Kleinsten wurde von Fermat ausgeführt, welcher auch eine neue Methode zur Konstruktion der Tangenten erfand; beides ist um so merkwürdiger als darin schon die deutlich ausgesprochene Grundlage der Differentialrechnung enthalten ist. Sucht man z. B. den größten oder kleinsten Werth, welchen der Ausdruck $y = 2x^2 - 12x + 5$ erhalten kann, so betrachte man x und y als die Coordinaten der Kurve A B Fig. 24. Stellt $y = PM$ die größte oder kleinste Ordinate dar, die der Stelle x entspricht, so wird die nächste, ihr unendlich nahe, der Stelle $x + h$ entsprechen, wenn h unendlich klein ist. Sei nun diese nächste Ordinate um k von der vorhergehenden verschieden, so wird sein $y + k = 2(x + h)^2 - 12(x + h) + 5$ oder $y + k = 2x^2 - 12x + 5 + 4xh + 2h^2 - 12h$, also $k = 4xh + 2h^2 - 12h$. Nach der Ansicht Keplers muß aber $k = 0$ sein, daher $0 = 4xh + 2h^2 - 12h$ oder $0 = 4x + 2h - 12$, also $x = 3$, weil h als eine unendlich kleine Größe gegen die übrigen verschwindet. Für $x = 3$ ist aber $y = -13$ und dieß ist der kleinste Werth, welchen der Ausdruck $2x^2 - 12x + 5$ erhalten kann, für jeden andern Werth von x wird y größer. Fermats Methode der Tangenten beruhte auf folgenden Prinzipien: Es sei AMR eine Kurve, PM die Ordinate, TS die Tangente an M; läßt man die Abscisse $AP = x$ um $PQ = e$ wachsen, so geht die Ordinate $PM = y$ in $QR = z$ über. Nun ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke TP zu TQ wie PM zu QS; ersetzt man QS durch das kleinere z so ist TP zu TQ kleiner als PM zu z; bezeichnet man TP mit a, so ist a zu $a + e$ kleiner als y zu z. Es sei z. B. die Kurve eine Parabel, also $y^2 = px$ und $z^2 = p(x + e)$; daher wenn die Ungleichheit ins Quadrat erhoben wird, ist a^2 zu $(a + e)^2$ kleiner als y^2 zu z^2, also auch kleiner als p x zu

Fig. 25.



$p (x + e)$ oder kleiner als x zu $x + e$. Hieraus erhält man $a^2 (x + e)$ kleiner als $x (a + e)^2$ oder $a^2 x + a^2 e$ kleiner als $x . a^2 + 2 x . a e + x . e^2$ oder $a^2 . e$ kleiner als $2 x . a e + x . e^2$ oder a^2 kleiner als $2 a x + e . x$. Diese Ungleichheit wird nun der Gleichheit um so näher kommen, je kleiner der Unterschied zwischen QR und QS, also je kleiner e ist; setzt man daher $e = o$, so wird genau $a^2 = 2 a x$ oder $a = 2 x$. Man kann also an irgend einem Punkt M der Parabel eine Tangente ziehen, wenn man die Senkrechte MP zieht und dann $AT = AP$ macht und T mit M verbindet; die Linie $AF = a$ heißt die Subtangente. Diese Methode besteht also darin, aus etwas Vorhandenem ein Neues Aehnliches hervorgehen zu lassen und es dann wieder aufzuheben.

Mit der griechischen Geometrie war Fermat so vertraut, daß er darin Vorzügliches zu leisten im Stande war, er hat über die Berührung der Kugeln geschrieben, er beabsichtigte auch die drei Bücher Porismen von Euklid wieder herzustellen. Was über den Erfolg seiner Bemühungen bekannt geworden ist, läßt uns nur bedauern, daß seine Arbeiten, wie es scheint, für die Nachwelt verloren gegangen sind. Eines seiner bekannt gewordenen Porismen war das bekannte Theorem der Involution von sechs Punkten, und hiernach zu schließen dürfte die neuere Geometrie diesen Verlust wieder ersetzen.

Mit Kepler hat die Reihe der Gelehrten begonnen, welche die Geometrie auf eine beträchtlich höhere Stufe gehoben haben. Die Berechnung der Flächen und Körper wurde weit über diejenigen Gränzen hinausgeführt, in welchen Archimedes sie gelassen hatte und die unterdessen nicht erweitert worden waren. Die dabei angewandte Methode war nicht aus den besondern Eigenschaften der Flächen oder Körper hergenommen, sondern umfaßte gleich eine ganze Reihe solcher Raumgebilde. Zur Bestimmung der größten und kleinsten Werthe hatte man eine allgemeine Methode, welche, wenn auch nicht in ihrer einfachsten Form, doch alle früheren Verfahrungsweisen ohne Vergleich übertraf. Die verschiedenen Methoden zur Konstruktion der Tangenten waren gleichfalls von der Art, daß sie sich zu einer umfassenden Anwendung eigneten. Wenn die Alten solche Fragen behandelten und eine Aufgabe gelöst hatten, so war damit für die Lösung anderer Aufgaben nichts gewonnen, für diese mußten auch wieder besondere Wege aufgefunden werden, welche von der besonderen Beschaffenheit des Falles abhingen. Was die jetzige Geometrie in diesen Dingen vor der alten auszeichnete, war eben diese Allgemeinheit der Methoden. Die Alten kannten außer den Kegelschnitten nur noch wenige Kurven: dieses Feld wurde jetzt gleichfalls erweitert. Fermat gab eine neue Spirale an, in welcher die Quadrate der Radien den Winkeln proportional waren, während bei der Spirale des Archimedes die Radien selbst diese Eigenschaft haben; hierdurch war aber die Bahn zur Erfindung anderer Spirallinien eröffnet. — Die gewöhnliche Parabel kann durch eine Bewegung zweier Geraden, wenn man eine um einen festen Punkt sich drehen läßt, während die andere parallel mit sich selbst sich fortbewegt, erzeugt werden. Aus dieser Entstehungsweise läßt sich eine Vergleichung herleiten zwischen der gewöhnlichen Parabel und den Spiralen des Archimedes, und diese ist auch von Cavalleri, Gregorius von St. Vincent, Roberval und Hobbes gemacht worden. Die Kurve, welche von einem Punkte eines Kreises beschrieben wird, der sich auf einer Geraden fortwälzt, wird „Radlinie oder Cykloide" genannt; Galilei ist der erste, der sich mit dieser Kurve beschäftigt hat, die Schwierigkeit der Aufgabe überstieg aber seine Kräfte. Roberval hatte schon 1634 gefunden, daß ihre Fläche das Dreifache der Fläche des erzeugenden Kreises sei, auch Toricelli, der Schüler des Galilei, hat dieses

gefunden. Fermat löste die Aufgabe, an diese Kurve eine Tangente zu ziehen; dasselbe leistete auch Viviani. Wenn der beschreibende Punkt nicht im Umfange des Kreises liegt, sondern innerhalb oder außerhalb, so entstehen Formen der Cykloide, welche Toricelli zuerst angegeben hat. Roberval und Toricelli fanden den Inhalt des Körpers, welcher entsteht, wenn die Cykloide sich um ihre Grundlinie dreht; der erste berechnete auch den Körper, welcher durch eine solche Drehung um die Achse der Kurve erzeugt wird.

Diese merkwürdigen Fortschritte, welche in so kurzer Zeit in der Mathematik gemacht wurden, sind allein aus ihrer arithmetischen Richtung hervorgegangen und durch die Anwendung des sogenannten Calculs erzeugt worden; selbst die Arbeiten im Sinne der griechischen Geometrie folgten diesem Einflusse; sie wurden angeregt durch die Fortschritte der Geometrie überhaupt, und die größere Leichtigkeit der Darstellung, welche die rechnende Geometrie angenommen hatte, ging jetzt auch auf diese über. Ohne die Allgemeinheit der Resultate, welche die Rechnung gewährt hatte, würde man in der synthetischen Geometrie nie zu gleichen Bestrebungen gelangt sein; sie würde ihren speciellen Charakter behalten haben und eine bloße Nachahmung der Griechen geblieben sein. Immer mehr wird sich herausstellen, von welcher großen Bedeutung das eigenthümliche Zusammentreffen der beiden Richtungen in Europa war.

Das Wiederaufblühen der synthetischen Geometrie.

Der erste, der in Frankreich an der Vereinfachung der griechischen höheren Geometrie arbeitete, war Mydorge (1585—1647). Er schrieb eine Abhandlung über die Kegelschnitte, welche 1631 und vermehrt 1641 erschien, sie enthält unter anderem auch den Satz, daß, wenn man von einem Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes Radien nach der Kurve zieht und sie nach einem gegebenen Verhältnisse verlängert, die Endpunkte auf einem neuen Kegelschnitte liegen, welcher dem ersten ähnlich ist. Diesen Satz hat seinem Wesen nach schon Apollonius in seinem 6ten Buche, er ist einer von den Sätzen, welchen, beschränkt auf den Kreis, Ben Haithem als neu und von ihm herrührend ausgab. Die Griechen hatten, wahrscheinlich schon vor Euklid, angefangen, gewisse allgemeine Sätze aufzustellen, durch deren geschickte Benützung eine Reihe anderer Sätze abgeleitet werden konnte; wie weit sie darin gekommen waren, ist uns unbekannt, der Verfall der griechischen Wissenschaft verhinderte jedenfalls die weitere Ausbildung. Derselbe Gegenstand war nun von Fermat wieder aufgenommen worden, aber erst Desargues (1593—1662) und sein Schüler Pascal (1623—1662) traten eigentlich in diese Bahn wieder ein. Zuerst wandten sie eine neue, höchst fruchtbare Vorstellung an, welche den Griechen gänzlich unbekannt war, und durch welche sie vom Besondern auf das Allgemeine von den Eigenschaften des Kreises auf die der übrigen Kegelschnitte schließen konnten. Da alle diese Kurven an demselben Kegel mit kreisförmiger Basis erzeugt werden können, so wird das Auge an der Spitze des Kegels, z. B. einen elliptischen Schnitt, nur als Kreis sehen, weil alle Punkte der Ellipse mit den entsprechenden Punkten des Kreises in derselben Gesichtslinie liegen; oder, wenn man den Schatten einer Ellipse auf einer festen Wand auffängt, so wird man demselben gegen die Lichtstrahlen eine solche Lage geben können, daß der Schatten ein Kreis wird; der Kreis als Basis bildet alsdann mit dem Lichtpunkte als Spitze einen Kegel, in welchem die Ellipse einen schiefen Schnitt bildet. Der Kreis erscheint hier als die Projektion der Ellipse, und da die

Strahlen von einem Punkte ausgehend gedacht werden, in perspectivischer Anschauung. Aehnlich ist das Verhältniß für die andern Kegelschnitte, und die Anwendung der Perspektive war es, und die Betrachtung der Schnitte am Kegel selbst, welche die Forschungen beider Geometer so fruchtbar machten. Während die Alten jeden Kegelschnitt besonders betrachteten, und wenn sie bei dem einen eine Eigenschaft gefunden hatten, eben so mühsam sie auch bei den andern suchen mußten, gelang es der allgemeinen Betrachtungsweise, wo alle Kegelschnitte als Unterarten einer einzigen Kurve erschienen, die gleiche Eigenschaft auf alle auszudehnen. Ein weiterer bedeutender Fortschritt war, daß es diesen Geometern gelang mit Hülfe eines Porisma, welches schon bei Fermat erwähnt wurde, solche allgemeine Sätze zu entwickeln, welche eine ganze Reihe anderer als besondere Fälle in sich schlossen. Einer der Verehrer Desargnes behauptete, daß ein einziger Satz desselben 60 Sätze der vier ersten Bücher des Apollonius in sich schloß. Von Pascal ist noch zu bemerken, daß er durch ausgesetzte Preisfragen Untersuchungen über die Cykloide veranlaßte und endlich selbst seine Forschungen hierüber bekannt machte. Die gemeine Cykloide gab gleichfalls Veranlassung zur Erfindung einer ganzen Klasse dieser Kurven, indem man überhaupt eine Kurve auf einer andern sich fortwälzend dachte, wobei irgend ein Punkt der ersten eine neue Kurve beschreibt.

Der Niederländer Gregor von St. Vincent (1584—1667), Mitglied der Gesellschaft Jesu, war in der Geometrie der Griechen sehr eingeweiht und schrieb ganz im Geiste der Alten sein großes Werk, welches 1647 herauskam. Der Inhalt betrifft meistens die Kegelschnitte, welche er auf eine ihm eigene Weise, aber immer treu seinen Vorbildern behandelte; er stellte auch Vergleiche an zwischen der Parabel und der Spirale des Archimedes.

Die bis jetzt erlangten Erfolge im Gebiete der Geometrie erstreckten sich daher auf die Erfindung einfacher allgemeiner Methoden für die Untersuchung und die Vereinigung alleinstehender, getrennter Wahrheiten zu neuen allgemeinen Sätzen.

Die Erfindung der analytischen Geometrie.

Eine gänzliche Umgestaltung erhielt die Geometrie aber erst in Verbindung mit der Algebra durch Descartes (1596—1650); jetzt erst trat die Wichtigkeit der schon seit 2000 Jahren angestrebten Vereinigung zweier Richtungen hervor und zwar ähnlich wie bei der Erfindung der Logarithmen, beinahe ganz ohne Vorarbeiten, obschon auch hier allerdings der Gegenstand so vorbereitet war, daß er nothwendig in die Wirklichkeit treten mußte. Descartes war einer jener Männer, die sich durch ihre umfassende Bildung in verschiedenen Zweigen unseres Wissens gleich groß gezeigt haben. Geboren zu La Haye in Touraine, machte er die gewöhnlichen Studien in dem Jesuitencollegium zu La Flèche, ging dann zum Militär und bereiste hierauf verschiedene Theile Europas. Seine Geometrie, welche ihm so vielen Ruhm brachte, kam 1637 zu Leyden heraus. Im ersten Theile behandelte er geometrische Aufgaben, welche sich durch Lineal und Zirkel lösen lassen, und zeigte die Anwendung der Algebra auf solche Aufgaben, und ging dann zum eigentlichen Gegenstande seines Werkes über. Der zweite Theil enthielt die Lehre von den Tangenten und die Betrachtung einzelner Kurven. Im dritten Theile lehrte er die Konstruktion der Wurzeln der Gleichungen bis zum 6. Grade vermittelst der Durchschnitte zweier Kurven. Nimmt man die Grundeigenschaften der Kegelschnitte, wie sie den Griechen sich zuerst darstellten (S. 92 u. 93), so ist die Parabeleine Kurve, in welcher, wenn vom Anfangspunkte

an gerechnet, man ein Stück von der Axe abschneidet, daselbst eine Senkrechte bis zur Kurve errichtet, das Quadrat dieser Senkrechten gleich ist dem Rechtecke aus dem abgeschnittenen Stücke und einer gegebenen Linie. Das abgeschnittene Stück ist die Abseisse, die Senkrechte die Ordinate, beide Linien zusammen die Coordinaten und die gegebene Linie der Parameter. Bezeichnet man die drei Linien der Reihe nach mit x, y und p, so kann diese Eigenschaft dargestellt werden durch die Zeichen $y^2 = p \cdot x$, welche, in die gewöhnliche Sprache übersetzt, denselben Sinn geben. Auf gleiche Weise und wenn a noch die große Achse bedeutet, erhält man für die Grundeigenschaft der Ellipse den Ausdruck $y^2 = p\,x - \frac{p}{a}\,x^2$ und für die Hyperbel $y^2 = p\,x + \frac{p}{a}\,x^2$, für den Kreis, in welchem $p = a$ ist, erhält man $y^2 = a\,x - x^2$. Diese Zeichen geben durchaus nichts anderes an, als was die Griechen und ihre Nachfolger durch Worte auszudrücken pflegten, und man sieht, wie einfach der Uebergang ist. Wenn man aber bedenkt, wie lange es gedauert hat, bis die Operationszeichen und die Potenzenbezeichnung, das Gleichheitszeichen und die Zeichen für die allgemeinen Größen erfunden und angenommen wurden, so begreift man leicht, wie Vieles vorhergehen mußte, bis dieser Uebergang gemacht werden konnte, ganz abgesehen von andern Schwierigkeiten. In diesem Uebergange von der gewöhnlichen Sprache zur Zeichensprache und in der Betrachtung einer Kurve als eine Reihe aufeinanderfolgender Punkte, welche alle demselben Gesetze unterworfen sind, und deren Lage nach diesem Gesetze, durch zwei Geraden x und y bestimmt wird, besteht das Verdienst des Descartes. Die Grundidee ist sehr einfach und trat bei den Griechen noch in einer andern Weise hervor. Wenn man in einer Ebene mehrere, der Lage nach gegebene Geraden hat und nun einen Punkt von der Beschaffenheit sucht, daß, wenn man von ihm auf diese Geraden senkrechte Linien zieht, gewisse Verbindungen dieser Senkrechten ein gegebenes Verhältniß haben sollen, so findet man, daß es viele Punkte gibt, welche dieser Forderung entsprechen. Bestimmt man nun eine Reihe Punkte und verbindet sie, so erhält man eine Kurve, welche ein Kegelschnitt ist, wenn nie mehr als zwei Senkrechten im Produkte oder zu Rechtecken verbunden vorkommen. Die Untersuchung wird schwieriger, wenn die Linien nicht senkrecht, sondern unter gegebenen Winkeln gezogen werden. Nimmt man als einfachsten Fall nur zwei gerade Linien ihrer Lage nach gegeben, welche Achsen heißen, und zieht man von einem Punkte Parallellinien zu diesen Achsen und setzt man, daß gewisse Verbindungen derselben ein gegebenes Verhältniß haben sollen, so hat man gleichfalls die oben angegebene Methode des Descartes, Kurven durch Gleichungen darzustellen, nur in allgemeinerer Auffassung. Die neue Methode bestand also darin, Kurven durch unbestimmte Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Größen x und y auszudrücken; jedem willkürlich gewählten Werthe von x entspricht ein bestimmter Werth von y, und die Konstruktion beider zusammengehörigen Linien gibt einen Punkt der Kurve. Jede Gleichung vom 2ten Grade $a\,y^2 + b\,x\,y + c\,x^2 + d\,y + e\,x + f = 0$ stellt einen Kegelschnitt dar und von den Werthen der constanten Größen a, b, c, ... hängt es ab, von welcher Art derselbe ist.

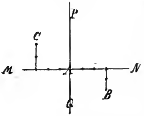
Die Gleichung einer Kurve ist der Inbegriff aller ihrer Eigenschaften und der Geometer kann sie sämmtlich aus ihr ableiten. Man erkennt leicht, welche ungeheure Umwälzung die Geometrie hierdurch erfahren mußte. Statt der einzelnen wenigen Kurven, welche man bisher betrachtet hatte, wurde man jetzt auf ganze Klassen aufmerksam gemacht, die in natürlichen Gruppen nach dem Grade ihrer Gleichungen sich darstellten, man hatte jetzt nur noch krumme

Linien des 2ten, 3ten, 4ten Grades mit den allgemeinen Eigenschaften, welche durch den Grad ihrer Gleichungen bedingt waren. Wenn es früher als ein Ereigniß betrachtet wurde, wenn ein Geometer eine neue Kurve erdachte, so verlor jetzt dieses Verhältniß ganz seinen Werth; in den Gleichungen der verschiedenen Grade lagen alle denkbaren Kurven mit Ausschluß einer andern Reihe, von welcher später die Rede sein wird. Das erste, was bei einer Kurve in Betracht kommen muß, ist, ihren Lauf im Allgemeinen kennen zu lernen: hierzu bieten nun die Tangenten das geeignetste Mittel dar, indem die Kurve im Punkte der Berührung mit der Tangente die gleiche Richtung hat. Descartes widmete daher auch im zweiten Theile seines Werkes diesen Linien seine Aufmerksamkeit. Errichtet man im Berührungspunkte auf der Tangente eine Senkrechte, so ist das Stück derselben zwischen der Kurve und der Abscissenlinie die Normale dieses Punktes und die Entfernung der Fußpunkte der Ordinate und Normale auf der Abscissenlinie die Subnormale. Diese Subnormale nun suchte Descartes aufzufinden mit Hülfe eines Kreises, dessen Konstanten er zuerst unbestimmt nahm und sie dann seinem Zwecke gemäß an gewisse Bedingungen knüpfte, woraus ihre Bestimmung hervorging. Man erinnere sich, daß Fermat dasselbe durch die Subtangente auf einfachere Weise zu erreichen suchte.

Diese neue Geometrie wurde die analytische Geometrie genannt und die, welche sich des Calculs nicht bediente, die synthetische. Die großen Erfolge der ersteren drängten die andere eine Zeitlang in den Hintergrund und nur allmälig vermochte sie sich wieder zu erheben; beide bildeten von nun an in gewisser Art Gegensätze, ihre Vermittelung ist bis heute noch nicht erfolgt. Eine jede hat Vorzüge vor der andern und sie ergänzen sich gegenseitig, so lange, bis sie in einer noch allgemeinern Methode zusammenfließen werden.

Die erste Rückwirkung der neuen Geometrie auf die Algebra betraf die Lehre von den Gleichungen. Man denke sich zwei zu einander senkrechte Achsen MN und PQ, die Linien, welche in der Richtung MN genommen werden, bezeichne man durch x und die in der Richtung PQ durch y; A sei der Ausgangspunkt. Will man nun andeuten, daß ein Punkt in der Linie MN liege und von A z. B. 6 Fuß weit entfernt sei, so kann er sowohl auf der rechten als auf der linken Seite von A liegen; um diese Unbestimmtheit aufzuheben, bezeichnet man die eine Richtung, z. B. die rechte Seite, mit + und dann die linke mit —, so daß also, wenn $x = + 3$, ein Punkt auf der rechten, und wenn $x = - 3$, ein Punkt auf der linken Seite gemeint ist. Eben so verhält es sich mit der zweiten Richtung, PQ . $y = + 2$ bedeutet eine Entfernung von MN um 2 Fuß nach oben und $y = - 2$ eine solche nach unten. Die Lage eines Punktes gegen die Achsen ist nun gegeben, wenn seine Coordinaten x und y mit den entsprechenden Zeichen gegeben sind; ist z. B. $x = + 3$ und $y = - 2$, so liegt der Punkt in B, ist aber $x = - 3$ und $y = + 2$, so liegt er in C. Hat man nun die Gleichung einer Kurve, z. B. $5 y^2 - 6 x y + 3 x^2 - 5 x - 12 = 0$ und verlangt man zu wissen, in welchen Punkten sie durch die Achse MAN geht, so darf man nur beachten, daß in diesem Falle $y = 0$ ist. Man setze daher in der unbestimmten Gleichung für y den Werth 0, so erhält man den dazu gehörigen Werth von x aus der Gleichung $3 x^2 - 5 x - 12 = 0$ und hieraus $x = + 3$ und $x = - \frac{4}{3}$. Früher

Fig. 26.



würde man nun die zweite Wurzel verworfen haben, jetzt aber zeigte sich ihre Bedeutung augenscheinlich; $x = + 3$ zeigt an, daß die krumme Linie rechts von A in einer Entfernung von 3 Fuß durch MN geht und $x = -\frac{4}{3}$, daß dieß auch auf der linken Seite von A stattfindet in einer Entfernung von $1\frac{1}{3}$ Fuß. Cardanus und besonders Girard hatten zwar die negativen Wurzeln auch schon erkannt, aber sie waren nicht in Aufnahme gekommen, weil man eine rechte Anwendung davon nicht machen konnte; selbst Descartes, der doch gewiß ihre ganze Bedeutung erkannt hatte, nannte sie noch falsche Wurzeln.

Wir verdanken diesem Geometer noch eine Auflösung der Gleichungen des 4ten Grades, verschieden von allen früheren; er dachte sich solche Gleichungen entstanden aus zwei Faktoren vom zweiten Grade, deren Coefficienten er bestimmte. Er ist ferner der Urheber eines Satzes aus der Theorie der Gleichungen, welcher noch jetzt seinen Namen trägt. Wenn in einer Gleichung zwei aufeinander folgende Glieder gleiche Zeichen haben, so nennt man dieß eine Zeichenfolge, und wenn diese Zeichen verschieden sind, einen Zeichenwechsel; Descartes lehrte nun, daß eine Gleichung nicht mehr positive Wurzeln haben könne, als sie Zeichenwechsel besitzt, obgleich sie weniger haben kann, wenn unter den Wurzeln unmögliche sind.

Je langsamer die Fortschritte in den vorhergehenden Jahren waren, desto schneller wurden sie jetzt. Schon um 1600 hatte E. Wright die trigonometrischen Kurven erfunden, welche durch die Gleichungen $y = \sin x$, $y = \tang x$ u. s. w. dargestellt werden können, und James Gregory die logarithmische Kurve $y = \log. x$. In den Schriften des Descartes findet man die ersten Spuren der logarithmischen Spirale. Alle diese Kurven mit den Spiralen und Cykloiden und den Rollkurven überhaupt konnten nicht nach der Methode des Descartes dargestellt werden, und man theilte alle Kurven in zwei Klassen, in geometrische oder algebraische Kurven und in mechanische oder transcendente Kurven.

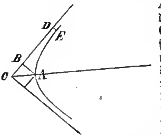
Die analytische Geometrie fand zwar einige Gegner, aber im Allgemeinen eine günstige Aufnahme und schnelle Verbreitung, ein Beweis, wie sehr man auf die Sache vorbereitet war; sie gehörte zu denjenigen Gegenständen, die nicht erst mühsam aufgefaßt zu werden brauchten, sondern sogleich weiter geführt wurden. Der den Geometern gebotene Stoff war jetzt so reich geworden, und die Bemühungen um denselben so allgemein, daß wir jetzt nur noch die hervorragendsten Erscheinungen herausheben können. In Frankreich bemächtigte sich zuerst de Beaune des Gegenstandes; er schrieb Anmerkungen zu den Arbeiten Descartes. Dann die Niederländer Schooten, Vassenaer, Huygens, de Witt, Hudde, Van Heuraet und Sluse. Schooten schrieb einen ausführlichen Commentar zur Geometrie des Descartes und wandte dessen Methode auf verschiedene Weisen an; man findet bei ihm auch die erste Idee zur Anwendung dreier Veränderlichen. Sluse und Hudde vereinfachten die Methoden Fermats und Descartes zur Bestimmung der Tangenten und der Maxima und Minima; Hudde hat sich außerdem auch um die Auflösung der Gleichungen bemüht und eine Methode angegeben zur Auffindung der gleichen Wurzeln. De Witt betrachtete sein Werk als eine Einleitung zu einer allgemeinen Theorie der Kurven höherer Ordnungen. Die Parabel, deren Gleichung $y^3 = ax^2$, wurde zuerst von dem Engländer Neil und von Van Heuraet, unabhängig von einander, rectificirt, d. h. die Länge eines Bogenstückes aufgefunden; es war dieß das erste Beispiel der Rectification einer krummen Linie; bald darauf wurde auch die Cykloide von dem Engländer Wren und von Fermat rectificirt.

Huygens (1629—1695) beschäftigte sich mit der annäherungsweisen Quadratur des Kreises und der Hyperbel und erfand die Rectification einer andern Kurve, der Cissoide; eben so war er der erste, der krumme Oberflächen berechnete und zwar der parabolischen und hyperbolischen Konoide, d. h. solcher Körper, welche durch Umdrehung von Parabeln und Hyperbeln um ihre Achsen entstehen; bisher hatte man nur die Oberfläche der Kugel zu berechnen gewußt. — Wenn man sich um eine Kurve, z. B. die Cykloide, einen biegsamen Faden gelegt denkt, welcher an dem einen Ende befestigt ist, während man mit dem andern Ende eine neue Kurve beschreibt, indem man stets den Faden gespannt erhält, so daß er sich nach und nach von der Kurve abwickelt, so heißt die Cykloide die Abgewickelte oder Evolute und die neue Kurve die Abwickelnde oder Evolvente. Die beschreibende Linie ist hier in jeder ihrer Lagen eine Tangente der Evolute, und ihre Länge ist gleich der des abgewickelten Bogens; die Evolvente wird hier beschrieben, wie ein Kreis, nur daß der Mittelpunkt und der Radius des Kreises sich stets verändern. Diese neue Art von Kurven wurde von Huygens zum großen Vortheil der Wissenschaft eingeführt, und er fand sogleich, daß die Evolvente der Cykloide selbst wieder eine Cykloide ist und zwar dieselbe, nur in veränderter Lage.

Die Arithmetik des Unendlichen und die unendlichen Reihen.

Der Engländer Wallis (1616—1703) ergriff sowohl die Idee des Descartes als die des Cavalleri. Er schrieb über Kegelschnitte in analytischer Behandlung, über Algebra und eine Arithmetik des Unendlichen, welche 1655 erschien. Hierin zeigt er nun, wie die Flächenräume aller Kurven gefunden werden können, für welche $y = a\,x^n$; ebenso in welchen $y = (a^2 - x^2)^0$, $y = (a^2 - x^2)^1$, $y = (a^2 - x^2)^2 \ldots$ Der Flächeninhalt des Kreises fällt nun zwischen die beiden ersten Glieder, weil für denselben $y = (a^2 - x^2)^{1/2}$; er suchte daher das entsprechende Glied in diese Reihe einzuschalten, um dadurch die Fläche des Kreises zu erhalten, und gelangte auf diese Weise zu einem Ausdrucke für die Verhältnißzahl des Kreises $\pi = \frac{2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6 \ldots}{3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7 \ldots}$ Wenn nun auch schon früher einzelne Fälle von Einschaltung von Zwischengliedern bei Rechnungen, namentlich bei der Berechnung der trigonometrischen Tafeln und der Logarithmen vorgekommen sind, so muß man doch Wallis als denjenigen ansehen, welcher die Interpolation allgemeiner aufgefaßt hat. Bei diesen Untersuchungen kam er nun auch auf die Bezeichnung mit negativen und Bruchexponenten; dieß war zwar ebenfalls schon früher da, hatte aber wie Manches Andere keinen Eingang gefunden. Wallis war einer von den Geometern, die sich mit den von Pascal vorgelegten Aufgaben über die Cykloide beschäftiget hatten; er hat sie später vollständig gelöst, und selbst die Erfindung Neils soll aus Andeutungen von Wallis über diesen Gegenstand hervorgegangen sein. Wallis machten seine Untersuchungen über den Kreis viel zu schaffen, und als er den Lord Brounker, einen gewandten Mathematiker, dabei zu Rathe zog, fand dieser für den obigen Ausdruck für π eine andere Form, welche seitdem unter dem Namen der Kettenbrüche in der Mathematik bekannt ist; er erfand außerdem die erste unendliche Reihe für den Flächenraum einer gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. Eine gleichseitige Hyperbel ist eine solche, deren Asymptoten auf einander senkrecht stehen, wo also die kleine Achse gleich der großen ist, sie ist in Bezug auf die Hyperbel dasjenige, was der Kreis in

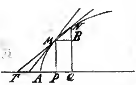
Fig. 27.



Bezug auf die Ellipse. Fällt man vom Scheitel A senkrechte Linien auf die Asymptoten, so entsteht das Quadrat AC; nimmt man nun dieses als Einheit an und setzt CD = x und DE = y, so ist die Gleichung dieser Hyperbel $x \cdot y = 1$ und der Flächenraum ABDE ist ein Logarithmus der Abscisse CD, aber nicht der briggsche Logarithmus mit der Basis 10, sondern mit einer andern Basis, welche sich aus der Theorie der Logarithmen auf eine einfache Weise ergibt und die deßwegen natürliche Logarithmen genannt werden. Wegen dieser Eigenschaft heißen die natürlichen Logarithmen auch hyperbolische Logarithmen. Mit einer solchen Reihe für die Hyperbel war also auch zugleich eine Reihe für diese Logarithmen gegeben. Nikolaus Kaufmann, gewöhnlich Mercator genannt, aus Holstein, der sich in England niedergelassen hatte, beschäftigte sich zu gleicher Zeit mit demselben Gegenstand. Er setzte BD = u, daher weil CD = 1, so ist CD oder $x = 1 + u$ und somit $y = \frac{1}{1 + u}$; nunmehr verwandelte er durch die gewöhnliche Division diesen Bruch in eine Reihe und erhielt somit $y = 1 - u + u^2 - u^3 + \ldots$ und indem er nun die Methode von Wallis anwandte, fand er die Reihe $ABDE = \log. x = \log (1 + u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots$ Mercator war somit der erste, welcher auf diese höchst einfache Weise die Schwierigkeit zu überwinden gewußt hat, vor welcher Wallis stehen geblieben war, und daher auch der erste, welcher einen allgemeinen Ausdruck für die Fläche der Hyperbel zu geben vermochte.

Der Engländer Barrow (1630—1677) war durch seine Sprachkenntnisse in den Stand gesetzt, Vieles für die Vereinfachung und das Verständniß der Alten leisten zu können; er hat die Elemente Euklids, die Data desselben und die vier ersten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius, die Werke des Archimedes und die Sphärik des Theodosius herausgegeben. Seine geometrischen Vorlesungen enthalten Untersuchungen über die Kurven und deren Ausmessung und die 10te eine vereinfachte Methode der Tangenten, welche im Wesentlichen die noch jetzt gebräuchliche ist.

Fig. 28.



Man denke sich eine Gerade TMN als Sekante einer Kurve, welche sie in M und N schneidet, zieht man die Ordinaten der Durchschnittspunkte MP und NQ und MB parallel zu AQ, so ist das Dreieck TPM ähnlich dem Dreieck MBN, daher MB zu NB = TP zu MP. Läßt man nun den Abstand PQ immer kleiner werden, so rückt N dem M immer näher, beide Verhältnisse verändern sich, bleiben aber einander gleich, die Sekante nähert sich aber mehr und mehr einer Tangente in M und geht in diese wirklich über, wenn PQ = 0 geworden ist. Dieß ist die Betrachtung Barrow's, welche ihn denn auch zu der Regel führt: Man lasse in der Gleichung der Kurve die Abscisse x um PQ = e wachsen, so wird auch die Ordinate y eine Zunahme NB = a erleiden, sodann bestimme man das Verhältniß von $\frac{e}{a}$ und

ersetze dasselbe durch das gleiche $\frac{TP}{MP} = \frac{TP}{y}$ und zuletzt setze man e also auch $a = 0$, so bleibt ein Ausdruck für PT die Subtangente übrig, durch welche der Punkt T und somit auch die Lage von TM bestimmt wird. Man kann diese Methode eine Verbesserung der des Fermat nennen, sie ist besonders beachtenswerth durch die Einführung des kleinen Dreiecks MBN, des Differenzialdreiecks, auf welches jedoch auch schon Wallis aufmerksam geworden war.

Wenn ein Lichtstrahl auf einen Körper fällt, so wird er je nach der Beschaffenheit desselben entweder zurückgeworfen, oder er geht durch den Körper hindurch; im ersten Falle bildet der zurückgeworfene Strahl mit der Normale des Punktes denselben Winkel, wie der einfallende Strahl, im andern Falle wird der Strahl nach einem bestimmten Gesetze gebrochen und geht nach einer neuen Richtung weiter. Man kann nun eine gerade oder krumme Linie als eine Reihe von Punkten betrachten, von welchen die Lichtstrahlen entweder zurückgeworfen oder gebrochen werden; je nach der Beschaffenheit der Linien und der Richtung der einfallenden Strahlen werden sich die nun veränderten Strahlen in einer Reihe von Punkten scheiden, die in ihrer Folge eine neue Kurve bilden, oder auch, diese veränderten Strahlen bilden in ihrer stetigen Folge eine Reihe Tangenten, welche eine neue Kurve einhüllen. Die Kurve, welche durch die zurückgeworfenen Strahlen gebildet wird, heißt Katakaustika, und die, welche aus den gebrochenen Strahlen hervorgeht, Diakaustika; beide heißen kaustische oder Brennlinien.

Barrow und Huygens waren bei ihren optischen Untersuchungen schon auf die Katakaustika gekommen, aber erst Tschirnhausen (1651—1708), ein Gutsbesitzer in der Lausitz, hat auf ihre Eigenschaften aufmerksam gemacht. Man hatte hier eine doppelte Erfindung, einmal die optischen Kurven und dann die Idee der einhüllenden Kurven. — Der dänische Astronom Römer, der durch die Erfindung der Geschwindigkeit des Lichtes bekannt ist, hat zuerst die Epicykloide, d. h. diejenige Cykloide, welche entsteht, wenn ein Kreis auf einem andern Kreise fortgewälzt wird, in der praktischen Mechanik zur Anwendung gebracht.

Zu den ausgezeichneten Geometern dieser Periode gehört auch noch De la Hire (1640—1718), der, besonders der synthetischen Methode in der Geometrie zugewandt, zu vielen Dingen den Grund gelegt hat, welche erst in der neuern Geometrie ihre Entwickelung gefunden haben.

Allgemeiner Ueberblick.

Wenn man auf diese ganze Periode zurückblickt, so gewahrt man die zwei neben einander hergehenden Richtungen, von welcher die eine in merkwürdiger Schnelligkeit sich entwickelt hat, während die andere erst Wurzel gegriffen, ihren Grund gelegt hat und später erst hervorgetreten ist. Vieta hatte eine wissenschaftliche Algebra geschaffen, welche in ihrer neuen Form erst einer Anwendung auf die Geometrie fähig war; unmittelbar darauf folgte die Erfindung der Logarithmen, welche das Rechnen dergestalt erleichterten, daß die sonst so schwierigen und zeitraubenden Operationen ganz in Hintergrund traten. Kepler und darauf Cavalleri gaben eine Anregung zur Anwendung der Algebra auf die Geometrie, welche in rascher Folge zu den glänzendsten Fortschritten und Entdeckungen führte. Die glückliche Idee Keplers, die Raumgebilde als aus unendlich kleinen Theilchen zusammengesetzt anzusehen, brach sich unter mannigfachen Veränderungen Bahn, und beschäftigte die größten Geometer. Eine Fläche

ging aus der Summe einer unendlich großen Anzahl unendlich schmaler Rechtecke hervor, ein Körper eben so aus kleinen Körpern; die Länge einer krummen Linie wurde gefunden als die Summe unendlich kleiner gerader Linien. Die Erfolge, welche hieraus hervorgingen, waren Veranlassung zur Erfindung der verschiedenartigsten Mittel, dasselbe Ziel zu erreichen, und zum Theil, um die Vorstellung des Unendlichkleinen zu vermeiden. Die Menschen werden sich aber von dieser Vorstellung nie losmachen können, da sie in der Natur begründet ist; der Begriff des Continuums ist der unfruchtbarste, welchen es gibt, und nur gemacht, um uns irre zu führen, und dieß nicht allein in der Mathematik. Die Geometrie des Descartes war nur ein weiteres Hülfsmittel, diese Richtung zu unterstützen; sie beseitigte vollends die Hindernisse, welche ihr entgegen standen: daher ihr unmittelbarer Uebergang in die Mathematik. Alles drängte nach einer Richtung, alle Arbeiten führten zu demselben Ziele, und dieses war die Rechnung des Unendlichen. Die Erfindung dieser Rechnung wird gewöhnlich Newton und Leibnitz zugeschrieben; blickt man aber auf ihre Vorgänger, so könnte man sie eben so gut Fermat oder Barrow beilegen; diese haben, genau genommen, dieselbe Rechnungsweise schon angewandt, nur hatten sie die wahren Ideen nicht aufgefaßt; deßwegen blieben ihre Anwendungen immer beschränkt. Erst als diese von Leibnitz ihrem wahren Wesen nach ergriffen worden war, fielen die Bande, welche sie bisher gefesselt hatten, mag man nun dem Einen oder dem Andern die Erfindung zuschreiben.

Die Algebra hatte jetzt schon den größten Gewinn aus ihrer Anwendung auf die Geometrie gezogen; der Schleier, welcher die Lehre von den Gleichungen bisher verhüllt hatte, war gefallen, ihre Natur war erkannt worden, die Auflösung derselben bildete aber einen andern Gegenstand, welcher so schnell nicht erledigt werden konnte. Bachet hatte die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades in ganzen Zahlen wiedererfunden und Fermat die Zahlentheorie weit über die Grenzen der indischen hinausgerückt. Aus den Bemühungen zur Ausmessung der Raumgebilde waren die unendlichen Reihen und die Kettenbrüche hervorgegangen, und noch gar manche andere Erweiterung; es wurde jetzt der Grund gelegt zu einem neuen Zweige, welcher später den Namen „Analysis“ erhielt, ohne aber eine Beziehung zu dem zu haben, was die Griechen darunter verstanden. Wer einmal mit Aufmerksamkeit diesen Entwickelungen gefolgt ist, wer gesehen hat, wie ein einfacher Gegenstand lange Zeit hindurch, man kann fast sagen, offen vorlag und doch nur allmälig und mühsam aufgefaßt wurde, und die ausgezeichnetsten Geister ihn nur mit großer Anstrengung überwältigen konnten, der wird die Behauptung der Thatsache nicht mehr ungereimt finden, daß die Griechen, dem Wesen nach, unser Zahlensystem gekannt und doch nicht aufgenommen haben.

Neben dieser ganz neuen Mathematik erhob sich aber auch wieder die synthetische Geometrie, nicht die alte der Griechen, nicht jene Geometrie, die aus einer großen Anzahl einzelner Sätze bestand, ohne einen natürlichen Zusammenhang, sondern eine neue, die von allgemeinen Prinzipien auszugehen und daraus ihre Entwickelung herzuleiten suchte. Hierin stimmten beide Richtungen überein, nur in der Wahl ihrer Mittel waren sie verschieden.

Die Naturwissenschaften sind zu enge mit der Mathematik verbunden, als daß wir ihnen hier nicht einen flüchtigen Blick gönnen sollten. Die Astronomie war mit Copernikus in eine neue Periode eingetreten, die Wahrheit hatte endlich über den Schein den Sieg davon getragen; damit war aber nur die Sache gegeben, die Gesetze waren noch unbekannt. Der Ausdauer Keplers gelang es nach unsäglichen Mühen, auch hier Bahn zu brechen; die Mathematik war

noch nicht weit genug, um ihn in seinen Bemühungen genügend unterstützen zu können, aber eine große Menge von Beobachtungen führte nach vielen vergeblichen Versuchen endlich zu der Erkenntniß, daß die Bahnen der Planeten Ellipsen seien, in deren einem Brennpunkte die Sonne sich befinde. Unter dieser Voraussetzung fand er alsdann auch, daß der Radiusvector in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibe, und zuletzt, daß die Quadrate der Umlaufszeiten den dritten Potenzen der mittleren Entfernung der Planeten von der Sonne proportional seien. Von der Erde und dem Monde sagte er, daß wenn sie durch die ihnen innewohnenden lebendigen Kräfte, oder etwas, was diesen gleichkomme, nicht in ihren Bahnen gehalten würden, so würden sie gegen einander fallen, und wenn die Erde ihre Gewässer nicht festhielte, so würden sie zum Monde emporsteigen.

Zu gleicher Zeit mit Kepler arbeitete Galilei an der wahren Erkenntniß der Natur. Die Mechanik, welche er schon mehr mathematisch behandelte, wurde von ihm beträchtlich erweitert, sowohl dadurch, daß er falsche Ansichten bekämpfte und durch das Experiment widerlegte, als auch durch das Neue, was er hervorrief. Den unmittelbarsten Erfolg hatte seine Erfindung des Fernrohres und des Mikroskopes; wenn das erste uns die Tiefen des Himmels eröffnete, so erschloß uns das andere das Leben der Erde in seinen einfachsten Formen. Immer mehr müßte jetzt der unmittelbaren Beobachtung und dem Experimente die bloße Speculation und die Dichtung weichen. Toricelli, der Schüler Galilei's, setzte das Werk seines Meisters fort und, schon mit größern mathematischen Kenntnissen ausgerüstet, vermochte er auch mit ihrer Anwendung tiefer einzugehen. Die folgenden Mathematiker beschäftigten sich auch fast sämmtlich mit den Naturwissenschaften, wenigstens mit der Astronomie, Mechanik und Optik, welche die Anwendung der Mathematik am meisten gestatteten; unter ihnen müssen wir aber noch Descartes und Huygens besonders auszeichnen.

Descartes suchte in seinem System der Welt offenbar von der Wirklichkeit auszugehen, oder vielmehr aus ihr zur Gottheit und ihren Attributen zu gelangen, um alsdann von ihr aus als Grundursache die Welt wieder zu konstruiren. Der Gedanke war einem Geiste, wie der seinige, ganz angemessen, aber er kam um mehrere Jahrhunderte zu frühe; noch standen die Menschen erst am Anfange einer richtigen Naturerkenntniß, das vorhandene Material war entfernt noch nicht hinreichend zu einem solchen Versuche: Es konnte dieses System daher auch nur sehr ungenügend ausfallen, obschon es nicht verfehlt hat, seinen Effect zu machen; er stand damit in der Mitte zwischen jenen großen Dichtungen der frühesten Perioden der Menschheit, und dem Ziele, welches wir zu erreichen streben, daher auch eben so tief unter dem Werthe beider.

Von ganz anderer Art waren die Bemühungen Huygens zur Erklärung der Erscheinungen des Lichtes; seine Abhandlung hierüber wurde schon 1678 der Akademie der Wissenschaften zu Paris mitgetheilt, erschien aber erst 1690. Die Physik hat jetzt keine schönere Theorie aufzuweisen, als die des Lichtes, welche von Huygens begründet worden ist, und durch welche er den größten Männern aller Zeiten gleichgestellt werden muß. Kein Theil der Physik, ohne Ausnahme, hat eine Grundlage, welche sicherer wäre, als die des Lichtes; unsere Naturforschung ist dadurch wesentlich verändert und vereinfacht worden. Das Prinzip, welches hierdurch in die Natur eingeführt, oder vielmehr, uns in ihr erschlossen worden, ist in seinen Wirkungen noch lange nicht erkannt; aus ihm fließt, wie aus einer Quelle, der größte Theil der Naturerscheinungen. Einmal gehörig aufgefaßt, wird es alle unsere Naturansichten verändern, wie es zum Theil schon gethan hat; die bisher unzusammenhängenden Erscheinungen

werden sich aneinander reihen und sich von einem Ausgangspunkte ableiten lassen, wie die Sätze der Geometrie. Auch Huygeus' Theorie, welche er schon in einer merkwürdigen Ausdehnung entwickelte, ist um mehrere Jahrhunderte zu frühe gekommen; die Mathematik selbst hatte noch keine so allgemeinen Sätze aufzuweisen, und strebt jetzt erst, sie zu erringen; die Menschen waren der Auffassung einer so großartigen Idee noch in keiner Beziehung gewachsen. So schlummerte denn auch diese Idee, nur von Zeit zu Zeit wieder angeregt; und erst seit wenigen Jahrzehnten vermochte sie sich theilweise zu entwickeln.

Neben dieser fortschreitenden Naturerkenntniß blieb nun diejenige geistige Thätigkeit, welche man seit ihrer Trennung von dem Ganzen vorzugsweise Philosophie genannt hatte, bestehen, und zwar zum Vortheile für das Ganze. Durch die Ablösung von der Natur hatte sie sich auch von der Wirklichkeit abgelöst, ihre Erzeugnisse waren, selbst wenn sie Wahrheit enthielten, Dichtungen, Fantasiebilder, Luftschlösser, welche vor jedem neuen Winde zusammenstürzten, und aus ihren Trümmern ging wieder ein anderes hervor. Aber es war Poesie in diesen Gebilden, und die Menschen bedurften ihrer, da sie aus der Natur immer mehr gewichen war. Es schreckte die Menschen nicht ab, wenn sie ein System nach dem andern fallen sahen; sie ergriffen das Neue mit derselben Gier und demselben treuen Glauben an seine Unfehlbarkeit. Dieß beurkundet ein Bedürfniß bei den Menschen, sie wollen denken und frei denken, sie wollen lieber schaffen, als das Geschaffene betrachten, was allerdings auch leichter ist. Unter allen Völkern Europa's hat das deutsche Volk am meisten dieser Richtung sich hingegeben; die Bilder seiner Urheimath waren ihm im langen Laufe der Zeiten noch nicht völlig erblichen, und stets wendet sich dasselbe ihnen wieder zu. Die Philosophie hat zu allen Zeiten eine große Anregung gegeben und die geistige Thätigkeit wach erhalten, sie hat die Menschen über die alltägliche Sphäre gehoben und ihr Selbstgefühl gestärkt. Der Naturforscher beugt sich unter dem Eindrucke der Großartigkeit der Natur, und der Philosoph erhebt sich über dieselbe, die er durch seines eigenen Geistes Kraft aus sich zu erzeugen wähnt.

Der dritte große Faktor der einstigen Einheit, die Kirche, hatte sich aus den Resten des Alterthums eine eigene Philosophie zusammengemacht und sich eine eigene Naturwissenschaft geschaffen. Es gab eine Zeit, wo es sehr gefährlich war, die Natur Gottes gegen die Natur der Kirche zu vertheidigen. Als Pater Scheiner seinem Oberen von den Sonnenflecken erzählte, welche er mit dem Fernrohre beobachtet hatte, wurde er von diesem zurückgewiesen und wegen einer solchen Häresie getadelt. „Ich habe im Aristoteles nachgelesen und nichts Derartiges gefunden, du kannst deßwegen sicher sein, daß es nur eine Täuschung deiner Sinne oder deines Glases ist." Viele sind als Opfer dieser menschlichen Verkehrheiten gefallen, und was hatten diese Männer verbrochen, die sich nur mit wissenschaftlichen Forschungen beschäftigten? — Sie hatten ihr unveräußerliches Menschenrecht geübt, welches Gott ihnen für seine großen Zwecke verliehen; sie hatten gewagt, zu denken, und anders zu denken, als Aristoteles, der Philosoph der Kirche. Copernikus blieb unbeachtet und Kepler ohne Anfechtungen, aber Galilei mußte als Irrthum abschwören, was unumstößlich aus seinen Experimenten hervorging. Aber die Natur Gottes ist der größte Häretiker, und es gibt kein Mittel, uns gegen ihre Häresien zu schützen, sie liegt als offenes Buch vor uns und nöthiget uns, in sie zu schauen und in ihr zu lesen, und was wir schauen und lesen, ist von dem höchsten Schöpfer so gesetzt, damit wir ihn erkennen und er uns offenbar werde.

Mitten unter den Beweggründen, welche die Spaltung in der Kirche her-

vorgerufen, steht der Grundsatz der freien Forschung oben an; nicht die Dogmen, sondern er bildet die Hauptscheidewand der beiden Kirchen. Aber dieser Grundsatz ist nicht mit Bewußtsein hervorgetreten, und wurde gleich von vorne herein in der neuen Kirche wieder eben so verletzt, wie in der alten. Die Spaltung knüpfte sich aber in ihrer Entstehung schon an diesen Grundsatz, und er muß nothwendig, wenn auch langsam, seine volle Entwickelung erhalten.

Von der Erfindung der Analysis des Unendlichen bis in den Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts.

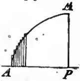
Weitere Entwickelung der geometrischen Methoden, welche aus der Idee des Unendlichen hervorgegangen sind.

Die wahrhaft poetische Idee von einem Aether, welcher alle Himmelsräume durchdringt und die Einzelwelten zu einem Ganzen verbindet; die Idee, daß die Weltkörper in jedem Augenblicke Tausende von Impulsen auf diesen Aether ausüben, die von ihm in die Unendlichkeit getragen werden, daß dadurch die Welten untereinander in einer ununterbrochenen Verbindung stehen und alle Vorgänge und Veränderungen einer derselben allen andern kund werden müssen, diese Idee, welche die seit 2000 Jahren eingeleitete Trennung wieder aufzuheben bestimmt war, konnte, wie erwähnt, bei den Menschen unmöglich jetzt schon Eingang finden. Die letzte Hand war an diese Trennung noch nicht gelegt worden, und zu einem neuen Bau waren nicht einmal hinreichend Materialien vorhanden, viel weniger ein eigentlicher Grund gelegt. Zu derselben Zeit, als Huygens den Funken hinwarf, welcher das Leben der Natur wieder entzünden wird, zerriß Newton das letzte Lebensband derselben; in genialer Weise erschuf er seinen Mechanismus, nach welchem die Welt, einmal in Bewegung gesetzt, in Ewigkeit fortläuft. Er hat hier nur geschaffen, was nothwendig hervortreten mußte, denn nur auf einer solchen Grundlage war es möglich, die Natur so zu erforschen, wie es seit seiner Zeit geschehen ist, und nur mittelst der unterdessen entdeckten Naturgesetze wird es möglich werden, die letzte Ursache aller Dinge wissenschaftlich und dadurch unwiderlegbar zu ergründen; dazu aber war vor allen Dingen der Fortbau der Mathematik unumgänglich nothwendig.

Isaak Newton aus Woolsthorpe in Lincolnshire (1642—1727) machte seine Studien in Cambridge unter der Leitung von Barrow (1660). Die Elemente Euklids, die Geometrie von Descartes und die Optik Keplers waren die Schriften, welche er zuerst nach einander studirte. Schon 1664 begannen seine Forschungen über das Licht, welche aber anderer Art waren, als die seiner Vorgänger, und mehr den Zweck hatten, in die Natur desselben einzudringen; sie übertrafen Alles, was bisher durch Versuche erlangt worden war. Später erfand er das Teleskop, und der Einfluß seiner Arbeiten wurde entscheidend für die Gestaltung der Naturwissenschaften. Er wandte sich hierauf zur Mathematik, und seine Darstellung zeigt seine Hinneigung zur synthetischen Methode, was zugleich bezeichnend für seine ganze Richtung ist. In der Analysis hatte er die Arbeiten von Wallis vor sich, und an diese schloß er sich unmittelbar an. Nun hatte dieser bereits alle Flächen zu quadriren gewußt, deren Gleichungen $y^m = a^m . x^n$ oder $y = a x^{\frac{n}{m}}$; von den einfachsten Fällen war man

ursprünglich ausgegangen $y = a\,x$, $y = a\,x^2$, $y = a\,x^3$, ... und hatte auf die allgemeinen Fälle durch Analogie geschlossen. Der Gang der Betrachtung läßt sich etwa auf folgende Art fassen. Man denke sich eine Kurve A M und ihre Abscisse $A\,P = x$ und Ordinate $P\,M = y$. A P sei in eine große Anzahl n gleicher Theile getheilt, ein Theil sei e, so ist $n\,.\,e = x$; in den Theilpunkten seien senkrechte Linien bis zur Kurve errichtet und die kleinen Räume zu Rechtecken ergänzt, so wird man sich die ganze Fläche A M P vorstellen können, als bestünde sie aus der Summe aller dieser Rechtecke, und diese Vorstellung wird der Wahrheit um so näher kommen, je kleiner man die Theile oder e annimmt. Es handelte sich jetzt darum, diese Summen aufzufinden; die Gleichung der Kurve sei $y = a\,x^2$, so ist die erste Senkrechte, deren Abscisse $1\,e$, $a\,.\,1^2\,.\,e^2$, eben so die zweite, deren Abscisse $2\,e$ ist, $a\,.\,2^2\,.\,e^2$, die dritte $a\,.\,3^2\,.\,e^2$ ... nte $a\,.\,n^2\,.\,e^2$. Wird jede Senkrechte mit ihrer Basis e vervielfacht, so erhält man für die einzelnen Rechtecke $a\,.\,1^2\,.\,e^3$, $a\,.\,2^2\,.\,e^3$, $a\,.\,3^2\,.\,e^3$, ... $a\,.\,n^2\,e^3$; die Summe aller ist $a\,.\,e^3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$, und dieser Ausdruck ist daher ein angenäherter Werth des Flächenstückes. Wird die eingeschlossene Reihe summirt, so ist die Summe $\frac{1}{6}\,n\,(n + 1)\,(2\,n + 1)$; man muß sich nun, wenn die Betrachtung richtig sein soll, für n eine unendlich große Zahl denken, was natürlich voraussetzt, daß e unendlich klein ist; aber 0 kann man sich für e nicht denken, denn dieß würde keinen Sinn haben. In diesem Falle ist $n + 1$ von n und $2\,n + 1$ von $2\,n$ nicht verschieden, die angegebene Summe wird daher $= \frac{1}{6}\,.\,n\,.\,n\,.\,2\,n = \frac{1}{3}\,n^3$. Hieraus erhält man für die Fläche A M P $= a\,.\,e^3\,.\,\frac{n^3}{3} = a\,.\,\frac{e^3\,.\,n^3}{3} = \frac{1}{3}\,a\,.\,(e\,.\,n)^3 = \frac{1}{3}\,a\,.\,x^3$. Auf gleiche Weise fand man, wenn die Gleichung $y = a\,x^3$, die Fläche $\frac{1}{4}\,a\,x^4$ und nun der Analogie nach, wenn die Gleichung $y = a\,x^n$, die Fläche $\frac{1}{n+1}\;a\,.\,x^{n+1}$. Auf solche Vorstellungen muß man bei derartigen Gegenständen immer zurückkommen, wie sehr sie auch durch eine besondere Darstellung verdeckt werden mögen. Wallis dehnte nun schon diese Vorschrift auf die Kurven $y = a\,x^{\frac{n}{m}}$ aus, er wagte auch den Uebergang zu negativen Exponenten, mit welchen er aber noch nicht fertig werden konnte. Unterdessen war von Mercator auch die Fläche für die Hyperbel $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ zwischen ihren Asymptoten ebenfalls gefunden worden, so daß man für alle Werthe des Exponenten von x die Quadraturen der Flächen finden konnte, wenn nämlich $y = a\,x^n$, so ist die gesuchte Fläche $z = \frac{1}{n+1}\,a\,.\,x^{n+1}$ und für den Fall, daß $n = -1$, hatte man $z = \log x$. Wallis hätte, wie erwähnt, seine Vorschrift noch weiter ausgedehnt und die Kurven $y = a + bx + cx^2 + \ldots$ quadrirt. Dagegen vermochte er nicht, die Schwierigkeiten zu überwinden, welche ihm die Formeln $y = \frac{a}{b + cx}$ oder $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ darboten; aber den ersten Fall hatte Mercator behandelt, indem er den Bruch durch Division in eine unendliche Reihe auflöste und dann die Vorschrift von Wallis anwandte.

Fig. 29.

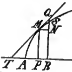


Dieses Verfahren hat nun Newton in seiner ersten Schrift aufgenommen,

er löste die Brüche durch Division, und die Wurzelgrößen durch das gewöhnliche Wurzelausziehen in unendliche Reihen auf und wandte alsdann die angeführte Vorschrift darauf an; diese Schrift wurde schon 1669 Barrow mitgetheilt, kam aber erst 1711 heraus. Für die Ableitung der Grundformeln gebrauchte Newton ein indirectes Verfahren, indem er die Gleichung der Kurve suchte, deren Fläche $z = a\,x^m$. Man lasse die Abscisse um die Größe e zunehmen, so wird die Fläche um ein Rechteck vermehrt, dessen Höhe y und Grundlinie e ist, so daß diese Vermehrung $e.y$ beträgt. Nunmehr ist $z + e.\,y = a\,(x + e)^m = a.\,x^m + a.\,m.\,e.\,x^{m-1} + \ldots$ und da nun $z = a\,x^m$, so bleibt $e.\,y = a.\,m.\,e.\,x^{m-1} + \ldots.$, oder weil jedes folgende Glied auch e enthält, $y = a.\,m.\,x^{m-1} + \ldots$; setzt man jetzt $e = o$, so verschwinden alle Glieder zur Rechten außer dem ersten, und es bleibt $y = a\,m.\,x^{m-1}$. Ist daher die Kurve $y = a\,m.\,x^{m-1}$, so ist die Fläche derselben $z = a\,x^m$, was mit dem Obigen einerlei ist. Leibnitz war 1673 in London, und er konnte möglicherweise damals schon Kenntniß von dieser Arbeit haben, allein damit hätte er weiter nichts gelernt, als was schon bekannt war, denn außer der Verwandlung der Wurzelgrößen in Reihen war darin nichts Neues enthalten, am wenigsten aber die Prinzipien einer neuen Rechnungsmethode. Es ist jedoch nicht zu verkennen, daß gerade durch diese Entwickelungen in Reihen die Schwierigkeit der Anwendung der bekannten Vorschrift gehoben wurde. Eine wichtige Erfindung Newtons war die sogenannte Binomialformel oder der Reihe für irgend eine Potenz einer zweitheiligen Größe $(a + x)^n$ für jeden Werth von n. Für ein positives n war dieses Gesetz schon den Indern bekannt, und die Bildung der Coefficienten der Reihe später oft gelehrt worden, aber die Anwendung für andere Werthe von n hat erst Newton gemacht, und er war wahrscheinlich durch die Analogie mit seinen Reihen darauf gekommen. Die Schriften dieses großen Mathematikers sind erst später im Drucke erschienen; sie waren jedoch früher schon seinen Freunden und durch diese auch in weiteren Kreisen bekannt; so erhielt z. B. 1676 Leibnitz durch Oldenburgh einige Mittheilungen, die aber nicht sehr verständlich waren. Aus seinen Schriften entnehmen wir nun seine Ansichten über die Fluxionenrechnung, wie er seine Analysis des Unendlichen genannt hat.

Newton betrachtete, wie Roberval, die Kurven als aus einer zusammengesetzten Bewegung entstanden. Man denke sich, die Ordinate einer Kurve bewege sich gleichförmig und parallel mit sich selbst, so daß die Abscisse in gleichen Zeiten gleiche Zunahmen erleidet; soll nun der Endpunkt der Ordinate der Kurve folgen, so muß dieser sich außer in der Richtung der Abscissen auch in der Richtung der Ordinaten bewegen; ist auch diese Bewegung gleichförmig, so geht die Kurve in eine gerade Linie über, in jedem andern Falle aber ist die Geschwindigkeit zu- oder abnehmend, und nach einem Gesetze, welches der Kurve entspricht.

Fig. 30.



Wenn nun die Ordinate in die Stelle M P gekommen ist, und man denkt sich, sie verlängere sich mit der Geschwindigkeit, welche sie in M hat, im nächsten Zeittheilchen gleichförmig, nämlich während dem Intervalle P R, so wird M nicht nach S, sondern nach Q gelangen. Newton nennt nun PR die Fluxion von x und N Q die Fluxion von y, so wie M Q die Fluxion des Bogens A M; die Zu- oder Abnahme dieser Linien werden also Fluxionen genannt, die Größen aber, welche sich verändern, heißen die Fluenten. Ist P R sehr klein, so fällt M Q mit M S zusammen und der Punkt Q mit S, so daß die Fluxion Q N von S N nicht verschieden ist, und von dieser Vorstellung

geht Newton gleichfalls aus. Hieraus ergibt sich nun, daß, wenn man einen Ausdruck y = M P hat, welcher von einer andern Veränderlichen x = A P auf irgend eine Weise abhängt, man die Fluxion von y findet, wenn man x um ein Gewisses P R zunehmen läßt und von der so veränderten Größe S R die ursprüngliche M P = N R hinwegnimmt. Wenn nun auch von unendlich kleinen Größen hier nicht gesprochen wird, so setzt doch die ganze Ansicht von der Sache voraus, daß die Fluxion von x unendlich klein sei, denn nur in unendlich kleinen Zeiten kann man eine veränderliche Bewegung als gleichförmig betrachten. Die Fluxionen bezeichnete Newton auf verschiedene Weisen, und zuletzt durch einen Punkt, welcher über das Zeichen der Fluenten gesetzt wird. Die Bedeutung einer zweiten Fluxion y tritt nicht mit derselben Klarheit hervor, eben so wie die der höhern Fluxionen; schon die Bezeichnung war auf eine solche Vorstellung nicht berechnet, er hat sie jedoch gleichfalls aufgenommen.

Die Quadraturen, um welche es sich meistentheils handelte, verlangten die umgekehrte Rechnung, nämlich die, aus den Fluxionen die Fluenten zu finden, und hier war es nun durchaus nothwendig, y als eine gesonderte Funktion von x zu haben; so daß die Ordinate ausgedrückt werden konnte durch eine Reihe $y = A + B x^{\alpha} + C x^{\beta} + \ldots$ Um nun in Gleichungen, in welchen x und y mit einander in Verbindung vorkamen, eine Trennung zu bewirken, erfand Newton eine Methode, die unbestimmten Coefficienten und Exponenten der angenommenen Reihe für y zu bestimmen, und bei der geringen Entwickelung, welche die Theorie der Reihen bisher gehabt hatte, verdient diese Methode besonders hervorgehoben zu werden: sie ist noch jetzt mit den Verbesserungen, welche sie erfahren hat, ein wichtiges Hülfsmittel der Analysis.

Aus allem geht nun hervor, daß Newton auf dem Wege seiner Vorgänger viel weiter gekommen war, daß er durch seine Entwickelungen der Funktionen in Reihen die Hindernisse überwunden hat, welche der Anwendung ihrer ähnlichen Methoden im Wege standen, und daß er daher die Grundidee aller bisherigen Verfahrungsweisen weiter zu führen und zu größerer Anwendung zu bringen im Stande war. Die Fluxionenrechnung war aus ihrer Anwendung auf Zeit und Raum hervorgegangen und hatte daher ursprünglich einen speciellen Charakter wie alle vorangegangenen Methoden, und dieß prägte sich auch in der Bezeichnung aus, welche Newton gewählt hat. Diese neue Rechnung bestand gewissermaßen nicht für sich, sondern nur in ihrer Verbindung mit der Geometrie und Mechanik, und wurde von ihrem Erfinder auch schon in großer Ausdehnung angewandt.

Die Differential- und Integral-Rechnung.

Newton war Mathematiker und Naturforscher mit einem Erfolge, dessen keiner seiner Vorgänger sich rühmen konnte, und die Nachwelt hat seinen Leistungen volle Gerechtigkeit widerfahren lassen. Er war ein Gelehrter, der ganz den Gegenständen sich hingab, welchen er seine Thätigkeit zugewandt hatte. Ganz verschieden hiervon war sein berühmter Nebenbuhler Leibnitz aus Leipzig (1646—1716); dieser strebte nach einer mehr universellen Bildung, und für ihn waren gewisse Studien nur Nebensache. Machte er eine Bemerkung, welche ihm neu oder nützlich zu sein schien, so arbeitete er sie selten aus, sondern schickte sie in die Welt hinaus, um Andern die weitere Entwickelung zu überlassen. Mit der Mathematik hatte er sich schon frühe beschäftigt, besonders mit der Zahlenlehre, und in seiner ersten Schrift (1668) beschäftigte er sich mit der Combinationslehre, welche er später auf die Umkehrung der Reihen an-

wandte. Diese Vorliebe für die allgemeine Größen- oder Zahlenlehre ist charakteristisch und hängt überhaupt mit seiner philosophischen Richtung zusammen. Wenn man eine Reihe Größen hat y, y_1 y_2 y_3, ... welche in irgend einem Zusammenhange stehen, so kann man ihre Unterschiede nehmen, und erhält dann eine andere Reihe, deren Glieder man in Bezug auf die erste Reihe mit $\triangle y$, $\triangle y_1$, $\triangle y_2$, ... bezeichnen kann, so daß $y_1 - y = \triangle y$, $y_2 - y_1 = \triangle y_1$, ... woraus $y_1 = y + \triangle y$, $y_2 = y_1 + \triangle y_1$, ... Diese neue Reihe kann man eben so behandeln und ihre Unterschiede $\triangle^2 y$, $\triangle^2 y_1$, $\triangle^2 y_2$, ... setzen, dann ist eben so $\triangle^2 y = \triangle y_1 - \triangle y$, $\triangle^2 y_1 = \triangle y_2 - \triangle y_1$, ..., daher $\triangle y_1 = \triangle y + \triangle^2 y$, $\triangle y_2 = \triangle y_1 + \triangle^2 y_1$, ... Der Zusammenhang der ersten Reihe mit der andern ist jetzt gegeben durch: $y = y$; $y_1 = y + \triangle y$; $y_2 = y + 2\triangle y + \triangle^2 y$; $y_3 = y + 3\triangle y + 3\triangle^2 y + \triangle^3 y$, ... Will man von dieser Idee, die ganz allgemein und von keiner Anwendung abhängig oder aus ihr hervorgegangen ist, eine Anwendung machen, so kann man sich y als eine Funktion von x denken, und daß y in y_1 übergehe, wenn x in $x + e$ sich verändert, und wieder y_1 in y_2, wenn aus $x + e$, $x + 2e$ wird, u. s. w. An diese Betrachtung hatte sich Leibnitz durch seine Beschäftigung mit den Reihen angeschlossen, und sie ist ihm zur Grundlage seiner Differenzialrechnung geworden. Wir haben es hier nicht mit einer Rechnungsmethode zu thun, deren Grundidee schon in ihrem Werden gehemmt ist durch die besondern Verhältnisse ihrer Entstehung, sondern mit einer allgemeinen Auffassung gewisser Größenbeziehungen, welche nach allen Seiten hin entwickelt werden konnten. Leibnitz hatte sich früher nicht viel mit der Geometrie beschäftigt, erst durch Huygens wurde er auf diesen Zweig mehr hingelenkt und widmete ihm seine Aufmerksamkeit; er war also nicht in den bisherigen Methoden befangen, und als er sie kennen gelernt, vermochte er frei über sie zu urtheilen. Mit seinem gewöhnlichen Scharfsinne erkannte er sogleich das Allgemeine dieser Methoden und die Uebereinstimmung mit seinen frühern Betrachtungen über die Reihen, und daß man es hier nur mit dem speciellen Falle unendlich kleiner Differenzen zu thun habe, welche er „Differentiale" nannte. Dieser Anschauung gemäß quälte er sich nun auch nicht damit, das unendlich Kleine zu umgehen, und bemühte sich nur zu zeigen, wie die Differentiale von möglichst vielen und zusammengesetzten Formen gefunden werden konnten. Die erste Schrift über diesen Gegenstand kam 1684 heraus, und in den beiden nächsten Jahren folgten zwei andere, in welchen die umgekehrte Rechnung, aus den Differentialen die Funktionen wieder zu finden, oder die Integralrechnung begründet wurde. Man ersieht hieraus, daß zwar Newton alle seine Vorgänger übertroffen hatte, daß es ihm zuerst gelungen war, die Hindernisse zu beseitigen, welche sich der Anwendung ihrer Methoden entgegenstellten, daß aber seine Darstellung wie seine Bezeichnung beweisen, wie er sich in die allgemeine Auffassung noch nicht gefunden hatte und seine Rechnung noch eine geometrische Methode war. Leibnitz war es gelungen, diese Beschränkung zu überwinden; seine Differentialrechnung war nicht mehr bloß eine Methode, sie war ein neuer Zweig, welcher in die Mathematik eingeführt wurde, und der eine Anwendung auf Geometrie und Mechanik gestattete. Dieser allgemeine Charakter liegt schon in der Bezeichnung ausgesprochen; der Grundidee nach verstanden sich die höhern Differentiale von selbst, und die erst später entwickelten allgemeinen Gesetze lagen Leibnitz schon ganz klar vor. So wie durch die Exponenten die Wiederholung eines Geschäfts ausgedrückt wird, a^n das nmalige Vervielfachen der Einheit mit a, so drückte auch Leibnitz durch $d^n y$ die nämliche Wiederholung zweier Geschäfte, des Wachsenlassens der Grundgröße x, und das Abzählen der ursprünglichen Funktion

von der veränderten, aus, wobei jedoch die Zunahme von x unendlich klein gedacht wurde. Hierdurch erhielten nun auch die Bezeichnungen $d^{-n}y$ und $d^{+\frac{n}{m}}y$ ihre entsprechende Bedeutung, obgleich die erste nicht aufgenommen wurde und die andere keine Entwickelung gefunden hat. Der Streit, welcher sich zwischen Newton und Leibnitz über das Recht an diese wahrhaft großartige Erfindung entsponnen, hat für unsere Zeit sein Interesse verloren, aber von Kepler bis auf Leibnitz tritt bei jedem folgenden Bearbeiter die Idee des Gegenstandes reiner hervor; der Uebergang ist unmerklich; Einer endlich mußte sie in ihrer ganzen Reinheit, abgelöst von allen Nebendingen, aussprechen, und dieser war Leibnitz.

Mit Newtons zahlreichen Arbeiten im Gebiete der Mathematik lassen sich die Leistungen von Leibnitz nicht vergleichen, der, wie erwähnt, nur flüchtige Skizzen entworfen hat, welche er auf besondere Anregung aufnahm. Außer den bereits erwähnten Arbeiten über die Fluxionsrechnung und ihrer Anwendung auf Geometrie und Mechanik besitzen wir noch eine Abhandlung über die Kurven dritter Ordnung, eine Eintheilung in fünf Klassen und Aufzählung von 72 Arten derselben nach gewissen Eigenschaften, aber meistens nur die Resultate seiner Forschungen. Für die Gleichungen hat er verschiedene Arten der Konstruktion der Wurzeln gegeben, aber auch auf algebraische Weise gezeigt, wie die Gränzen der Wurzeln einer Zahlengleichung gefunden werden können. Das Bedeutendste in der Lehre von den Gleichungen ist seine bekannte Methode, die Wurzeln einer Gleichung durch Näherung zu finden, welche, verlassen und wieder aufgenommen, jetzt vielfach verbessert diejenige Methode ist, welche am schnellsten und leichtesten zum Ziele führt. Es gehört dazu, daß man eine obere und eine untere Gränze, zwischen welchen die Wurzel liegen muß, gefunden habe, z. B. eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 5x^2 - 7x + 15 = 0$ liegt zwischen 1 und 2, denn $x = 1$ gibt für den Werth derselben nicht 0, sondern $+ 4$ und $x = 2$ gibt $- 11$. Nun muß aber bei einem stetigen Uebergange von $x = 1$ zu $x = 2$ nothwendig der Werth der Gleichung einmal 0 werden, denn nur wenn er durch 0 gegangen ist, kann er seine Zeichen ändern. Man setze daher $x = 1 + a$, wo a dasjenige ist, was dem x zum wahren Werthe fehlt, hierdurch wird $(a + 1)^3 - 5(a + 1)^2 - 7(1 + a) + 15 = 0$ oder $a^3 - 2a^2 - 14a + 4 = 0$. Beachtet man nun, daß a kleiner als 1, also ein ächter Bruch ist, so kann man die höhern Potenzen von a vernachläßigen, und es bleibt $- 14a + 4 = 0$ oder $14a = 4$, also $a = {}^2/_7 = 0,2$. Auf diese Art hat man schon $x = 1,2$; setzt man nun wieder $x = 1,2 + a$ und verfährt man auf gleiche Weise, so findet man $a = 0,07$, also $x = 1,27$. Man kann auf diese Weise weiter gehen und die Wurzel bis zu jeder beliebigen Gränze finden. Die Rechnung wird im Verlaufe mühsam, aber durch die Verbesserungen dieser Methode ist sie auf ein Minimum der Arbeit zurückgebracht worden. Zu allen Zeiten hat die Auflösung der Gleichungen einen der schwierigsten Gegenstände der Mathematik gebildet, und es ist gezeigt worden, wie langsam hier die Fortschritte waren. Eine der Hauptschwierigkeiten ist, zu erkennen, wie viele Wurzeln einer Gleichung möglich sind, und mit diesem Gegenstande hat sich Newton gleichfalls beschäftigt. Die Gleichungen sind noch lange das Ziel der Untersuchungen vieler Geometer gewesen bis auf die gegenwärtige Zeit. Es würde die Gränzen unserer Aufgabe überschreiten, die zahlreichen und immer wichtigen Forschungen Newton's im Gebiete der Mathematik aufzuzählen; der Anstoß war jetzt gegeben, die schwierigsten Probleme konnten mit Hülfe der neuen Rechnung gelöst werden, die

naturwissenschaftlichen Schriften Newton's und seiner Nachfolger beweisen hinreichend den glänzenden Erfolg ihrer Anwendung. In dieser Beziehung kann man die Erfindung der Differentialrechnung ein weltgeschichtliches Ereigniß nennen und die Wirkungen derselben werden mit der Zeit immer stärker hervortreten.

Das Aufwachsen der Rechnung des Unendlichen aus einzelnen Anwendungen auf Geometrie und Naturwissenschaften.

Leibniz hatte nach seiner Weise in kurzer Zeit nach einander seine Aufsätze in Zeitschriften bekannt machen lassen; sie verbreiteten sich auf dem Continente mit ungemeiner Schnelligkeit. Um einem gelehrten Streit mit den Anhängern Descartes' eine andere Richtung zu geben, legte er ihnen die Aufgabe vor, die Kurve zu finden, in welcher ein schwerer Körper in gleichen Zeiten sich gleich viel von der Horizontalebene entferne. Die Aufgabe wurde nun zwar von diesen nicht gelöst, aber Huygens, der die Auflösung gefunden hatte, gab (1687) die Parabel $y^3 = ax^2$ dafür an nebst ihren Eigenschaften und der Konstruktion dieser Linie; sie ist die Evolute der gemeinen Parabel und die Kurve, welche am ersten rectificirt wurde. Leibniz gab diese Auflösung gleichfalls (1689), beide aber ohne Angabe ihrer Analysis, diese wurde erst (1690) durch Jacob Bernoulli, der die Aufgabe gleichfalls gelöst hatte, bekannt. Durch Leibniz fing es jetzt wieder an, unter den Mathematikern Mode zu werden, wie früher in Italien und einst in Indien, sich gegenseitig Aufgaben zur Auflösung vorzulegen. So stellte er (1689) die Aufgabe, die Kurve zu finden, in welcher ein schwerer Körper in gleichen Zeiten um gleichviel von einem Punkte sich entferne. Diese Aufgabe, viel schwieriger als die erste, wurde endlich von Jacob Bernoulli, dann von Leibniz und von Johann Bernoulli gelöst. Die beiden Männer, die hier zum ersten Male genannt wurden, gehörten zu den ausgezeichnetsten Geometern, sie nahmen von nun an den thätigsten Antheil an der Begründung der neuen Rechnung, und ihren zahlreichen Arbeiten verdankt die Mathematik die rasche Entwickelung in dieser Zeit.

Jacob Bernoulli (1654 — 1705) und Johann Bernoulli aus Basel (1667—1748) waren die ersten und größten Stützen der Analysis des Unendlichen. Sie hatten sich dieselbe so zu eigen gemacht, und gaben davon so viele und schwierige Anwendungen, daß Leibniz mehrmals öffentlich erklärte, daß dieselbe diesen Männern ebenso viel wie ihm selbst zu verdanken habe. Der ältere war Professor in Basel und der Lehrer seines jüngern Bruders; im Anfange arbeiteten sie vereint mit edlem Wetteifer an der Erweiterung der Wissenschaft, bis der Ruhm des älteren die Eifersucht des jüngeren Bruders erregte und eine Auflösung dieses schönen Verhältnisses herbeiführte. Jacob Bernoulli legte den Geometern die Aufgabe vor: die Kurve zu finden, welche eine Kette von gleichförmiger Beschaffenheit bilde, wenn sie an ihren Enden frei aufgehängt wird. Diese Aufgabe wurde von Huygens, Leibniz und Johann Bernoulli aufgelöst. Hierauf erweiterte er die Aufgabe auf Ketten, deren Gewicht nach einem bestimmten Gesetze sich verändert, und gab noch weitere Anwendungen. Er untersuchte die Kurven, welche entstehen, wenn auf einer krummen Linie eine ihr gleiche oder ähnliche sich fortwälzt; ebenso untersuchte er die logarithmische Spirale und fand an ihr höchst merkwürdige Eigenschaften. Die Summation der Reihen beschäftigte ihn gleichfalls, der erste Theil derselben erschien schon 1689: später, 1713, wurden diese Untersuchungen mit seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung zu

Basel wieder herausgegeben. Bei diesem Gegenstande wurde er auf gewisse Zahlen geführt, die eine merkwürdige Rolle in der Mathematik spielen und noch später vielen Betrachtungen unterworfen wurden; sie werden noch jetzt nach ihm benannt.

Die Differentialrechnung war bis jetzt erst wenigen Geometern bekannt geworden, und es fehlte an einem Werke, aus welchem sie hätte erlernt werden können. Ein solches lieferte (1696) der Marquis de l'Hopital (1661—1704) in seiner „Analysis des Unendlichen". Joh. Bernoulli war in Paris (1692) von dem Marquis mit all der Freundlichkeit und Auszeichnung, welche einem so bedeutenden Gelehrten gebührte, aufgenommen worden, und fand in ihm zugleich einen talentvollen Schüler, der sich des Gegenstandes bald bemächtiget hatte und der Mathematik durch sein Werk einen wesentlichen Dienst leistete. Der Marquis trat nun auch in die Reihe derjenigen ein, welche mit Glück die Auflösung der gestellten Aufgaben unternahmen. Eine Menge von Gegenständen wurde jetzt schon zur Sprache gebracht und zu fast allen späteren Untersuchungen der Grund gelegt. Joh. Bernoulli legte (1697) den Geometern die Aufgabe vor: die Kurve zu finden, längs welcher ein Körper von einem Punkte zu einem andern in der kürzesten Zeit fällt. Leibnitz löste die Aufgabe noch am nämlichen Tage, an welchem er sie erhielt, aber auch Newton, der Marquis de l'Hopital und Jac. Bernoulli lösten sie auf; sie fanden alle, daß die Cykloide diese Eigenschaft besitze. Dieses Problem gab aber Jac. Bernoulli Veranlassung zur Erfindung eines andern, welches viel schwieriger war und wodurch die beiden Brüder völlig entzweit wurden. Bei ähnlichen Untersuchungen wurde Leibnitz zuerst darauf geführt, eine Konstante einer Gleichung als veränderlich zu betrachten, was als ein bedeutendes Hülfsmittel für manche Untersuchungen in der frühen Jugend dieser Rechnung ein merkwürdiger Fortschritt war. Ebenso hat er auch zuerst Brüche, deren Nenner in Faktoren zerlegt werden konnte, in einfache Brüche aufgelöst, wodurch viele Integrationen möglich gemacht wurden.

In Italien leistete Gabriel Manfredoni (1681 — 1761) für die Integralrechnung dasselbe, was de l'Hopital für die Differentialrechnung gethan hatte. Wie bei allen umgekehrten Operationen ist auch die Integralrechnung mit viel größeren Schwierigkeiten verbunden; sie erschien am frühesten unter dem Namen der „Quadraturen", weil die Größenbestimmung einer Fläche einer Integration gleichkam. Das Differential von x^m ist $m \,.\, x^{m-1}$, folglich umgekehrt das Integral von x^{m-1} ist $\frac{x^m}{m}$; nun ist aber auch die Summe der Reihe

$$1^{m-1} + 2^{m-1} + 3^{m-1} + \cdot - + x^{m-1} = \frac{x^m}{m},$$ wobei jedoch x eine sehr

große Zahl sein muß, ein Beispiel der Anwendung ist oben gegeben worden. Man kann sagen, daß diese Summationen und Quadraturen seit Kepler und Cavalleri die Veranlassung zur Erfindung der Differential- und Integralrechnung gegeben haben, und daß jene bloß erfunden wurde, um diese anwenden zu können. Wenn man im Stande war, einen Ausdruck zu differenziren, so gab die Umkehrung sogleich das Integral, und hier hatte man schon eine Quelle zahlreicher Integralformeln; wenn aber bei einer Aufgabe, wie sie jetzt häufig von den Geometern gestellt wurden, eine Differentialformel vorkam, welche nicht in dieser Reihe enthalten war, so fehlten gänzlich die Mittel, um aus ihr auf die Funktion schließen zu können, aus welcher sie hervorgegangen, und hier, wo es an einer allgemeinen Methode gebrach, hatte der Geometer Gelegenheit, seinen Scharfsinn zu zeigen. Am schwierigsten zu behandeln waren die

sogenannten Differentialgleichungen, in welchen z. B. zwei Veränderliche, x und y mit ihren Differentialen gemischt vorkamen; hier war die erste Bedingung, die Gleichung so zu verändern und die Größen zu trennen, daß eine Funktion einer Veränderlichen nur mit ihrem Differentiale behaftet vorkam. Mit solchen Gegenständen nun beschäftigte sich Manfredoni; dieselben waren zwar auch früher schon betrachtet worden, die Auflösungen waren jedoch nur in einzelnen geeigneten Fällen gelungen.

Die Tangente fällt nur mit einem Punkte der Kurve zusammen und gibt ihre Richtung in diesem Punkte an; nun kann man aber die Krümmung einer Stelle mit der eines Kreises vergleichen, und es wird unter allen Kreisen, welche durch den Berührungspunkt gehen, einen geben, welcher am genauesten mit der Kurve zusammenfällt. Auf diese Vorstellung mußte man schon durch die Evoluten kommen, wo jeder Punkt einer Kurve gleichsam als Kreiselement beschrieben wird. Der Gedanke wurde von Leibnitz zuerst ausgesprochen und dann von Jac. Bernoulli der Ausdruck für den Radius dieses Kreises gefunden (1691). Ueberhaupt sind jetzt schon die meisten und wichtigsten Punkte der höhern Geometrie berührt worden und den folgenden Zeiten blieb nur die weitere Entwickelung und die Vereinfachung der Rechnung überlassen. Jac. Bernoulli hatte zwei Schüler, die ihrem Lehrer entsprachen, Herrman aus Basel und Nikolaus Bernoulli (1683—1759), sein Neffe, welche beide in der Fortbildung der Mathematik sehr thätig waren. Einer der Söhne von Joh. Bernoulli, auch Nikolaus genannt (1695 — 1726), stand seinem Vater würdig zur Seite und unterstützte ihn in dem Streite, welcher mit großer Heftigkeit zwischen den Parteien Newton und Leibnitz ausgebrochen war. Dieser Streit brachte der Wissenschaft nur Nutzen, denn die Geometer des Continentes erwiederten die Angriffe ihrer Gegner dadurch, daß sie denselben Probleme vorlegten, auf welche dann allgemein die Aufmerksamkeit hingelenkt wurde. Die beiden andern Söhne Joh. Bernoulli's, Daniel (1700—1782) und Johann II. (1710—1790) betraten gleichfalls die Bahn ihres Vaters.

Der ältere Nikolaus Bernoulli, wie sein Freund Remord de Monmort (1678—1718) und Moivre (1668 — 1754) arbeiteten an der Erweiterung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und gaben ihr Anwendungen auf neue Verhältnisse. Moivre hat sich auch mit der Umkehrung der Reihen beschäftiget; und nachdem Roger Cotes gezeigt hatte, wie die Gleichungen $x^n \pm a^n = o$ in ihre reellen Faktoren zerlegt werden können, wurde nach dem frühen Tode desselben der Gegenstand von Moivre und Joh. Bernoulli aufgenommen, und besonders von dem ersten auch auf eine Klasse allgemeiner Gleichungen ausgedehnt.

In England hatte schon der Schotte Craig, 1685 und 1693, in seinen Schriften Gebrauch von der Differentialrechnung gemacht; erst später wurden die Arbeiten Newton's und die Fluxionsrechnung bekannt. Von Brook Taylor erschien 1715 eine Differenzen- und Summenrechnung, wie sie Leibnitz bei der Erfindung seiner Differentialrechnung vorschwebte, die hier aber zum ersten Male auftrat. Von dieser Rechnung ist die Differentialrechnung nur ein besonderer Fall: bei jener ist von einer allgemeinen endlichen Zunahme der Grundgröße, also auch der Funktion die Rede, bei dieser von unendlich kleinen Zunahmen; da nun bei der letzten Annahme viele Glieder verschwinden, was bei der ersten nicht der Fall ist, so stellt sich auch die Differenzrechnung weniger einfach dar. Taylor ist der Erfinder einer nach ihm benannten Reihe, die höchst wichtig und von einer sehr ausgedehnten Anwendung in der ganzen Mathematik ist; ein besonderer Fall von ihr ist die Reihe, welche Maclaurin gefunden hat. Taylor

legte einige damals schwierige Probleme über die Integration rationaler Brüche vor, aber Joh. Bernoulli löste sie alle leicht auf. Mit demselben Gegenstande hatte sich auch Roger Cotes (1682 — 1716) beschäftiget und die Integration dieser Brüche auf allgemeine und bequeme Formeln gebracht, aber seine Arbeit wurde erst sechs Jahre nach seinem Tode bekannt. Bei den Aufgaben, welche sich die Geometer damals vorlegten, bestand die Schwierigkeit häufig nicht darin, die Bedingungen in einer Gleichung zu vereinen; als vielmehr, wie schon gesagt, diese Gleichungen zu integriren. Mit den Untersuchungen über solche Integrationen beschäftigten sich daher auch die meisten Geometer, aber die Auflösungen gelangen ihnen auch jetzt nur in besonderen Fällen. Graf Jacob Riccati (1690—1735) legte (1725) eine solche anscheinend einfache Aufgabe vor, deren Auflösung den vereinten Bemühungen des Grafen, Nikolaus Bernoulli I., Nikolaus Bernoulli II., Daniel Bernoulli und Goldbach's gelang, welche auf verschiedenen Wegen zu demselben Ziele kamen. Als ausgezeichnete Geometer verdienen noch genannt zu werden: Graf Fagnani (1682 — 1766), Nicole (1683 — 1758) und Clairaut (1713 — 1765).

Unterdessen hatte sich die neue Rechnung, und was aus ihr hervorgegangen war, im ganzen gebildeten Europa verbreitet, und die vier Nationen, welche zu diesen geistigen Produktionen beigetragen hatten, suchten sie mit großem Eifer weiter zu führen und zu vervollständigen. Von jetzt an wurde die Zahl derjenigen, welche sich mit den mathematischen Wissenschaften beschäftigten, immer größer, und während ein großer Theil bemüht war, den großen Bau zu erweitern und Neues zu erfinden, suchte ein anderer den Weg dazu durch Vereinfachung und Verbesserung der Darstellung zu ebnen. Die Größe des Materials nöthiget, vom 18. Jahrhundert an die Geschichte des Ganzen zu verlassen und die der einzelnen Zweige vorzunehmen; aber hier würde es zum Verständnisse nöthig sein, in die Sache einzugehen. Wir werden uns daher beschränken müssen auf die Zeichnung allgemeiner Umrisse und auf die Angabe jener Erzeugnisse und Methoden, welche die Wissenschaft wirklich erweitert haben oder voraussichtlich ihre Gestaltung zu verändern vermögen.

Die weitere Begründung der Analysis des Unendlichen.

Aus den bisherigen Angaben läßt sich schon der Zustand der Analysis des Unendlichen seit ihrer Begründung erkennen. Leibnitz hatte mit seinem scharfen Geiste zwar schon den ganzen Umfang dieses Zweiges erfaßt, und auch Joh. Bernoulli war in diese Ideen eingegangen, aber es erforderte ein volles Jahrhundert, bis sie deutlich hervortreten und begründet werden konnten. Die große Menge der Fragen, welche zur öffentlichen Besprechung kamen, gaben Veranlassung zu vielen einzelnen Untersuchungen; aber ein Zusammenhang wurde nicht hergestellt, es wurde nur der Grund zu den Arbeiten folgender Zeiten gelegt. Diesen Charakter behielt die Analysis des Unendlichen auch in der folgenden Zeit, obschon hier durch Euler und Lagrange bedeutend einem andern Ziele entgegen gearbeitet wurde. Die Differentialrechnung, bei weitem mehr aber noch die Integralrechnung bestanden aus einer Sammlung einzelner Fälle, welche fortwährend vermehrt wurden, wie einst die Geometrie der Griechen. Ein hervortretender und sehr wichtiger Zug dieser neuen Rechnungen war ihre fruchtbare Anwendung auf die Naturwissenschaften, aus welchen sie selbst wieder großen Vortheil zogen. Es ist schon angedeutet worden, was hierin Newton und seine Zeitgenossen geleistet haben, aber auch von den Bernoulli's hat man

zahlreiche Abhandlungen über Gegenstände aus allen Gebieten der Natur, und die folgenden großen Geometer haben selten mehr diesen Weg verlassen.

Durch die Gründung der Akademie der Wissenschaften in Petersburg (1726) kam ein Verein von Männern zu Stande, die durch ihre ausgezeichneten Leistungen bekannt sind, und die das von Newton, Leibnitz und den Bernoulli's angefangene Werk auf eine glänzende Weise fortsetzten. Vor Allen verdient hier Euler (1707—1783) aus Basel genannt zu werden, da ihm die Mathematik in allen ihren Theilen beträchtliche Erweiterungen verdankt; seine Einleitung in die Analysis des Unendlichen, sowie seine Differential- und seine Integralrechnung enthalten eine Menge ihm angehöriger Forschungen. Sein Verdienst bestand aber nicht allein darin, daß er Neues schuf, er wußte auch älteren Untersuchungen eine vollendetere Form und eine einfache und klare Darstellung zu geben; daher kommt es denn auch, daß manche seiner Schriften nach einem Zeitraum von 100 Jahren noch nicht veraltet sind. Seine zahlreichen Arbeiten füllten viele Jahre hindurch die Bände der Petersburger Commentarien, und aus seinem reichen Nachlasse wurden noch in diesem Jahrhundert viele Abhandlungen bekannt gemacht.

Wenn eine Gleichung, z. B. zwischen x und y, differenzirt wird, so muß die entstandene Differentialgleichung, wieder integrirt, natürlich zum ersten Ausdruck zurückführen; nun ist aber nicht jede willkürlich aufgestellte Differentialgleichung von der Beschaffenheit, daß sie aus einer solchen Gleichung hervorgegangen ist, und sie kann daher auch unverändert nicht integrirt werden. Es kam nun darauf an, ein Kennzeichen zu finden, aus welchem sich dieses sicher entnehmen ließ. Dieß gelang Euler; er fand 1734 die Eigenschaft der Differentialgleichungen der ersten Ordnung, aus welcher sich ihre Realität erkennen ließ. Zur selben Zeit kamen auch Fontaine und Clairaut, ohne von den Untersuchungen Euler's etwas zu wissen, zu demselben Ziele. Später (1763) fand Euler auch die Bedingung der Integrabilität der Differentialgleichungen der höhern Ordnungen und theilte sie Condorcet (1743—1794) ohne Beweis mit; dieser fand die Beweise dazu und gab der Sache auch noch eine weitere Ausdehnung.

Uebergang zur Erfindung der Variationsrechnung.

Die früher erwähnte Klasse von Aufgaben, welche, von Newton zuerst berührt, den Streit zwischen den Gebrüdern Bernoulli zum Ausbruch gebracht, beschäftigte auch Euler. So wie Huygens die Tautochrone im luftleeren Raume, Newton dieselbe in einem widerstehenden Mittel, das der Geschwindigkeit proportional ist, gesucht hatte, so bemühten sich Euler und Joh. Bernoulli, sie in dem Mittel zu finden, das einen Widerstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ausübt. Fontaine (1705—1771) ging weiter; er nahm das Verhältniß noch zusammengesetzter an und fand die Auflösung für alle drei Gattungen auf eine ihm eigenthümliche Methode, bei welcher er sich zwei verschiedener Veränderungen bediente. Euler folgte Fontaine auch hierin und erweiterte noch die Untersuchung, welche auch später wieder von Lagrange und d'Alembert aufgenommen wurde. Diese Probleme, welche eigentlich der Mechanik angehören, fallen in eine Klasse mit andern rein geometrischen Problemen und erfordern zu ihrer Auflösung die Lehre vom Größten und Kleinsten. Wenn man bei einer ebenen Kurve den größten oder kleinsten Werth wissen will, welchen die Ordinate annehmen kann, so fällt die Auflösung der Differentialrechnung anheim und unterliegt keiner Schwierigkeit. Von anderer Art ist

aber z. B. die Aufgabe: Die ebene Kurve zu finden, welche zwei gegebene Punkte verbindet und durch Umdrehung um die Achse der Abscissen die kleinste Oberfläche erzeugt. Hier ist der Zusammenhang zwischen x und y nicht gegeben, und die Aufgabe besteht eben darin, die Funktion dieser Größen zu entdecken, welche die gestellte Bedingung erfüllt. Ein Integralausdruck für die Oberfläche war leicht herzustellen, dann aber noch die Bedingung zu erfüllen, wodurch er ein Kleinstes wurde, und hierzu fehlte es an einer allgemeinen Methode. Auflösungen von Aufgaben dieser Art waren alle auf besondern Wegen erlangt worden, und jede neue Aufgabe verlangte auch neue Anstrengungen zu ihrer Lösung. Eine Aufgabe, welche wieder einer neuen Reihe angehört, ist: Man soll unter allen zwischen zwei Punkten liegenden, gleich langen Kurven diejenige finden, welche mit der Achse der Abscissen und den beiden äußersten Ordinaten die größte oder kleinste Fläche bildet. Euler, der sich an allen großen Fragen in der Mathematik betheiligte, unterwarf auch diesen Gegenstand seiner Forschung und seine Arbeit, die hierüber 1744 erschien, gehört zu seinen schönsten Erzeugnissen und ist die nächste Veranlassung zur Erfindung einer allgemeinen Theorie geworden, welche sich über alle derartigen Aufgaben erstreckt. Diese Aufgaben bildeten die Klasse der sogenannten isoperimetrischen Probleme.

Zu der wichtigen Lehre der Integration der Differentialgleichungen mit partiellen Differentialen hat Euler gleichfalls den Grund gelegt (1734), aber d'Alembert (1747) die Sache weiter entwickelt und zuerst Anwendungen davon gemacht. Euler ergriff den Gegenstand später wieder und lieferte darüber eine ausführliche Abhandlung (1763). An diesen Untersuchungen haben später Antheil genommen: Lagrange (1772 — 85), Laplace (1773 — 79), Monge, Arbogast (1791), Lorgna, Condorcet (1770 — 72) und Legendre (1787).

Die Untersuchungen Euler's über die eben genannten Maxima und Minima sind die Grundlage zur Erfindung eines neuen und wichtigen Zweiges geworden, durch welchen erst die Analysis des Unendlichen ihre Vervollständigung erhalten hat. Lagrange (1736—1813), indem er sich mit demselben Gegenstande beschäftigte, erfand zur Auflösung aller derartigen, sowohl geometrischen als mechanischen Probleme eine neue Methode, welche er Euler schon 1755 mittheilte, und welche von diesem „Variationsrechnung" genannt wurde. Diese Rechnung besteht aber nicht für sich, sondern nur in Verbindung mit der Differential- und Integralrechnung und hat zum Zwecke, die Relation der Veränderlichen, oder die Funktion derselben zu finden, welche unter gewissen Bedingungen zu einem Größten oder Kleinsten wird, wie z. B. in den Aufgaben, welche oben mitgetheilt worden sind. Wir haben hier die Methode von der Seite ihrer Anwendung gefaßt, weil es schwer sein würde, in wenig Worten ihr Wesen in seiner Allgemeinheit darzustellen; sie hat in ihren Grundzügen Aehnlichkeit mit der Differentialrechnung: wie man in dieser die noch unbestimmte Grundgröße sich verändern läßt, so wird in jener eine Veränderung der unbestimmten Funktion gesetzt, und in beiden erfolgt alsdann die Bestimmung nach gewissen Bedingungen, welche die Aufgabe feststellt.

Schluß und allmäliger Uebergang in eine neue Periode.

Die Reihe der Erfindungen war hiermit geschlossen, aber an der weitern Begründung der neuen Entdeckungen von Fermat bis auf Lagrange arbeitete nun noch eine Reihe ausgezeichneter Mathematiker, von denen wir nur noch zwei berühmte Namen nennen wollen: Laplace (1749 — 1827), dessen

große Verdienste um die Wissenschaft noch in frischem Andenken sind und der gerade 100 Jahre nach Newton's Tode auch seine Laufbahn schloß, dann Legendre (1752 — 1833), dessen Andenken schon durch seine Theorie der Zahlen und seine elliptischen Funktionen nicht erlöschen wird. Das große Werk von Lacroix bezeichnet gewissermaßen den Schluß dieser Periode, welche man die der Begründung der Analysis des Unendlichen nennen kann. In letzterem Werke findet man auch die große Liste der ausgezeichneten Mathematiker, die an dieser Begründung mitgearbeitet haben, und die Auseinandersetzung ihrer besondern Verdienste kann nur in einer speciellen Geschichte dieses Zweiges ihre Stelle finden.

Die nun folgende Periode kann man als die der eigentlichen Entwickelung dieses Theiles der Mathematik, besonders der Integralrechnung, ansehen. Die bisher engen Grenzen wurden jetzt ungemein erweitert; unübersteiglich scheinende Schwierigkeiten wurden überwunden. Die Eigenthümlichkeit des Gegenstandes erforderte die höchsten Anstrengungen, welche auch in der That mit Erfolg gekrönt wurden; immer mehr wird das vereinzelte, zerstreute Material zu einem festen Baue zusammengefügt werden. Die Verdienste der vaterländischen Gelehrten Gauß, Jacobi, Lejeune-Dirichlet, Richelot u. a. sind bekannt; unter den fremden Gelehrten nimmt Cauchy den ersten Rang ein. Auch diese Periode hat ihre eigenthümliche Seite und ihre kulturgeschichtliche Bedeutung, auf deren Auseinandersetzung wir aber hier nicht eingehen können.

Die Entstehung und allmälige Entwickelung der Analysis.

Die Arithmetik der Inder war von der unserigen in so ferne verschieden, als sie dieselbe als eine Rechnung mit bekannten Größen betrachteten und sonst auf ihren Inhalt wenig Rücksicht nahmen, daher auch Gegenstände in sie aufgenommen wurden, welche eigentlich der Algebra angehörten, hier aber nach mechanischen Vorschriften berechnet wurden. Diese Arithmetik hatte aber eine solche Vollendung, wie sie in Europa erst nach und nach seit wenigen Jahrhunderten erlangt wurde. Die Algebra hatte nicht den engen Begriff, welchen die Araber erst hineingelegt haben, sie war die Grund- oder Ursachsrechnung, die Rechnung mit Beweisen, d. h. die Rechnung, welche ihre Begründung in sich trug. Die Hauptbestandtheile waren die Rechnung mit Unbekannten, welche unserer Buchstabenrechnung verglichen werden kann, die sechs Operationen mit rationalen und Wurzelgrößen, wie sie zum Theil erst um die Mitte des 16. Jahrhunderts in Europa entstanden sind. Hier findet man die erste Entwickelung des Binomiums, natürlich nur an den ersten Gliedern, aber auch das Gesetz zur Bildung der Binomialcoefficienten; man findet die Summation der arithmetischen Reihen verschiedener Ordnungen und der Potenzen der Glieder der Zahlenreihe; die verschiedenen Combinationen und die Bestimmung ihrer Anzahl durch die Summation der Reihen, was alles so allgemein gehalten ist, daß wir überhaupt annehmen müssen, daß ihnen die Behandlung der arithmetischen Reihen in ihrem ganzen Umfange bekannt gewesen sei, und daß sie nur aus Mangel an allgemeinen Zeichen nicht ausgedrückt werden konnte. So weit war selbst Cavalleri noch nicht, der nur bis zur vierten Potenz der Glieder der Zahlenreihe gegangen war und auf die Summe der höheren Potenzen nur nach der Analogie schloß. Doch muß hier noch Faulhaber aus Ulm erwähnt werden, aus dem Anfange des 17. Jahrhunderts, der auch die Summen der

5. und 6. Potenzen gefunden hatte. Ebenso war die Summation der geometrischen Reihen den Indern geläufig. Sie schieden hiervon die unbestimmte Analytik des ersten Grades, welche in Europa wieder erfunden wurde, und die des zweiten Grades, deren Erneuerung wir Brounker, Pell, Euler und Lagrange verdanken. So weit war man auch in Europa gekommen, als durch die Vorbereitungen zur Differentialrechnung zu anderen Dingen der Grund gelegt wurde, aus welchen ein besonderer Theil sich bildete, den wir Analysis nennen.

Der Begriff der Funktion wurde erst in Europa entwickelt, wenn auch die Grundlage dazu schon frühe mit den geometrischen Gebilden hervortreten mußte. Wenn eine Größe y auf irgend eine Weise aus Summen und Unterschieden, Potenzen und Wurzeln einer Grundgröße x, welche als veränderlich gedacht wird, und aus konstanten Größen zusammengesetzt ist, so ist y eine Funktion von x und hier eine algebraische gesonderte Funktion, weil x und y getrennt erscheinen; sind aber x und y unter sich in Verbindung, so hat man eine ungesonderte Funktion. Eine andere Klasse bilden die transcendenten Funktionen, wie $y = \log. x$, $y = a^x$ $y = \sin. x$ u. v. a. Diese beiden Klassen bildeten geschlossene Ausdrücke, eine dritte aber, wie z. B. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}$ oder $1 . 2 . 3 \ldots x$, konnte zur Zeit ihrer ersten Betrachtung nicht auf solche Ausdrücke zurückgeführt werden und wurden deßhalb inexplicable Funktionen genannt. Die Lehre von den Funktionen bildete nun von Vieta an einen neuen Zweig, die Analysis; die Bedeutung dieses Ausdruckes hat aber nichts gemein mit der Analysis der Alten. Die ersten Funktionen, welche man betrachtet hat, waren die Kreisfunktionen, dann die logarithmischen Funktionen; die algebraischen Funktionen traten erst mit der Geometrie des Descartes in ihrer wahren Bedeutung hervor. Bei der Lehre der Funktionen können nur zwei Dinge zur Untersuchung kommen, die Bestimmung ihres Werthes im Allgemeinen und in besondern Fällen und die Umwandlung derselben in andere Formen. Beide Theile greifen aber in einander über und hängen vielfach mit der Analysis des Unendlichen zusammen, so die Summirung der Reihen mit Hülfe der Integralrechnung. Außer den Bemühungen der schon genannten Gelehrten um solche Summationen sind hier noch anzuführen: die von Monmort, Moivre, Stirling, Landen, Simpson, Lorgna, Laplace u. a.; Euler beschäftiget sich gleichfalls in seiner Differentialrechnung viel mit diesem Gegenstande. Hierher gehört auch die Berechnung der Funktionen, z. B. der Logarithmen, der goniometrischen Funktionen u. v. a., überhaupt alle Werthbestimmungen, sowie die Erfindung des Werthes eines Bruches, im Falle Zähler und Nenner für einen besonderen Werth der Veränderlichen gleichzeitig verschwinden, was Joh. Bernoulli zuerst gezeigt hat.

Die Umwandlung der Funktionen ist vielfach. Zuerst gehört dahin die Auflösung von Gleichungen in ihre Faktoren, die Auflösung eines Bruches in Partialbrüche und die Veränderung einer Funktion durch Einführung einer neuen variabeln Größe zu besondern Zwecken. Den wichtigsten Theil bildet aber die Entwickelung der Funktionen in Reihen und hier hat gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts H i n d e n b u r g eine neue Methode, die combinatorische Analysis, begründet. Newton hatte zuerst (1669) den Bogen eines Kreises durch eine unendliche Reihe nach den Potenzen des Sinus dargestellt; durch Umkehrung erhielt er daraus den Sinus nach den Potenzen des Bogens. Indem er diese Reihe in's Quadrat erhob, dieses von der Einheit abzählte und aus dem Reste die Quadratwurzel auszog, erhielt er eine Reihe für den Cosinus nach den Potenzen des Bogens. Fast gleichzeitig war es J a c o b G r e g o r y

gelungen, den Bogen nach den Potenzen der Tangente zu entwickeln und die Tangente und Sekante nach den Potenzen des Bogens, sowie auch die Logarithmen dieser Funktionen; auch erfand er Reihen für elliptische und hyperbolische Bögen. Unabhängig hiervon hat Leibnitz den Bogen durch die Tangente (1673) und den Sinus durch den Bogen dargestellt (1693). Das Meiste hierin hat aber Euler geleistet; vor ihm war die Bezeichnung unvollkommen, er hat zuerst die jetzt gebräuchliche consequent durchgeführt, und die ganze Analysis der Kreisfunktionen hat durch ihn erst ihre wissenschaftliche Form und Entwickelung erhalten. Die Vergleichung der Exponentialreihen mit den Reihen von Sinus und Cosinus hat zu der fruchtbaren Verbindung dieser transcendenten Funktionen geleitet, und Euler hat alles dieß auf die einfachste Weise ausgeführt. Seine Grundlage für alle Entwickelungen war meistens der binomische Lehrsatz und auch Lagrange und die späteren haben sich desselben bedient. Einen andern Weg zur Entwickelung der Funktionen in Reihen bietet die Differentialrechnung und die Taylor'sche Reihe; man kommt auf ihm oft schneller zum Ziele, aber auf Kosten der Klarheit, der Einsicht in die Sache selbst.

Die Reihen, zu welchen man bei der Entwickelung der Funktionen gelangt, bedürfen noch, bei besondern Werthen der Größen, die in ihr vorkommen, einer nähern Untersuchung. Es kann sich nämlich herausstellen, daß jedes folgende Glied der Reihe größer ist als das vorhergehende, und in diesem Falle stellt sie durchaus nicht den Werth der Funktion dar, vorausgesetzt, daß dieser dabei ein endlicher sein muß. Man sagt von einer solchen Reihe: sie gehe aus einander oder divergire. Der Gebrauch des Gleichheitszeichens zwischen der Funktion und der Reihe ist hier ganz unstatthaft und schon oft die Quelle großer Irrthümer gewesen; man müßte ein Zeichen haben, welches ausdrückt, daß die Reihe aus der Funktion hervorgegangen ist, aber nicht, daß sie ihr gleich sei. Eine Reihe, in welcher jedes folgende Glied kleiner ist als das vorhergehende, heißt eine zusammenlaufende oder convergente Reihe, und von einer solchen kann man gleichfalls nicht sagen, daß sie der Funktion gleich sei, sondern nur, daß sie sich derselben um so mehr nähere, je weiter man in ihr fortgeht. Wenn man nun eine solche Reihe bis zu einem gewissen Gliede nimmt, so wird es immer nöthig sein, zu wissen, wie weit man sich dem Werthe der Funktion genähert hat, oder wie groß der Rest ist. Da divergirende Reihen unbrauchbar sind, so haben unter den ältern Mathematikern Stirling, Euler, Laplace, Legendre, Kramp u. a. sich damit beschäftigt, durch verschiedene Mittel solche Reihen in der Weise umzuformen, daß sie convergent wurden. Der Gegenstand ist schwieriger Natur, und Täuschungen sind hier sehr möglich und auch vorgekommen. Unter den neueren hat besonders Cauchy das Verdienst, auf die Wichtigkeit der Bestimmung des Restes hingewiesen zu haben, und seine zahlreichen Abhandlungen liefern dazu die Belege. Wenn man eine Funktion der Grundgröße x hat $f(x)$, in welcher die Werthe von x nicht schon ihrer Natur nach beschränkt sind, so läßt sich eine solche Funktion ganz beliebig und auf unzählige Weisen in Reihen entwickeln, nach andern Funktionen von x, auf die allgemeinste Weise, bis herab zur Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe nach den ganzen positiven Potenzen der Grundgröße, wie dieß namentlich Schweins in seiner Differentialrechnung gethan hat. Keine einzige von allen diesen Entwickelungen ist aber ganz allgemein, d. h. findet statt für alle Werthe der Grundgröße. Wenn eine solche Reihe für eine gewisse Folge von Werthen von x convergirt, so wird sie für eine andere divergiren, also unbrauchbar sein; deßwegen gibt uns die Wissenschaft in solchen Fällen Mittel zu anderen Entwickelungen, welche jetzt gerade die umgekehrte Eigenschaft haben, oder auch

sie lehrt uns Wege, die unbrauchbaren Formen in andere umzuwandeln, welche ihrem Zwecke entsprechen. Es gibt keine Entwickelung einer Funktion, welche in allen Fällen unbrauchbar wäre, und es ist daher eine ganz falsche Ansicht bei solchen Forschungen von vorne herein, sich von der Idee der Annäherung leiten zu lassen. Man hemmt dadurch unnöthigerweise den Flug der Wissenschaft, ohne mehr als ein specielles Resultat zu erhalten. Eine nothwendige, aber oft schwierige und nur zu sehr vernachlässigte Untersuchung aber ist, zu bestimmen, innerhalb welcher Gränzen eine Reihe für besondere Werthe der Größen, welche in der Funktion vorkommen, giltig ist, denn häufig hängt die Brauchbarkeit der Reihe von dem Verhältnisse ab, welches die Grundgröße zu gewissen Konstanten der Funktion hat, und oft tritt hier eine Gränze ein, über welche hinaus die Reihe unbrauchbar wird. Bei der Entwickelung ungesonderter Funktionen bieten sich ebenfalls verschiedene Formen der Reihen dar, und sie gestatten auch leicht die Bestimmung des Restes.

Die Lehre von den Funktionen bietet noch eine andere Merkwürdigkeit dar. Gewisse Funktionen vermögen wir aus ihren Elementen gewissermaßen arithmetisch zu konstruiren, diese sind uns ihrer Natur nach deßhalb völlig klar; andere dagegen treten aus gewissen Untersuchungen mit einem Male hervor, ohne daß wir bis jetzt vermocht hätten, auf gleiche Weise auf ihre Elemente zurückzugehen. Zur ersten Art gehört das Binomium $(x + a)^n$, und es ist nicht das kleinste Verdienst Newton's, zuerst dessen Entwickelung gelehrt zu haben. Durch die Wichtigkeit dieses Theorems veranlaßt, hat man seitdem versucht, dasselbe auf die verschiedensten Arten zu beweisen, und die ausgezeichnetsten Mathematiker haben sich diesen Bemühungen hingegeben. Der elementare und ungekünstelte Begriff der Potenz, wie er von jeher bestanden hat, ist folgender: Es bedeutet a^3 die Einheit 3 mal vervielfacht mit a oder $a^3 = 1 \times a \times a \times a$ und eben so a^n die Einheit nmal vervielfacht mit a. Vor dem Exponenten muß man sich das Zeichen + denken, welches in der Stellung rechts oben die Art des Geschäftes, die Multiplication andeutet; n gibt an, wie oft und a, womit dieses Geschäft ausgeführt werden soll. Jede folgende Potenz wird gebildet, wenn man die vorhergehende mit a vervielfacht und daher umgekehrt, jede frühere aus der späteren, wenn man diese durch a dividirt; das Vorwärtsgehen von Glied zu Glied geschieht dadurch, daß man den Exponenten immer um 1 erhöht und das Rückwärtsgehen eben so dadurch, daß man ihn um 1 erniedrigt. Auf diese Art gelangt man leicht dahin, zu erkennen, daß z. B. a^{-3} bedeutet, es soll die Einheit 3 mal dividirt werden durch die Größe a, die Bezeichnung ist jetzt hier keine willkürliche mehr, sondern eine nothwendige Folge der Bezeichnung von a^{+n}, und der negative Exponent drückt ganz richtig das entgegengesetzte Geschäft aus. Man erhält auf diese Art eine Reihe .... a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^{+1}, a^{+2}, a^{+3} ... deren Glieder alle nach demselben Gesetze gebildet werden, man geht von einem früheren zu einem spätern über durch Multiplication mit a, und vom späteren zum früheren durch Division mit a. Zwischen je zwei Glieder dieser Reihe kann man sich eine beliebige Zahl anderer Glieder eingeschaltet denken, so daß alle zusammen eine neue Reihe bilden, deren Glieder aber demselben Gesetze unterworfen sind. Denkt man sich ein Glied eingeschaltet, so wird die Exponentenreihe .... $-2, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +1\frac{1}{2}, +2, \ldots$, denn diese muß nothwendig eine Reihe mit gleichen Unterschieden bilden. Das erste Glied ist also 1, das zweite daher $1 . a^{1/2}$, das dritte $1 . a^{1/2} . a^{1/2}$, aber auch a^1, daher $a^{1/2} . a^{1/2} = a^1$; hieraus ergibt sich die Bedeutung von $a^{1/2}$; es steht diese Größe nämlich in derselben

Beziehung zu a^1, wie a^1 zu a^2. Eine Anzahl Größen bilden daher nur dann Zwischenglieder einer Reihe, wenn sie dem Gesetze der Hauptglieder unterworfen sind. Statt einer einfachen Größe a kann man das Binom $x + a$ zum Grunde legen, und hat man ein gemeinsames Gesetz gefunden, nach welchem $(x + a)^{+n}$ und $(x + a)^{-n}$ gebildet werden, so muß dieses auch nothwendig für $(x + a)^{\pm\frac{p}{q}}$ gelten, denn nur hierdurch wird diese Größe ein Zwischenglied der Reihe. Nun sollte man denken, das einfachste Mittel, dieses Gesetz aufzufinden, wäre, die durch die Zeichen vorgeschriebenen Geschäfte wirklich vorzunehmen und dadurch die direkte Entwickelung zu erhalten, aber gerade dieser natürlichste Weg ist am spätesten betreten worden, und man hat vorgezogen, auf indirekte Weisen und auf künstliche Arten den Beweis zu führen. Es ist nicht zu läugnen, daß die direkten Beweise uns eine klarere Einsicht in die Sache gestatten, und daß bei den künstlichen man zwar genöthiget ist, die Richtigkeit der Schlüsse zuzugestehen und das Resultat als wahr anzuerkennen, aber doch nicht erfährt, wie die Sache eigentlich zusammenhängt. Wenn man keiner einseitigen Richtung huldiget, so muß man jedoch auch dieser Beweisart Gerechtigkeit widerfahren lassen, denn die direkten Beweise sind nur anwendbar für die Klasse der Funktionen, welche wir von ihren Elementen aus entwickeln können, und gerade die schwierigern Fälle lassen bis jetzt nur den künstlichen Beweis zu. Auf der andern Seite sollte man aber die direkten Beweise nicht auch da verwerfen, wo sie mit großem Vortheile angewendet werden können. Das hier Gesagte findet noch auf sehr viele andere Funktionen seine Anwendung und ist hier nur deßwegen besonders erwähnt worden, weil der Gegenstand auch außerhalb der Mathematik von Bedeutung ist.

Die combinatorische Analysis.

Wenn man 1 mit $x + a_1$ vervielfacht und das, was hieraus hervorgeht, wieder mit $x + a_2$, das neue Resultat mit $x + a_3$ u. s. w., so erhält man durch diese Wiederholung derselben Operation eine Reihe, in welcher die Potenzen von x verbunden sind mit gewissen Verbindungen der Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ welche man im Allgemeinen Combinationen nennt. Da nun die gleiche Operation immer auf dieselbe Weise ausgeführt wird mit Größen, die nach einem bestimmten Gesetze auf einander folgen, so müssen auch diese Verbindungen bestimmten Gesetzen unterworfen sein. Hat man nun die Operation so oft wiederholt, bis das Gesetz der Reihe und der Verbindungen sich klar herausgestellt hat, so wird man bei einer Wiederholung das gleiche Gesetz der Entwickelung erhalten, weil keine neue Ursache hinzugetreten ist, welche eine Aenderung hätte herbeiführen können. Man nimmt daher nach diesem Grundsatze das Gesetz für $n-1$ Operationen an und bildet nun die nte Wiederholung, und ist das Gesetz, das aus dieser Rechnung hervorgeht, wirklich dasjenige, welches der nten Wiederholung entspricht, so ist dasselbe hierdurch bewiesen. Nimmt man ferner an, die Elemente $a_1, a_2, a_3 \ldots$ wären sämmtlich einander gleich, so gehen alle Verbindungen der ersten Klasse in a^1, alle der zweiten in $a^2, \ldots$ über, und jede dieser Potenzen entsteht so oft, als jede Klasse Verbindungen enthält.

Auf der andern Seite entsteht ein Produkt gleicher Faktoren, oder die nte Potenz von $x + a$. So kann man leicht, und auf elementarem Wege, den Beweis des Binomialtheorems für ganze positive Exponenten erhalten, wobei einem gewissermaßen die Sache unter den Händen hervorgeht und keine Dunkelheit zurückbleibt. — Theilt man die Einheit durch $x + a_1$, die Reihe, welche

hierdurch entsteht, durch $x + a_2$ u. s. w., so gelangt man eben so zu einer Reihe, in welcher die Potenzen von x von Verbindungen anderer Art aus den Elementen a_1, a_2, a_3 ... begleitet sind. Ganz auf die gleiche Weise beweist man das Gesetz der Reihe; welche hieraus hervorgegangen ist; von den ungleichen Divisoren geht man zu den gleichen über und erhält so zuletzt das Gesetz der Entwickelung eines Binoms mit negativen Exponenten. Vergleicht man zuletzt die erhaltenen Reihen, so zeigt sich, daß sie ganz gleich sind, nur daß wo $+ n$ in der einen, $- n$ in der andern steht, woraus sich nun ergibt, daß das gleiche Gesetz der Entwickelung für beide gilt, daß es also allgemein ist und auf gebrochene Exponenten ausgedehnt werden darf. Nach derselben Idee kann man auch die positiven und negativen Potenzen der vieltheiligen Größen oder der Polynomien behandeln, und gelangt zu demselben Resultate, nämlich, daß es Entwickelungsreihen gibt, welche für jeden Exponenten gelten. Solche Untersuchungen sind von der größten Wichtigkeit für die Analysis, denn auf ihnen beruhen wieder naturgemäß z. B. die allgemeine Umkehrung der Reihen, die Lehre von den Exponentialgrößen und den Logarithmen und die Lehre von den Kreisfunktionen.

Wenn überhaupt nach einer bestimmten Idee einfache oder zusammengesetzte Operationen mit Größen, die in einem formellen Zusammenhange stehen, wiederholt werden, so ergeben sich Verbindungen der Elemente, die bestimmten Gesetzen huldigen. Indem wir diese Idee aufnehmen, ahmen wir nur der Natur nach, die auf gleiche Weise aus ihren Elementen die mannigfaltigsten Bildungen hervorbringt. Weisen wir sie ab, so schneiden wir der Mathematik ihren Lebensfaden ab, denn zuletzt muß diese, wenn sie ihr Ziel erreichen soll, auf solche einfache Entwickelungen zurückgebracht werden können. Von solchen Ideen ging nun Hindenburg aus, als er zur combinatorischen Analysis den Grund legte, welche, obgleich sie keine ihrem Wesen entsprechende Verbreitung gefunden hat, in nahezu 70 Jahren schon zu sehr beträchtlichen Resultaten gelangt ist. Vieta und Harriot haben sich mit den Combinationen in Bezug auf die Gleichungen beschäftiget und gefunden, daß die Coefficienten einer Gleichung die entsprechenden Combinationen der Wurzeln sind; Girard hat die Potenzensumme der Wurzeln durch diese Combinationen ausgedrückt. Pascal, Fermat und van Schooten haben sie betrachtet, Leibnitz wurde schon durch seine ganze Richtung auf sie hingewiesen, Wallis und Euler haben sich gleichfalls damit beschäftiget. Die Schriftsteller über Wahrscheinlichkeits-Rechnung mußten sie aufnehmen, daher finden wir sie schon bei Jac. Bernoulli, Moivre und den spätern. Nebst Hindenburg haben sich gleichzeitig mit der combinatorischen Analysis beschäftiget: Rothe, Pfaff, Stahl und Weingärtner u. a. Die Bezeichnung war anfänglich unbehülflich und die Darstellung schwerfällig, was ihrer Verbreitung bei den Mathematikern, die an elegante Formeln gewöhnt waren, wohl hinderlich gewesen sein mag. Wie es immer im Anfange zu geschehen pflegt, legte man auch auf Nebendinge großen Werth und erging sich in weitläufigen Vorschriften zur Bildung der Combinationen, anstatt ihre Gesetze aufzusuchen. Von all diesem Ballaste hat sich aber die Methode jetzt befreit, und ihre Formeln dürften an Leichtigkeit und gefälligem Ausdrucke sich allen andern zur Seite stellen können. Dieses hat besonders Schweins hervorgebracht, der in seiner Analysis diesem Zweige eine andere Form und eine große Erweiterung gegeben hat. Diese Methode hat aber auch noch einen andern Vorzug, sie gibt uns das Gesetz der Entwickelung aus den Elementen selbst, und die Coefficienten nicht durch Aggregate derselben, bei welchen man keine Einsicht in ihrer Entstehung hat, und es soll ja eine unserer ersten Be-

mühungen sein, die Gesetze selbst aufzudecken und nicht bloß Formen zu schaffen, welche eine bequeme Anwendung zulassen.

Eine Vergleichung der Reihen für die Kreisfunktionen Sin. x und cos. x lehrt sie uns als Theile eines Binomiums kennen, und alle Eigenschaften dieser Funktionen können aus dem Binomialsatze hergeleitet werden. Nun ist aber der Kreis ein specieller Fall der Ellipse, folglich muß es eine allgemeinere Funktion als das Binomium geben, welche dieselbe Beziehung zur Ellipse hat, wie das Binom zum Kreise. Und noch mehr, es muß Funktionen geben, welche in einer solchen Beziehung zu den Kurven des 2. und 3. Grades stehen. Hierher gehören, wenn auch in anderer Form, die berühmten elliptischen Funktionen, welche von Fagnani, Landen, Euler und Lagrange betrachtet wurden; sie bilden das Hauptwerk Legendre's und verdanken Jacobi und Abel höchst wichtige Erweiterungen.

Die Entwickelung der Exponentialgröße a^x wird auf das Binomium zurückgeführt, und man erhält eine Reihe nach den Potenzen von x. Ist $y = a^x$, so ist x der Logarithmus von y für die Grundzahl a; man kann daher, wenn durch x die Stelle gegeben ist, welche a^x in der Potenzenreihe einnimmt, die zugehörige Zahl finden. Aber auch umgekehrt kann man für eine gegebene Zahl y die Stelle x suchen oder den Logarithmus der Zahl y. Die Potenzenreihe ist aber selbst ein specieller Fall einer viel allgemeinern und man kann die beiden Fragen auch für diese stellen. Euler hat das Produkt $1 . 2 . 3 \ldots x$ zu den inexplicabeln Funktionen gerechnet, Vandermonde aber hat (1772) die Sache viel allgemeiner aufgefaßt und sich mit der Produktenreihe $a, a . (a + h), a (a + h) (a + 2 h), \ldots$ beschäftiget und den Gegenstand schon in seiner ganzen Ausdehnung erkannt. Die Arbeit von Vandermonde ist aber nicht sehr beachtet worden, und so hat Kramp, ohne Kenntniß von ihr zu haben, die Sache in seiner Weise aufgenommen (1799) und schon eine ausgedehnte Anwendung davon gemacht. Diese Produkte bilden neue Funktionen, die Fakultäten, deren Einführung man jedenfalls Kramp verdankt. Es haben sich hier zweierlei Bezeichnungen gebildet, wie einst bei der Differentialrechnung: die Franzosen haben die ihres Landsmannes Vandermonde angenommen, und sie wird auch von manchen deutschen Schriftstellern gebraucht; neben dieser besteht auch die von Kramp. Darin stimmen übrigens beide überein, daß die Anzahl der Wiederholungen der Multiplication durch einen Exponenten ausgedrückt werden müsse; da aber die Faktoren nicht gleich sind, so muß ihre Zu- oder Abnahme angedeutet werden, und dieß geschieht bei der ersten Bezeichnung dadurch, daß die Differenz nach der Grundzahl, bei der andern, daß sie nach dem Exponenten gesetzt wird. Der Fall war neu: es kamen hier, wie bei der Differentialrechnung, zwei Geschäfte in Verbindung vor, ohne daß diese auf gleich einfache Weise sich ausdrücken ließen. Nach der ersten Bezeichnung ist $a (a + h) (a + 2 h) = (a, h)^3$ und nach der andern $= a^{3|h}$. Uns scheint, streng genommen, $(a, h)^3$ nichts anderes auszudrücken, als $(a, h) \times (a, h) \times (a, h)$ und die erste den Vorzug zu verdienen. Die Lehre von den Fakultäten haben nun nach Kramp zuerst wieder Crelle und Schweins und zuletzt Oettinger behandelt. Man kann sich nun gleichfalls eine Reihe denken... $a^{-3|h}, a^{-2|h}, a^{-1|h}, a^{0|h}, a^{1|h}, a^{2|h}, a^{3|h}, \ldots$, und wenn man setzt $y = a^{x|h}$, die Frage stellen, wie kann y aus x und umgekehrt x aus y gefunden werden. Wir haben in diesem Falle eine höhere Art von Logarithmen, in welche noch ein neues Element h eintritt, und diese Logarithmen stehen zu den gewöhnlichen in derselben Beziehung, wie die elliptischen Funktionen zu den Kreisfunktionen. Diese Fragen höherer Art sind

größtentheils noch unerledigt, und die Analysis hat noch ein weites Feld zu ihrer Entwickelung vor sich.

Unter den Verbindungen, welche die combinatorische Analysis entwickelt, sind besonders zwei Classen, die Combination mit und ohne Wiederholung, merkwürdig: sind die Elemente alle gleich = 1, so führen sie zu den Binomialcoeffizienten, sind sie aber die Glieder der Zahlenreihe, so bilden sie Funktionen der Anzahl der Elemente, welche durch die ganze Analysis gehen. Die so räthselhaft dastehenden Bernoulli'schen Zahlen sind nichts weiter als Aggregate dieser Funktionen, nach einem einfachen Gesetze gebildet, und diese Zahlen sind selbst nur die Anfangsglieder von Reihen, die man Bernoulli'sche Zahlen der 2., der 3. Ordnung u. s. w. nennen könnte, und die gleichfalls bei vielen Untersuchungen hervortreten. Die Summen der Potenzen der Glieder der Zahlenreihe, die Reihen für die Kreisfunktionen und viele andere enthalten die Bernoull'ischen Zahlen der ersten, so wie der höhern Ordnungen, und die Kenntniß aller dieser Gesetze verlangt auch nothwendig die Kenntniß der unabhängigen Bildungsweise dieser Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Elementen, aus welchen sie hervorgegangen sind.

Die Idee der Wiederholung desselben Geschäftes oder mehrerer in Verbindung, welche den bisher erwähnten Funktionen zum Grunde lag, ist auch auf die Differential- und Integral-Rechnung ausgedehnt worden, und so wie man die + oder — nte Potenz nimmt, so kann man auch das + oder — nte Differential nehmen. Die erste Idee zu diesen allgemeinen Wahrheiten hat schon Leibniß gehabt, und Joh. Bernoulli hat davon Anwendungen gemacht; ihre Ausbildung gehört aber Lagrange an (1772).

Die Analysis hat noch andere Erweiterungen durch die Einführung neuer Funktionen erhalten; hierher gehören die Fonctions génératrices von Laplace, die wiederholenden Funktionen von Tralles, nämlich Sin (Sin x), log (log x) u. a. mit der allgemeinen Bezeichnung $Sin^n x$, $log^n x, \ldots$; ferner die periodischen Funktionen von Horner und Babbage, welche nach mehreren solchen Wiederholungen die Grundgröße wiedergeben. — Wenn man n Gleichungen hat, die n unbekannte Größen auf der ersten Potenz enthalten, so kann man auf bekannte Weise, durch eine Verbindung je zweier Gleichungen eine von diesen Unbekannten wegschaffen, und es bleiben dann noch n—1 Gleichungen mit n—1 Unbekannten. Diese können nun auf gleiche Weise behandelt werden, und zuletzt bleibt noch eine Gleichung mit einer Unbekannten, welche daraus aufgefunden werden kann. Hier werden gleichfalls zwei Geschäfte wiederholt, das Vervielfachen und das Abzählen; bei den ersten Operationen geschieht das erste mit den Coeffizienten einer Unbekannten der gegebenen Gleichungen, bei den folgenden immer mit den Coefficienten der neuen Gleichungen, die schon zusammengesetzt sind. Es tritt also bei jeder folgenden Operation eine Steigerung ein; die Combinationen werden aber doch nicht sehr verwickelt, und es entstehen die Produkte mit Versetzungen, welche von großer Bedeutung in der Analysis sind. Bezout und Schweins haben diese Produkte untersucht.

Die unbestimmten Gleichungen und die Theorie der Zahlen.

Die Lehre von den unbestimmten Gleichungen oder die unbestimmte Analytik, von den Indern zuerst kultivirt, von Diophantus auf eine große Zahl einzelner Fälle angewendet, war auf die Araber übergegangen, ohne hier muthmaßlich eine Erweiterung erfahren zu haben; ja es blieb ein bedeutender Theil der Forschungen der Inder unbekannt und schien verloren zu sein. Durch Bonacci

im Occidente eingeführt, erhielt sie sich mit unbedeutenden Veränderungen, bis auf Bachet de Meziriac, der die schöne Methode der Inder zur Auflösung der Gleichungen des ersten Grades wieder erfand. Durch Fermat's Sätze wurde aber die enge Gränze schnell überschritten, doch nur so, daß er uns in eine Reihe von Thatsachen einführte, ohne den Weg anzugeben, auf welchem er zu ihnen gelangt war. Eine günstige Fortbildung dieses Zweiges war hierdurch abgeschnitten; diese Sätze gaben bloß eine Anregung und die Bemühungen um sie haben bis in unsere Zeit herein fortgedauert. Hier bewährt sich die bei der indischen Mathematik gemachte Bemerkung, wie ungünstig die Form der Wissenschaft ist, welche nur die Sätze gibt, ohne die Wege ihrer Erfindung zu erklären, oder ihre Beweise zu liefern. Ein neuer Fortschritt war die Auflösung der Gleichungen $cx^2 + 1 = y^2$ in ganzen Zahlen durch Lord Brounker, zu welcher er durch Fermat veranlaßt worden war. Diese erste Auflösung, welche natürlich noch unvollkommen war, wurde von dem englischen Mathematiker Pell (1610 — 1685) wieder vorgenommen, aber seine Auflösung war in vielen Fällen sehr weitläufig. In Pell's neuer Ausgabe von Rahn's Algebra, welche Branker aus dem Deutschen ins Englische übersetzt hatte, kommt noch manches hierher Gehörige vor. Der Gegenstand erregte fortwährend die Aufmerksamkeit der Gelehrten und wurde von Euler und Lagrange vorgenommen; der letzte erfand (1767) die noch jetzt gebräuchliche Methode $\sqrt{C}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, und die Werthe von x und y aus den Näherungsbrüchen desselben herzuleiten. Die Methode von Lagrange hat ihrem Wesen nach Aehnlichkeit mit der indischen, sie gibt gleichfalls einen Cyklus von Zahlen, welcher eben so bis zur Erkennung des Gesetzes entwickelt werden muß. Die letztere dagegen ist kürzer; sie verlangt z. B. für die Gleichung $619 . x^2 + 1 = y^2$ nur 13 Operationen, während die erste 20 erfordert. Die beiden genannten Geometer wandten sich nun auch zur Auflösung der allgemeinen Gleichungen des 2. Grades. Diese wurden zurückgeführt auf die Gleichungen $C v^2 + A = w^2$. Das gleiche Resultat hatten auch schon die Inder und auf demselben Wege erreicht. Euler hat für die Gleichung $axy = bx + cy + d$ eine Auflösung angegeben, welche völlig mit der des Brahmegupta übereinstimmt. Von Lagrange haben wir eine Methode der Auflösung von Gleichungen, in welchen die eine Unbekannte den ersten Grad nicht übersteigt, die andere aber unbeschränkt ist. Die Untersuchungen über die Gleichungen höherer Grade haben der Natur der Sache nach noch zu keinen bedeutenden Resultaten geführt.

Die Sätze von Fermat waren nun zunächst für Euler und Lagrange Gegenstände der Betrachtung geworden, und ihnen haben sich dann später hauptsächlich Legendre und Gauß angeschlossen. Durch die Bemühungen dieser ausgezeichneten Geometer ist aber ein neuer Zweig der Mathematik, die Theorie der Zahlen, ins Leben gerufen worden, mit welcher die unbestimmte Analytik aufs engste zusammenhängt. Die Lehre von den Eigenschaften der Zahlen war der Hauptgegenstand der Forschungen der Pythagoräer und, aus der Arithmetik, auch von den Griechen überhaupt nur im Anfange aufgenommen worden, weil er ihrer Richtung nicht fremd war; sie behandelten ihn auf ihre Weise, aber die Fortschritte waren unbeträchtlich, die Betrachtung der Eigenschaften der Raumgrößen war leichter und nahm sie mehr in Anspruch. In Indien finden wir natürlich den Gegenstand in dieser Auffassung nicht, er fand sich hier nur in der Form von Gleichungen als eine Art Rechnung. Wir haben die Entstehung der Erforschung der Eigenschaften der Zahlen bei den Chaldäern vermuthet, und nach Vergleichung und Würdigung aller Verhältnisse in der

Entwickelungsgeschichte der geistigen Richtungen kann auch nur da ihre Heimath sein.

In Europa hat Fermat den Anstoß gegeben; Euler, Lagrange, haben nebst andern Mitarbeitern die Sache weiter geführt, aber erst Legendre und Gauß die Theorie der Zahlen gegründet. Mit Recht haben jetzt diesem schönen Zweige viele und ausgezeichnete Kräfte sich zugewandt, deren vereinten Bemühungen es hoffentlich bald gelingen wird, dem Gegenstande eine naturgemäße und einfache Entwickelung zu geben und eine Form, durch welche er mehr mit den andern Zweigen der Mathematik übereinstimmt. Nur hierdurch wird er größere Theilnahme und allgemeinere Verbreitung finden. Ein derartiger Versuch ist bereits von Crelle gemacht worden, und es ist zu wünschen, daß er seine Wirkung nicht verfehle.

Die Natur des Gegenstandes mag durch einige besondere Sätze hier ihre Andeutung finden. Der allgemeinste Satz von Fermat ist: Eine jede Zahl ist entweder eine neckige Zahl, oder sie ist aus 2 oder 3 oder 4, ... oder n, neckigen Zahlen zusammengesetzt. Insbesondere folgt also hieraus der Satz: Eine jede Zahl ist entweder eine Quadratzahl, oder sie kann in die Summe von 2 oder von 3, oder von 4 Quadraten aufgelöst werden. — Alle Primzahlen von der Form $4n + 1$ bestehen aus den Summen zweier Quadrate. — Die Zahlen von der Form $8n + 3$ lassen sich in drei ungerade Quadrate zerlegen. Für jede Primzahl p von derselben Form gibt es immer eine Reihe Werthe von z, so daß $z^2 + 2$ durch p theilbar ist; wenn aber p von der Form $8n + 7$, so ist $z^2 - 2$ durch p theilbar. — Wenn p eine Primzahl ist, so gibt das Produkt $1 . 2 . 3 \ldots (p - 1)$ durch p dividirt den Rest $p - 1$. Dieser Satz ist von John Wilson und durch Waring zuerst bekannt geworden. Wenn p eine Primzahl ist und N nicht durch p theilbar, so gibt N^{p-1} durch p getheilt, immer den Rest $+ 1$; dieser Satz ist von Fermat. Unter denselben Voraussetzungen gibt $N^{\frac{p-1}{2}}$ durch p getheilt entweder den Rest $+ 1$ oder $- 1$. Wenn p und q zwei Primzahlen sind, die nicht beide zugleich die Form $4n + 3$ haben, so ist immer $q^{\frac{1}{2}(p-1)} \pm 1$ durch p und zugleich $p^{\frac{1}{2}(q-1)} \pm 1$ durch q theilbar, wenn sie aber diese Form haben, so ist $q^{\frac{1}{2}(p-1)} \pm 1$ durch p, dann aber $p^{\frac{1}{2}(q-1)} \mp 1$ durch q theilbar.

Die Lehre von den Gleichungen.

Es ist früher gezeigt worden, wie langsam die Fortschritte in Bezug auf die Lehre von den Gleichungen waren. Die negativen Wurzeln, schon von Cardanus erkannt, wurden doch erst von Girard ihrem Wesen nach erfaßt; es bedurfte aber noch der Geometrie des Descartes, um sie vollständig aufzuklären. Die gleiche Bewandtniß hatte es mit dem Zusammenhange der Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung. Ueber alle diese Dinge war man jedoch endlich hinausgekommen und unterschied nur noch zwischen reellen, positiven oder negativen, und unmöglichen Wurzeln. In Bezug auf die letzten hatte man erkannt, daß sie die Form $x = a + b\sqrt{-1}$ haben und mit einer solchen auch immer eine andere $x = a - b\sqrt{-1}$ verbunden sein müsse, oder, daß eine jede Gleichung sich in eben so viele zweitheilige reelle oder unmögliche Faktoren auflösen lasse, als der Grad der Gleichung angibt. Um diesen wich-

tigen Satz zu beweisen, liegen eine ganze Reihe von Bestrebungen der ausgezeichnetsten Geometer vor, von d'Alembert 1746, Euler 1749, Lagrange 1772, Gauß 1799; auch Laplace und Cauchy haben Beweise gegeben und noch viele Andere. Zwei unmögliche Faktoren dieser Art lassen sich zu einem dreitheiligen reellen von der Form $x^2 + \alpha x + \beta$ vereinigen; daraus folgt nun weiter, daß eine Gleichung vom Grade $m + 2 . n$, welche m mögliche und 2 n unmögliche Wurzeln hat, sich in m Faktoren der Form $x + a$ und in n Faktoren der Form $x^2 + \alpha x + \beta$ auflösen lasse, aber die Auflösung selbst zu finden ist nicht erreicht worden. Euler und Lagrange haben besonders viel mit diesem Gegenstande sich beschäftiget und ihre Ideen auf die Gleichungen vom 3. und 4. Grade angewandt, aber darüber hinaus konnten sie nicht kommen, und zuletzt hat man zu beweisen gesucht, daß eine allgemeine Auflösung der Gleichungen aller Grade überhaupt unmöglich sei. Die Auflösung der Gleichungen bis zum 4. Grade wurde aber hierdurch von allen Seiten beleuchtet; neue Wege dazu wurden aufgefunden; hierher gehören unter andern auch die Bemühungen von Waring und Bezout. Die allgemeine Auflösung gelang nur für besondere Klassen von Gleichungen; die Untersuchungen von Cotes und Moivre auf diesem Felde sind früher schon angeführt worden.

Diese Schwierigkeiten veranlaßten nun die Versuche zur Auflösung der Zahlengleichungen wenigstens durch Annäherung. Wenn man die Wurzeln einer Gleichung finden will, so ist vor allen Dingen nöthig zu wissen, ob sie überhaupt reelle Wurzeln habe, und wenn, wie viele. Ist diese Vorfrage erlediget, so müssen für jede Wurzel Gränzen angegeben werden, zwischen welchen sie enthalten ist. Die letzte Frage ist von Newton, Maclaurin, Rolle, Waring und Lagrange behandelt worden, allein ihre Untersuchungen, obgleich schätzbar für ihre Zeit, haben kein genügendes Resultat geliefert. Die Forschungen von Descartes, Hudde, de Gua und Andern, haben auch hier in Bezug auf die Hauptsache, wie viele reelle Wurzeln eine Gleichung habe, kein günstigeres Ergebniß geliefert. So blieb die Sache denn lange liegen, bis es endlich Fourier gelang, auch hier günstigere Erfolge hervorzurufen. Dieser Geometer zeigte, wie viele reelle Wurzeln zwischen zwei beliebigen Werthen von x liegen können. Man hatte nun mit einem Male eine Methode, die, wenn auch mühsam und von ungewissen Versuchen nicht frei, am Ende doch zum Ziele führte. Nach so vielen ungenügenden Versuchen glaubte man jetzt das Höchste erlangt zu haben, was in dieser Beziehung geleistet werden könnte, und Fourier's Methode war für die Sache wirklich ein großer Gewinn, besonders da er zugleich damit eine wesentliche Verbesserung der Berechnungsmethode von Newton verknüpfte. Aber die Erfindungen drängten sich. Kurz nach der Erscheinung des Werkes von Fourier (1831) erschien zuerst in der Algebra von Meyer und Choquet (1832) ein Theorem von Sturm, welches derselbe schon 1829 der Pariser Akademie übergeben hatte, durch das man im Stande war, auf eine einfache Weise, die Anzahl der reellen Wurzeln zu erkennen und eben so ihre Begrenzung zu finden. Diese Methode ist so einfach, daß sie schwerlich durch eine andere wieder verdrängt werden wird, besonders wenn, was jetzt schon angebahnt ist, die dabei vorkommenden Divisionen auf eine leichtere Art ausgeführt werden können. Hat man die Gleichung $V = x^3 - 7x + 7 = 0$, so bilde man aus ihr die erste Ableitung $V_1 = 3x^2 - 7$, indem man jeden Exponenten der Potenz vorsetzt und ihn dann um 1 vermindert. Nun dividire man V durch V_1, und nehme den Rest der Division mit verändertem Zeichen; man erhält $V_2 = 2x - 3$. Eben so gibt V_1 durch V_2 dividirt, den

Rest — 1, oder mit umgekehrten Zeichen $V_3 = + 1$. In diesen vier Ausdrücken V, V_1, V_2, V_3 setze man nun zuerst $x = -\infty$ (unendlich), so erhält man die Zeichenreihe der daraus hervorgegangenen Werthe $- + - +$, welche 3 Zeichenwechsel hat; auf gleiche Weise setze man $x = +\infty$, was zu der Zeichenreihe $+ + + +$ führt; so viele Zeichenwechsel nun die letzte Reihe weniger hat als die erste, so viele mögliche Wurzeln hat die Gleichung. Die vorgegebene Gleichung hat also drei reelle Wurzeln, und um zunächst die negativen von den positiven zu scheiden, setzt man in denselben Ausdrücken $x = 0$, was zur Zeichenreihe $+ - - +$ führt. Da nun diese Reihe 2 Zeichenwechsel hat, so ist bei einem stetigen Uebergange der Größe x von $-\infty$ bis 0 ein Zeichenwechsel verloren gegangen und die Gleichung hat eine negative Wurzel. Bei dem Uebergange von 0 zu $+\infty$ gehen noch zwei weitere Zeichenwechsel verloren, weßhalb die Gleichung 2 positive Wurzeln hat. Die Substitution anderer Werthe von x in denselben Ausdrücken führt zu einer engern Begränzung: setzt man z. B. $x = -10$ und dann $x = +10$, so ergeben sich dieselben Zeichenreihen wie für $x = -\infty$ und $x = +\infty$, folglich liegen die drei Wurzeln zwischen — und + 10. Mit geringer Mühe kann man auf diese Art finden, daß eine Wurzel zwischen 1 und 1,5, eine zweite zwischen 1,5 und 2 und die negative zwischen — 3 und — 4 liegt. Wenn es nun gelingen wird, die zur Bildung der Reste nöthigen Divisionen zu vereinfachen, so leistet diese Methode alles, was man von einer praktisch brauchbaren Rechnung verlangen kann.

Wenn durch eine von diesen Methoden die Gränzen einer Wurzel bestimmt sind, so kann erst ihre wirkliche Berechnung eintreten. Hierzu hatte nun zuerst Newton eine brauchbare Vorschrift gefunden, welche früher schon angegeben worden ist. Lagrange hat gezeigt, wie die Wurzel einer Gleichung in einen Kettenbruch verwandelt werden kann; dieser wieder auf gewöhnliche Brüche zurückgebracht, gibt den Werth der Wurzel. Diese Methode mag bei manchen Untersuchungen ihren Werth haben: für die praktische Berechnung taugt sie nicht. Die Methode Newtons wurde dann von Fourier so umgestaltet, daß alle früheren Mängel derselben aufgehoben wurden und man im Stande war, eine Wurzel bis zu jeder beliebigen Genauigkeit aufzufinden, wozu Budan früher (1807) schon den Weg gebahnt hatte. Aber auch hier war ihm der Engländer Horner zuvorgekommen, und hatte 1819 eine Rechnungsweise erfunden, welche für die Berechnung der Wurzel dasselbe ist, was das Theorem von Sturm für die Begränzung. Horner gründete seine Rechnung ebenfalls auf die Regel von Newton; seine Darstellung war aber so wenig verständlich, daß erst nach der Erscheinung von Fourier's Werk die Engländer selbst darauf aufmerksam wurden; in Deutschland ist sie erst von Schulz von Straßnicki (1842) eingeführt worden. Die Methode Horners hat Aehnlichkeit mit dem Wurzelausziehen; die Wurzel der Gleichung wird Ziffer um Ziffer, immer auf die gleiche Weise und bis zu jeder beliebigen Genauigkeit berechnet. Die ganze Rechnung gründet sich auf eine andere, welche darin besteht, die Wurzel einer Gleichung um eine beliebige Größe auf höchst einfache Weise zu verringern, oder vielmehr: die Gleichung in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln um eine gegebene Zahl kleiner sind. Hat man die Gränze einer Wurzel in ganzen Zahlen gefunden, liegt sie z. B. zwischen 5 und 6, so verringert man die Wurzel um 5 und erhält nun eine neue Gleichung, in welcher die Unbekannte der Rest zu 5 ist. Dieser Rest ist also kleiner als 1; man vernachläßiget daher die höheren Potenzen und erhält einen genäherten Werth, indem man den letzten Coefficienten durch den vorletzten

dividirt. Wäre z. B. 0,4 der Quotient, so verringert man die Wurzel der 2ten Gleichung um diese Größe und erhält dann eine 3te Gleichung; welche man auf gleiche Weise behandelt u. s. f. Der Näherungswerth aus der 2ten Gleichung ist noch schwankend und erfordert zuweilen einige Versuche; alle folgenden erhält man aber mit immer größerer Sicherheit. Das Ganze bildet eine zusammenhängende Rechnung, welche auch mechanisch sehr leicht aufgefaßt werden kann. Dieses Verfahren hat einen großen praktischen Werth, und wenn man bedenkt, wie häufig die Anwendung der Gleichungen in den Naturwissenschaften, überhaupt in der angewandten Mathematik ist, so wird man leicht ihre Wichtigkeit begreifen.

Die Lehre von der Auflösung der Gleichungen war aber hiermit nicht abgeschlossen; die Verbesserungen der Methoden und die neuen Erfindungen drängten sich in einem kurzen Zeitraume zusammen. Gräffe in Zürich machte 1837 eine Auflösungsweise bekannt, welche mit den früheren nichts gemein hat, und auf dem Zusammenhange der Coefficienten mit den Wurzeln beruht. Encke hat dazu 1841 Ergänzungen geliefert, mit welchen sie kaum etwas zu wünschen übrig lassen dürfte. In der Idee stimmt sie mit den früheren Bemühungen M. Hirschs zusammen, eine Funktion der Wurzel zu finden, aus welcher auf die Wurzel selbst geschlossen werden kann. Schon die älteren Geometer haben gezeigt, wie man eine Gleichung in eine andere verwandeln kann, in welcher die Wurzeln um eine bestimmte Zahl größer oder kleiner sind, eben so, die ein Vielfaches oder ein Theil der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung. Man kann eine Gleichung, ohne ihre Wurzeln zu kennen, in eine andere umwandeln, deren Wurzeln die Quadrate der ersten sind. Hat man z. B. die Gleichung $x^2 - 7x + 7 = 0$, so setzt man $x = \sqrt{y}$, also $x^2 = y$ und $x^3 = y\sqrt{y}$, wo y die neue Unbekannte ist, hierdurch wird $y \cdot \sqrt{y} - 7\sqrt{y} + 7 = 0$ oder $\sqrt{y} \cdot (y - 7) = -7$, und zum Quadrate erhoben, $y(y-7)^2 = 49$, $y(y^2 - 14y + 49) = 49$ oder $y^3 - 14y^2 + 49y - 49 = 0$, und da $y = x^2$, so sind offenbar die Werthe von y die Quadrate der entsprechende Werth von x. Das Quadrat einer negativen Zahl ist positiv, und wie die Wurzeln der ersten Gleichung auch beschaffen sein mögen, die der neuen Gleichung sind sämmtlich positiv. Die Gleichung für y kann man eben so behandeln, man kann ihre Wurzeln wieder quadriren und dadurch eine Gleichung erhalten, in welcher die Wurzeln die 4ten Potenzen der ursprünglichen sind. Dieß Verfahren hat keine Gränzen und man kann überhaupt eine jede Gleichung in eine andere verwandeln, in welcher die Wurzeln die 2^nten Potenzen der Wurzeln der ersten Gleichung sind. An das aufeinanderfolgende Quadriren ist man nicht gebunden, man kann die Sache allgemeiner fassen, aber für die Anwendung ist es am einfachsten. Hat man z. B. eine Gleichung vom 3ten Grade $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$, so ist, wenn a, b, c die unbekannten Wurzeln der Gleichung bedeuten, $A = a + b + c$, $B = ab + ac + bc$, $C = abc$. Sind nun z. B. die Wurzeln dieser Gleichung zur 64sten Potenz erhoben worden und hat man dadurch erhalten $z^3 - \alpha z^2 + \beta z - \gamma = 0$, so ist eben so $\alpha = a^{64} + b^{64} + c^{64}$, $\beta = a^{64} \cdot b^{64} + a^{64} \cdot c^{64} + b^{64} \cdot c^{64}$ und $\gamma = a^{64} \cdot b^{64} \cdot c^{64}$. Ist nun a größer als b und dieses größer als c, so ist gewiß a^{64} größer als b^{64} und dieses wieder größer als c^{64}, es wird also a^{64} den beträchtlichsten Theil von α, und $a^{64} \cdot b^{64}$ den von β bilden, so daß man die übrigen Glieder vernachläßigen kann. Hierdurch erhält man $\alpha = a^{64}$, $\beta = a^{64} \cdot b^{64}$ und $\gamma = a^{64} \cdot b^{64} \cdot c^{64}$ mithin $a^{64} = \alpha$, $b^{64} = \frac{\beta}{\alpha}$ und $c^{64} = \frac{\gamma}{\beta}$ also $a =$

$\sqrt[64]{\alpha}$, $b = \sqrt[64]{\frac{\beta}{\alpha}}$ und $c = \sqrt[64]{\frac{\gamma}{\beta}}$ und diese drei Größen sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Wird durch die beispielsweise hier angegebene 64ste Potenz das Ziel noch nicht erreicht, nämlich daß schon das erste Glied, in dem Ausdrucke für α und β, bei weitem überwiegend wird, so geht man zu höheren Potenzen fort. Man erkennt aber aus der Rechnung selbst, ob man das Ziel erreicht habe; dieß wird dann der Fall sein, wenn die aufeinanderfolgenden Werthe von α und β immer mehr quadratisch wachsen, was beweist, daß die folgenden Glieder immer weniger Einfluß auf diese Größen ausüben. Durch diese Methode können aber auch die unmöglichen Wurzeln gefunden werden. Kommen nämlich die Coefficienten nicht zu einem quadratischen Wachsen und bleibt ihre Zunahme schwankend, so deutet dieses auf eine unmögliche Wurzel an dieser Stelle, und durch eine andere Betrachtung wird man auch zu dieser Wurzel geführt. Diese Methode leistet alles, was man verlangen kann; sie erfordert keine vorläufigen Untersuchungen über die Natur der Wurzeln, ob sie reell oder unmöglich, gleich oder ungleich, positiv oder negativ sind; kein Fall entzieht sich ihr, die Vorschrift zur Rechnung bleibt sich immer gleich; durch sie allein ist man jetzt erst in Stand gesetzt worden, die Zahlengleichungen vollständig in alle ihre Faktoren zu zerlegen. Die Rechnung ist zwar ausgedehnt, was der Natur der Sache nach nicht anders sein kann; durch den Gebrauch der Logarithmen wird sie jedoch bedeutend abgekürzt, wobei besonders die, durch Zech in ihrer Einrichtung verbesserten Tafeln der Gauß'schen Logarithmen ausgezeichnete Dienste leisten. Man lernt die Bedeutung dieser Logarithmen erst dann gehörig schätzen, wenn man, wie bei derartigen Rechnungen, davon unausgesetzten Gebrauch machen kann, und man erkennt, daß der Werth der Erfindung der Logarithmen überhaupt durch sie verdoppelt worden ist. — Wenn es sich nur darum handelt, die reellen Wurzeln einer Gleichung aufzufinden, so dürfte die Methode von Horner vorzuziehen sein, da dieselben durch diese bis zu jeder beliebigen Gränze berechnet werden können, während man bei der Gräffe'schen Methode durch die Logarithmen beschränkt ist. Ueberhaupt müssen jetzt die zu einer solchen Vollkommenheit gediehenen Methoden sich gegenseitig unterstützen. Ob jetzt der Gegenstand durch diese Entwicklungen zum Abschlusse gekommen sei, möchte nach den bisherigen Vorgängen schwer zu bestimmen sein. — Da die Auflösung der Gleichungen eine Sache von allgemeinem Interesse ist, so haben wir geglaubt, die Hauptpunkte ihrer Geschichte bis in die neueste Zeit herein fortführen zu müssen.

Die synthetische Geometrie der Neuzeit.

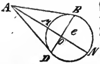
Die Geometrie im Abendlande haben wir verfolgen können von ihrem Ausgange an, von ihren praktischen Regeln und ihren Anwendungen und ihrer Vermengung mit griechischen Sätzen gleichfalls als bloße Aussagen ohne Beweis. Diese Geometrie ist allmälig in die rechnende Geometrie übergegangen, wie bei den Indern, bei welchen ein Beweis nicht hervortrat, weil dieser durch die Rechnung ersetzt wurde. Die Verbindung der Algebra mit der Geometrie hat eine großartige Entwicklung der Mathematik zur Folge gehabt, welche in gleicher Weise noch nie da war. Allmälig erhob sich aber auch wieder die synthetische Geometrie, welche im Anfange hervortrat im Studium der griechischen Werke, in ihren zahlreichen Uebersetzungen und in den Bemühungen zur Reproduktion der verlorenen. Bald wurden die Griechen schon in einigen Punkten überholt,

aber die strenge Nachahmung hinderte den Fortschritt. Desargues und Pascal haben sich zuerst eine neue Bahn gebrochen, in welche viele folgende Geometer eingetreten sind; sie haben eine neue synthetische Geometrie begründet, welche die der Griechen schon im Beginne bei weitem überragte; allein die Geometrie des Descartes und die Analysis des Unendlichen drängte sie in den Hintergrund, und erst nachdem diese durch ihre rasche Entfaltung etwas erschöpft waren, trat jene wieder hervor. Man wird jedoch unter den älteren hervorragenden Geometern wenige finden, die sich nicht auch mit diesem Gegenstande befaßt hätten. Maclaurin (1698—1746) hat über die allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Kurven geschrieben und Untersuchungen über ihre organische Beschreibung angestellt, besonders bekannt ist aber derselbe durch seine Fluxionenrechnung und eine nach ihm benannte Reihe zur Entwicklung der Funktionen. Der Astronom Halley (1656—1742) hat die Kegelschnitte des Apollonius herausgegeben, das 8te Buch restituirt und auch noch andere griechische Werke übersetzt. Eben so ist Robert Simson (1687—1768) durch seine Vorliebe für die alte Geometrie bekannt; er hat fünf Bücher über die Kegelschnitte im Style der Alten geschrieben und zwei Abhandlungen von Apollonius wieder hergestellt; seine Ausgabe Euklids zum Schulgebrauch hat eine große Verbreitung gefunden. Stewart (1717—1785), ein Schüler Maclaurins und Simsons, hat verschiedene Abhandlungen über die reine Geometrie geschrieben. Wir erwähnen zuletzt hier noch den berühmten Naturforscher und Mathematiker Joh. Heinr. Lambert (1728—1777), der in seinen zahlreichen Schriften vielfache Anwendungen von der reinen Geometrie gegeben und der in seiner Perspective von dieser Lehre, als einer geometrischen Methode, Gebrauch gemacht hat.

Die synthetische Geometrie hat erst gegen das Ende des verflossenen Jahrhunderts einen neuen Aufschwung genommen, besonders durch die Aufnahme neuer Methoden. Die Geometrie der Griechen war ganz auf die Betrachtung der Figur, auf die sinnliche Anschauung gegründet. Diese dem Wesen der Methode entsprechende Eigenthümlichkeit war bei der Anwendung der Algebra verloren gegangen; aus den Verhältnissen der durch die Rechnung entwickelten Größen erkannte man die Eigenschaften der Figur, ohne sie bildlich wiederzugeben oder sie in ihrer Räumlichkeit aufzufassen. Dadurch gingen aber manche Betrachtungen, welche die Verhältnisse einer Figur außerdem noch darbieten konnten, verloren, es fehlte an der Anregung zur Erweckung neuer Ideen. Nach der Anschauung von Descartes ist eine krumme Linie die Aufeinanderfolge von Punkten, welche durch zwei Geraden nach einem gewissen Gesetze bestimmt werden, und aus der Gleichung, welche dieses Gesetz enthält, kann man, besonders mit Hülfe der Rechnungen des Unendlichen, alle Eigenschaften einer Kurve und alle metrischen Relationen ableiten; eine Zeichnung ist dabei nicht nöthig. Diese Auffassung ist aber keinesweges allgemein, und es ergab sich auch bald eine zweite, welche wir schon bei den Spirallinien kennen gelernt haben; eine Kurve kann beschrieben werden, wenn eine veränderliche Gerade um einen festen Punkt sich dreht und ein Gesetz zwischen der Veränderung des Winkels und der des beschreibenden Radius gegeben ist. Sie kann ferner erzeugt werden, wenn eine Gerade nach einem bestimmten Gesetze ihre Lage stetig ändert und dadurch eine Folge von Tangenten gebildet wird, welche neue Kurven einschließen, wie bei den kaustischen Linien. Aber auch diese Mittel sind nur besondere Fälle, und es gibt noch eine Menge anderer Wege, auf welchen das gleiche Ziel erreicht werden kann. Man begreift leicht, daß jede dieser Methoden ihre besondern Vorzüge hat, durch welche sie zur Herleitung gewisser Eigenschaften mehr als eine andere geeignet ist. Die Mathematik ist aber auf dem Punkte angekommen, wo sie streben muß, die Masse

der einzelnen Sätze zu gruppiren und jede Gruppe unter ein allgemeines Gesetz zu stellen, welches alle umfaßt und wovon sie nur Corollarien sind. Die Ableitung muß aber auf eine einfache Weise geschehen und die einzelnen Sätze müssen aus dem allgemeinen auf eine leichte Art erkannt werden können. Man denke sich nun, dieses allgemeine Gesetz eines Raumgebildes sei in einer ihm entsprechenden Zeichnung niedergelegt und man vermöge nun, durch eine stete Veränderung oder Transformation vom Allgemeinen durch alle Besondernheiten durchzugehen, so werden dem Geiste alle die einzelnen Sätze in ihrer natürlichen Folge vorgeführt, und er erkennt ihren nothwendigen Zusammenhang mit dem Hauptsatze. Aber auch umgekehrt kann man auf diesem Wege vom Besondern zum Allgemeinen aufsteigen, wenn die transformirte Figur allgemeiner ist, die bedingenden Verhältnisse aber nicht geändert worden sind. Man denke sich in einer Ebene einen Kreis e und durch einen bestimmten Punkt O eine Sehne B D gezogen, und an B und D die Tangenten A B und A D, welche sich in A schneiden, sodann die Gerade A O, welche den Kreis in M und N schneidet, so sind die Punkte A, M, O, N vier harmonische Punkte. Man denke sich ferner über dem Kreise einen geraden Cylinder und auf A D, A B, B N, A D senkrechte Ebenen und nun das Ganze durch eine Ebene durchschnitten, welche nicht parallel ist zur Grundebene, so entsteht durch diesen Schnitt eine ähnliche Figur, in welcher der Kreis durch eine Ellipse ersetzt wird, und man erkennt leicht, daß der für den Kreis angegebene Satz auch für die Ellipse gilt. Auf diese und ähnliche Weisen können eine Menge Sätze verallgemeinert werden, aber alle Methoden setzen eine vollständige Anschauung der vorliegenden Verhältnisse voraus.

Fig. 31.



Wenn man von allen Punkten der begränzenden Linien eines Raumgebildes sich senkrechte Linien auf irgend eine Ebene gezogen denkt, so entsteht dadurch eine ebene Figur, welche die Projection der im Raume enthaltenen ist. Gewöhnlich nimmt man zwei Ebenen, eine horizontale und eine vertikale, und projicirt ein Raumgebilde auf beide; die erste Figur heißt die Horizontalprojection und die andern die Vertikalprojection, in der Baukunst sind sie unter dem Namen Grund- und Aufriß bekannt. Der Begründer einer wissenschaftlichen Lehre der geometrischen Projectionen oder der beschreibenden Geometrie ist Monge (1746—1818); er hat damit eine Anregung zu neuen Forschungen gegeben, welche bereits schon einen großen Erfolg gehabt haben und noch einen gänzlichen Umschwung in der Geometrie hervorrufen werden. Durch die Anwendung dieser Methode und der Perspective ist man zu zahlreichen neuen Theoremen auf eine höchst einfache Weise gelangt, wo oft die Rechnung mit großen Schwierigkeiten zu kämpfen hatte; viele Sätze scheinen sich aber auch dieser, in ihrer jetzigen Anwendung nicht recht fügen zu wollen und geben das Verlangte oft nur auf Umwegen und mit vieler Mühe.

Carnot (1753—1823), ein Schüler von Monge, hat in seiner Geometrie der Lage und seiner Theorie der Transversalen der neuen Richtung in der Geometrie bedeutende Vortheile gebracht und dadurch wesentlich ihre Entwickelung gefördert. Von jetzt an haben viele französische Mathematiker sich der synthetischen Geometrie zugewandt und durch Brianchon, Poncelet, Gergonne u. A. ist dieselbe bedeutend erweitert worden.

In Deutschland hat zuerst J. Steiner die Geometrie wieder in ihrer rein synthetischen Form aufgefaßt und in einzelnen Aufsätzen von seinen Bestrebungen Kunde gegeben. Im Jahre 1832 erschien von ihm „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten". Das Werk war auf

sieben Bände berechnet, und sollte, in fortlaufender Entwickelung, nach seiner ihm eigenthümlichen Methode, alle früheren, von verschiedenen Gesichtspunkten aus geleiteten Untersuchungen, in Verbindung mit seinen eigenen Forschungen aufnehmen und zu einem großen organischen Ganzen vereinigen. Im Interesse der Wissenschaft kann man nur bedauern, daß nur der 1. Band erschienen ist, und die Fortsetzung vom Verfasser aufgegeben zu sein scheint, denn dieß war der erste Versuch, die Geometrie von einem Keime aus, nach allen Richtungen hin organisch zu entwickeln, und die verschiedenen Auffassungen, Begründungen und Theorieen als Folgen eines allgemeinen Gesetzes hinzustellen. Ueber den Zweck seiner Arbeit spricht sich der Verfasser auf folgende Weise aus. „Gegenwärtige Schrift hat es versucht, den Organismus aufzudecken, durch welchen die verschiedenartigen Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind. Es gibt eine geringe Zahl einfacher Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen folgerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Anwendung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäß in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen und verwandte zu wohlbegränzten Gruppen sich vereinigen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können. Hierbei macht weder die synthetische, noch die analytische Methode den Kern der Sache aus, die darin besteht, daß die Abhängigkeit der Gestalten von einander, und die Art und Weise aufgedeckt wird, wie ihre Eigenschaften von den einfachen Figuren zu den zusammengesetzten sich fortpflanzen. Dieser Zusammenhang und Uebergang ist die eigentliche Quelle aller übrigen vereinzelten Aussagen der Geometrie. Eigenschaften der Figuren, von deren Vorhandensein man sich sonst durch künstliche Beweise überzeugen mußte, und die, wenn sie gefunden waren, als etwas Wunderbares dastanden, zeigen sich nun als nothwendige Folgen der unscheinbarsten Eigenschaften der aufgefundenen Grundelemente, und sie sind a priori durch diese gesetzt." Da wir der Natur unserer Aufgabe nach in den Gegenstand selbst nicht eingehen können und bloß die geistigen Bewegungen zu bezeichnen haben, welche sich in der Mathematik kundgeben, so war es nöthig, anzuführen, wie Steiner selbst seine Bestrebungen darstellt. Solchen Versuchen begegnen wir zwar schon früher; sie waren aber nicht mit hinreichenden Hülfsmitteln ausgerüstet, um das Gelingen zu sichern, und hatten auch keineswegs einen solchen allgemeinen Charakter. Es versteht sich von selbst, daß derartige Versuche nie einen vollständigen Erfolg haben können, sie sind alle nur ein Schritt weiter zum Ziele, welches wir zu erreichen streben; der Anfang ist aber immer am schwersten, das Verdienst deßhalb desto größer.

Die reine Geometrie mit der großen Menge ihrer neuen und schönen Theoreme war dem größten Theile der Mathematiker fremd geblieben, die sich lieber auf dem bekannten Terrain der analytischen Geometrie bewegten und den sichern Erfolg einem ungewissen vorzogen. Es war daher ein sehr verdienstliches Unternehmen, daß seit 1843 Adams durch eine Reihe Schriften diese Gegenstände in gewohnter Form zur Sprache brachte, und sie wurden, da sie einem wirklichen Bedürfnisse entsprachen, mit allgemeinem Beifall aufgenommen. Diese Werke enthalten in aphoristischer Form, und in der Manier Euklids, mit den für unsere Zeit nothwendigen Aenderungen, die wichtigsten Theoreme der Elementargeometrie, welche aus den Grundelementen Steiner's entwickelt werden

können. Die Trennung, in welcher hier der Gegenstand erscheint, sieht einem Rückschritte sehr ähnlich, wie namentlich der Dualismus aufgehoben ist, der diesen Untersuchungen wesentlich angehört, und welcher in der Natur der Raumgebilde liegt und ihren beiden Attributen der Größe und Lage entspricht. Dieß ist aber nur scheinbar; der Gegenstand war neu, die Vereinzelung nothwendig, wenn er in Fleisch und Blut der Mathematik übergehen sollte. Wir begegnen hier im Kleinen dem Gesetze der geistigen Entwickelung im Großen; in wenig Jahren wird die Umwandelung vollendet sein, dann erst werden die Bestrebungen zur Verallgemeinerung wieder hervortreten und dann auch mehr Würdigung finden können. Bereits haben schon viele Gelehrte der Sache ihre Aufmerksamkeit zugewandt, und bald dürfte dieser Gegenstand, wie es unserer Zeit angemessen ist, eine nicht gewöhnliche Entwickelung erhalten.

Die Fortbildung der analytischen Geometrie.

Die Geometrie des Descartes oder die analytische Geometrie erfreute sich dagegen fortwährend der Theilnahme der Mathematiker. Die erste bedeutende Erweiterung erhielt sie durch Parent (1666—1716), der durch Anwendung von drei Veränderlichen eine krumme Oberfläche durch eine Gleichung darstellte. Durch Clairaut erhielt dieser Gegenstand aber erst seine Entwickelung in seinem berühmten Werke über die Linien doppelter Krümmung und die krummen Oberflächen. Als verdienstvolle Schriftsteller sind hier noch weiter anzuführen: de Gua (1712—1786), Cramer (1704—1752) und Waring (1734—1798). Vor allen ist aber hier wieder Euler zu erwähnen, der, im 2. Bande seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen, die Kurvenlehre mit der ihm immer eigenen Klarheit und Einfachheit vorgetragen hat. Die werthvollen Werke über diesen Zweig häuften sich jetzt in allen Ländern, und wenn auch keine bedeutenden Erweiterungen hervorgetreten sind, so wurde doch die Behandlungsweise immer vollkommener, das Material vergrößert, die Resultate allgemeiner. Unter den Schriften aus dem Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts hat den größten Erfolg gehabt: Biot's Versuch einer analytischen Geometrie, angewandt auf die Kurven der 2. Ordnung; er hat durch seine Darstellung nicht wenig die Anregung zum Studium dieses Zweiges gefördert.

In Deutschland blieb die Rückwirkung der reinen Geometrie auf die analytische nicht lange aus. Zuerst erschien hier (1807) der barycentrische Calcul von Möbius und darin die Begründung der Beziehung zweier Figuren, welche man die Verwandtschaft der Collineation genannt hat. Diese Art der Verwandtschaft besteht darin, daß immer ein Punkt eines Raumgebildes einem Punkte eines andern entspricht, in der Weise, daß, wenn drei Punkte der einen Figur in einer Geraden liegen, auch die drei ihnen entsprechenden Punkte der andern Figur in einer geraden Linie enthalten sind. Je nach der Lage eines auf beide Gebilde bezüglichen Punktes (Collineations-Centrum) und eben so einer Geraden (Collineations-Achse) geht diese Verwandtschaft in die der Affinität, der Aehnlichkeit und der Congruenz über. Man hatte also hier schon viel allgemeinere Beziehungen zwischen zwei Figuren, als sie die Elementargeometrie zu entwickeln vermochte, und dem gemäß auch dieser Verallgemeinerung entsprechende Theoreme. Eine andere Verwandtschaft, die der Reciprocität, wo einem Punkte des einen Gebildes eine Gerade oder eine Ebene in dem andern entspricht, war schon von Poncelet in die Geometrie eingeführt worden. Magnus hat beide Verwandtschaften in analytischer Darstellung und weiterer Entwickelung gegeben (1833).

Unterdessen hatte Plücker, auf gleiche Weise angeregt, in seinen analytisch-geometrischen Entwickelungen (1828 und 1831) das Bedürfniß ausgesprochen, sich von den Fesseln der gewöhnlichen Coordinatenbestimmung loszumachen, und dieß war der erste Schritt zur höhern Gestaltung der analytischen Geometrie. Die Ausführung dieser Idee ist ihm in seinem System der analytischen Geometrie (1835) vollkommen gelungen, durch welches der Geometrie ganz neue Betrachtungsweisen eröffnet wurden. Bei der gewöhnlichen Darstellung werden die Punkte einer Kurve auf zwei Achsen bezogen, und häufig wird bei den Untersuchungen verlangt, diese Beziehung auf zwei andere Achsen zu übertragen. Hierdurch wird aber oft eine Schwerfälligkeit und Weitläufigkeit in die Rechnung getragen, welche der Natur der einfachen Resultate durchaus nicht entsprechen, und man konnte sich wohl sagen, daß man den rechten Weg, sie zu erhalten, nicht eingeschlagen hatte. Plücker entfernte nun diese Unbehülflichkeit dadurch, daß er gleich von vorne herein diese Beziehung unbestimmt ließ, und an die Stelle der Coordinaten lineare Funktionen setzte, die jede mögliche Beziehung, also auch die der gewöhnlichen Coordinaten ausdrücken konnten. Wir betrachten diese Idee als die fruchtbarste Erweiterung der analytischen Geometrie; der frühere starre Mechanismus wurde dadurch zu einem beweglichen Organismus, welcher nach allen Seiten hin sich zu entwickeln fähig ist. Was diese Idee zu leisten vermag, davon legt das ganze Werk Zeugniß ab; durch sie ist der erste Schritt geschehen zur Vereinigung der beiden Methoden, welche jetzt die Geometrie spalten. Der sogenannte Calcul tritt hier schon mehr zurück, und für Plücker sind seine Funktionen dasselbe, was für Steiner sein Strahlbüschel, das bewegliche Element, durch welches sie ihre schönen Theoreme beweisen. Und so wird denn auch wohl die Zeit nicht ferne sein, wo beide Methoden, durch ihre gegenseitige Einwirkung immer Höheres auf einfacheren Wegen schaffen, und endlich selbst in Eins verschmelzen.

Die Geometrie bietet uns unter allen Zweigen der Mathematik das lehrreichste Bild. Wir sehen, wie die Menschen vom Anfange des reinen Denkens an das Einzelne zu fassen suchten, und nur dieses mit Sicherheit erkennen wollten und konnten. Auf dieser Stufe war eine Beziehung des Erkannten zur Außenwelt noch nicht möglich, aber sie erhob sich allmälig, in gleichem Maße nahm aber auch die Strenge der Darstellung, des Denkens ab. Nun erfolgte die Ablösung beider Richtungen von ihren Erzeugern, weil sie ihnen keine weitere Entwickelung mehr zu geben vermochten, und die Uebertragung auf ein neues Element, welches sie in eigenthümlicher Weise verarbeitete und dann wieder auf einen ganz neuen Boden verpflanzte. Hier ging nun aus dem Umsturze aller Verhältnisse eine ganz neue Entwickelung hervor mit vorherrschend praktischer Richtung, und allmälig nur trat die alte Wissenschaft hinzu. So blieben alle Erfolge der frühen geistigen Thätigkeit gesichert, sie dienten aber jetzt als aufgesparte Kräfte, als Anregungsmittel zu neuen Erzeugnissen; die Auffassung war eine andere, höhere und allgemeinere geworden. Die Erfindung einzelner geometrischer Sätze wurde jetzt Nebensache, man suchte umfassende Methoden, um die Hülfsmittel zur Forschung zu vereinfachen; man suchte die getrennten Sätze zu vereinigen und sie als Ausflüsse allgemeiner Sätze darzustellen. Zuletzt trat das Streben hervor, von einem einfachen Grundsatze aus alle Verhältnisse und Eigenschaften der Raumgebilde zu entwickeln und somit alle einzelne als die nothwendige Folge eines ersten und höchsten Gesetzes zu erkennen.

Ganz die gleichen Erscheinungen bieten uns die Naturwissenschaften, welche mit der Mathematik so innig verbunden sind. Zuerst mit der Entstehung des reinen Denkens die Trennung, die Betrachtung der Natur in ihren Theilen,

dann die Zusammenfassung einer Reihe von Thatsachen unter ein Gesetz, zuletzt die Konstruktion der Welt von einem höchsten Gesetze aus. Dieses Verhältniß ist sehr beachtenswerth: in dem Streben nach dem Aufsteigen zur Einheit liegt der Charakter unserer Zeit; es spricht sich jetzt erst vereinzelt aus, wird aber immer mehr hervortreten, und zuletzt alle Hindernisse bewältigen, welche ihm entgegengestellt werden. Dieses Ziel müssen die Menschen erreichen, wenn sie ihre Bestimmung erfüllen sollen; ihr Streben geht darnach seit mehr als 2000 Jahren, und es gibt sich jetzt in allen unsern Verhältnissen und Zuständen kund; jeder Einzelne arbeitet instinktartig daran, nur Wenige, verhältnißmäßig, sind sich ihrer Bestrebungen bewußt.

Man war bis jetzt gewohnt, in allen Dingen nur auf Griechenland zurückzugehen, weil man nicht gewußt hat, daß hier schon eine gemischte Kultur herrschte, und die geistige Entwickelung bereits einen Höhepunkt erreicht hatte, von welchem sie in kühnem Fluge sich rasch zu entfalten vermochte. Diese Kultur war schon die Frucht tausendjähriger Kämpfe und konnte als solche keinen Ausgangspunkt bieten; die Erscheinungen mußten unerklärt bleiben. Die Philosophen wußten nicht, daß die Ideen, welche sie verarbeiteten, bloße Reproduktionen von Systemen waren, welche schon seit mehreren Jahrtausenden untergegangen sind, und deren Nachklänge allein wir in Griechenland finden. Der Mathematiker ahnte nicht, daß die Keime der schönsten Zweige seiner Wissenschaft vor Jahrtausenden im fernen Osten entstanden sind, die aber erst, durch den Einfluß griechischen Geistes gezügelt, zum fruchtbringenden Organismus sich entwickeln konnten. Der Naturforscher glaubte nicht, daß die schönsten Naturansichten der Neuzeit, welche in einzelnen Lichtpunkten aus der griechischen Zeit hervor leuchten, auch jenen fernen Regionen entflossen sind, wo die Menschen, abgezogen von der Außenwelt, das Höchste in kühnen Dichtungen zu erfassen suchten. Der Theologe wird es immer abweisen, die Quelle seiner Dogmen aufzusuchen.

Seit der sogenannten Wiederherstellung der Wissenschaften hat man sich nur mit Griechenland beschäftigt; aber auch diese Zeit ist glücklich vorübergegangen, und der germanische Geist hat auch hier eine andere Bahn gebrochen. Die Sprachen, Sitten, Kulturzustände und geistigen Bewegungen des Orientes in längstvergangenen Zeiten, werden uns immer mehr aufgedeckt, und immer mehr werden uns dadurch die Quellen unserer eigenen Kultur erschlossen. Röth's Geschichte der Philosophie hat uns hier merkwürdige Aufschlüsse gegeben und den Dualismus in der geistigen Bewegung zuerst enthüllt, und je weiter wir in diese Verhältnisse einzudringen vermögen, desto klarer wird er hervortreten. Auch mit diesen Theilen der Menschheit, mit ihrem Leben und Denken werden wir mehr und mehr vertraut gemacht durch Schrift und Bild. Staunend blicken wir jetzt schon auf den schönen Entwurf des Künstlers und auf die fremdartigen Gestalten, welche sein Pinsel hervorgerufen. Es sind die Dichtungen der indischen Sagen, welche uns so ungewohnt entgegen treten, aber wir werden sie kennen und verstehen lernen.

Die Betrachtung der ältesten Geschichte ist unumgänglich nothwendig, und gerade am wichtigsten, weil hier die verschiedenen Richtungen noch am reinsten ausgeprägt sind und am leichtesten in ihrer Wahrheit erkannt werden können. In den ältesten Zeiten sind die Rassen und die Völkergruppen noch die Repräsentanten der Hauptrichtungen; dieses Verhältniß schwindet aber nach und nach immer mehr, wie diese sich auflösen oder verschmelzen.

Die Kulturgeschichte allein vermag uns aber die Gesetze der geistigen Entwickelung noch nicht zu eröffnen, weil viele Vorurtheile uns ihre richtige Auf-

fassung verschlossen haben, und weil überhaupt der Mensch nicht nur von einer Seite allein in Wahrheit erkannt werden kann. Hier muß die Naturwissenschaft eintreten: wir müssen die bisherigen Dichtungen vollends zerreißen und den Menschen als das nehmen, was er ist, als ein Theil des Naturganzen und in seinem Zusammenhange mit der Natur. Wir haben dieß in unserem ersten Theile gethan und gezeigt, daß es nur ein Gesetz gibt für alle körperlichen und geistigen Dinge: das Gesetz des Fortschrittes, der höhern Entwickelung. Die geistigen Prozesse sind Naturprozesse und demselben allgemeinen Gesetze unterworfen. Die vier Rassen waren die vier Elemente; aus ihnen sind zahlreiche Verbindungen hervorgegangen, die stets wieder auf einander wirken und höhere Gestaltungen hervorrufen. Die Theile des Menschengeschlechtes, welche noch außerhalb dieser Gestaltungen stehen, werden mit der Zeit sämmtlich hineingezogen werden, und dazu werden sie auch durch einen natürlichen Instinkt getrieben.

Wir haben es versucht, dieses Gesetz des geistigen Prozesses in allgemeinen Umrissen in der Mathematik nachzuweisen; es liegt zu klar vor, als daß es verkannt werden könnte; eben so ist es in den Naturwissenschaften, welche hiervon nicht getrennt werden können. Viele Verhältnisse, welche sonst nicht erklärt werden konnten, treten hier jetzt selbstverständlich auf, und die einzelnen Bestrebungen erhalten ihr Licht und ihre Bedeutung. Die bestehenden Verbindungen der Elemente werden fortfahren, auf einander zu wirken, und das Menschengeschlecht wird unter dem Einflusse dieses Prozesses körperlich und geistig ein anderes werden und immer höher steigen. Wenn jetzt oft tausende von Menschen unabhängig von einander denselben Gedanken haben, so denken wieder Andere das Entgegengesetzte; die verschiedenen Meinungen bekämpfen sich, aber eben aus diesen Kämpfen geht die Vermittelung und die höhere Gestaltung hervor, und der Gedanke wird immer allgemeiner. Das Ziel der Menschheit ist ein Gedanke, ein Streben. Auf dem Wege nach diesem Ziele muß das geistige Wesen und die sittliche Kraft immer höher steigen, damit der Mensch seine Macht nicht mißbrauche und stets der Diener für die höchsten Zwecke bleibe. Dem Kinde verwehrt man das Feuer, damit es ihm nicht schade, der Erwachsene, d. h. Verständige, gebraucht es zu seinem Nutzen. Im alten Testamente, in der Geschichte vom Thurmbau zu Babel, stehen die Worte: „Lasset uns einen Thurm bauen, dessen Spitze bis an den Himmel reiche. Und der Herr sprach: Siehe es ist einerlei Volk und einerlei Sprache unter ihnen, und sie haben das angefangen, und werden nicht ablassen von Allem, was sie angefangen haben." Es liegt ein tiefer Sinn in diesen einfachen Worten, sie sind entstanden unter dem Eindrucke der Macht, die Gott dem Menschen als seinem Ebenbilde verliehen hat. Aber mit der Kraft muß die Einsicht gepaart sein, wenn sie nicht auf ihre Träger selbstvernichtend wirken soll. Deßwegen tritt auch jene Kraft im Menschen nur allmälig hervor; er muß sich dieselbe mühsam erwerben, zugleich mit der Erkenntniß, wie er sie recht und seiner Bestimmung gemäß gebrauchen soll.

Es sind noch nicht hundert Jahre her, daß die Lösung von Aufgaben, welche die Menschen sich gestellt hatten, als unmöglich von der Hand gewiesen wurde, sie sind heute alle gelöst; es sind aber wieder neue an ihre Stelle getreten, und auch sie werden, in noch kürzerer Zeit, eben so gelöst werden. Jede Zeit hat ihre Aufgabe, die sie lösen muß; sie läßt sich weder vorwärts drängen, noch zurückhalten, noch durch eine andere ersetzen. Der Gedanke setzt über Länder und Meere; bleibt er hier zurück, so eilt er dort desto schneller vorwärts, aber die mittleren Resultate treten nicht aus dem Gesetze heraus, sie bilden eine Reihe der Fortschritte in steigender Progression. Man bedenke

nur, wie weit der Mensch schon Herr über Raum und Zeit geworden ist, man denke an die fast fabelhafte Schnelligkeit der Gedankenmittheilung durch die Elektrizität, und doch sind dieß erst die kleinen Anfänge. Eine Zeit begreift selten die Aufgabe der nächsten; der höhere Geist braucht auch ein anderes Haus, und dieses erwächst ihm nur in den folgenden Generationen. Einem alten Manne aus den gebildeten Ständen, in dessen hohes Alter die Anwendung der Eisenbahnen und Dampfmaschinen fiel, war die ganze Sache erklärt worden, und er hatte sie wohl verstanden. Als nun auch nach seinem Wohnorte eine Eisenbahn angelegt wurde, da zog es ihn hin, die Sache noch zu sehen; und er ging hin Tag um Tag, er sah die Züge kommen und gehen; er sah sie wieder und wieder, immer waren sie ihm neu, er hatte die Sache verstanden, aber begreifen konnte er sie nicht.

Die Wärmelehre kannte früher nur das Thermometer als Mittel den Grad oder den Wechsel dieser Thätigkeit anzuzeigen, aber jetzt hat sie noch ein anderes ohne Vergleich feineres Werkzeug in dem Thermoskop. Wer wollte nun die Möglichkeit läugnen, daß wir hier noch weiter kommen können, daß wir am Ende im Stande sein werden, auch die schwächsten Eindrücke einer jeden Wärmefarbe zu unterscheiden! — Seit wenig Jahren erst kennen wir die Eigenschaft der jodirten Silberplatte, die feinsten Lichteindrücke aufzunehmen und festzuhalten; dieser Anfang wird sicher nicht das Ende sein, wir werden weiter kommen, die verschiedenen Lichteindrücke sondern und ein Maaß ihrer Stärke erhalten. Wenn ein tönender Körper sich von uns entfernt, so vermögen wir aus der abnehmenden Tonhöhe auf die Entfernung des Körpers in einem bestimmten Augenblicke zu schließen. Aber eben so, wenn ein leuchtender Körper sich von uns entfernt, so verändert er seine Farbe; vermöchten wir nun diese zu verschiedenen Zeiten festzuhalten, so könnten wir auf seine Bewegung, ja selbst auf seine Entfernungen schließen. Dieß alles sind Dinge, mit welchen wir jetzt schon angefangen haben, vertraut zu werden; vor fünfzig Jahren würden sie aber nur Spott und Gelächter erregt haben.

Wir sind mit unserer Erde bis jetzt noch Fremdlinge im Weltall; kann es aber die Bestimmung der Weltkörper sein, sich in Ewigkeit fremd zu bleiben, die Glieder einer Schöpfung, die Kinder eines Vaters? — Durch eine kleine Anstrengung stoßen wir einen Luftstrom aus, dieser bringt eine Bewegung der Luft hervor, welche sich fortpflanzt bis zum Ohre des Hörers, bei dem er nun die mannigfachsten Gefühle und Vorstellungen hervorzubringen vermag, das ist die Sprache. Eine solche Sprache sprechen auch die Himmelskörper; eine jede ihrer Veränderungen, ihrer Thätigkeiten drückt sich, wie der Ton in der Luft, im Aether ab, und dieser trägt sie hinaus in das Unendliche. Aber wir verstehen diese Sprache nicht, wie der Stein und die Pflanze nicht die unsere; Körper und Geist sind noch zu grob gearbeitet; werden wir uns je befähigen, sie zu verstehen? — Es kommt darauf an, daß wir uns erkennen als das, was wir sind und was wir werden sollen; dazu müssen aber die falschen und mißverstandenen Bilder der Vergangenheit allmälig ausgelöscht werden; durch die Anwendung des reinen Denkens auf die Bewegungen und Veränderungen in der Körper- und Geisteswelt müssen wir das allgemeine Naturgesetz immer mehr zu erkennen und in unserem Thun und Lassen zu verwirklichen suchen. Wir werden dadurch unserer Bestimmung entsprechen und immer mehr wachsen in geistiger Größe und sittlicher Kraft.

Druckfehler.

Seite	Zeile	statt	lies
2	28	früher	frühe.
38	6	Jahrhunderts	Jahrtausends.
72	6	(|) (|( )|)	(|) (|) (|).
78	2 v. u.	als Sätze	Sätze als.
90	8	scheiden	schneiden.
119	13	Aehnliches	ähnliches.
126	27	dd^y 4	dd^y 5.
"	33	m^o 8	m^o 9.
127	22	x^3+z^2	x^2+z^2.
"	23	$y^2+{}^2z$	y^3+z^2.
131	33	b^2	B^2.
132	10	33	30.
"	14 u. 15	2500	2520.
"	26	17	21.
158	8	d+	d+.
165	27	$(m^2+n)^2$	$(m^2+n^2)^2$.
167	18	2(2ax)	2b(2ax.
169	3 u. 4	aber nicht	und.
170	28	BC=x	BC=y.
172	40	cos. a^2	cos. a.
173	18	sin. 3° 45′	sin. 3° 45′².
"	19	sin. 7° 30′	sin. 7° 30′².
186	19	Parthen	Parther.
207	16	Severius	Severinus.
209	35	vor	von
230	26	$\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}$	$\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}$
282	25	x^3	x^3.
"	29 u. 30	entsprechend Werth	entsprechenden Werthe.
285	18	BN, AD	BD, AN.
278	33	1807	1827.
288	40	frühen	frühern.

291
186
105